Секция 1. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

Построение методов решения задачи фильтрации в сильнопористых трещиноватых пластах

Н.Б. Алимбекова[1,2], Д.Р. Байгереев[1], Е.К. Ергалиев[1]
[1]Восточно-Казахстанский государственный университет им. С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан;
[2]Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы, Казахстан

Моделирование процессов фильтрации многофазной жидкости имеет большую экономическую значимость в нефтяной промышленности, гидрологии, при секвестрации углерода и управлении ядерных отходов. Данные модели лежат в основе гидродинамических симуляторов, используемых при разработке нефтяных месторождений, позволяя проводить прогнозные расчеты показателей разработки.

Длительное изучение фильтрационных течений показало, что на их динамику значительно влияют эффекты памяти, которые описываются теорией интегро-дифференцирования дробного порядка. Данные математические модели обеспечивают более точное и реалистичное описание процессов, протекающих в таких сложных средах. Данное направление в теории фильтрации появилось сравнительно недавно [1, 2, 3]. В работе [4] классические уравнения, описывающие движение жидкости в пористой среде, переписаны с учетом формализма памяти с использованием дробной производной в смысле Капуто. В [5] изучается явление продольной дисперсии в потоке двух смешивающихся жидкостей через пористую среду с помощью дробной производной Капуто-Фабрицио. В работе [6] применены дробные производные различного порядка в смысле Капуто с переменным нижним пределом в трещиноватых и матричных областях.

В настоящей работе рассматривается модельная задача двухфазной фильтрации, исследованная в [6]. Вместо дробной производной в смысле Капуто, примененной в [6], используется дробная производная в смысле Капуто-Фабрицио.

На отрезке $\Omega = [0,1]$ рассмотрим модель фильтрации, включающей в себя уравнения неразрывности и движения, записанными для каждой фазы:

$$\phi D_{0,t}^{\gamma} s_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = q_\alpha, \tag{1}$$

$$u_\alpha = -\frac{K k_\alpha}{\mu_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial x}, \tag{2}$$

соотношение между давлениями фаз:

$$p_c(s_w) = p_o - p_w \tag{3}$$

и уравнение баланса насыщенностей

$$s_w + s_o = 1, \tag{4}$$

где $D_{0,t}^{\gamma}$ обозначает производную дробного порядка в смысле Капуто-Фабрицио

$$D_{0,t}^{\gamma} f(x,t) = \frac{1}{1-\gamma} \int_0^t e^{-\frac{\gamma(t-\tau)}{1-\gamma}} \cdot \frac{\partial f(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

нижние индексы $\alpha = w$ и $\alpha = o$ обозначают фазы воды и нефти; s_α, k_α, u_α, μ_α, p_α – соответственно, насыщенность, относительная фазовая проницаемость, скорость фильтрации, вязкость и давление фазы α; ϕ и K – пористость и проницаемость пористой среды. Предполагается, что на концах отрезка расположены нагнетательная и добывающая скважины, поэтому (1)-(4) дополняются следующими начальными и граничными условиями:

$$s_w(x,0) = \varphi(x), \tag{5}$$

$$p_o(0,t) = 1, \;\; p_o(1,t) = 0. \tag{6}$$

Следуя известному подходу, уравнения (1)-(4) сводятся к следующей системе уравнений относительно давления нефти p_o и насыщенности воды s_w:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial p_o}{\partial x}\right) = q, \tag{7}$$

$$D_{0,t}^{\gamma} s_w = r(x,t) \frac{\partial s_w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial s_w}{\partial x}\right) + c(x,t) s_w + f(p,s), \tag{8}$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < t < T$$

с условиями (5), (6), где

$$\lambda = \sum_{\alpha=w,o} \frac{K k_\alpha}{\mu_\alpha}, \quad r = -\frac{K}{\mu_w} \frac{\partial p_o}{\partial x}, \quad k = -\frac{K k_w}{\mu_w} \frac{d p_c}{d s_w},$$

$$c = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{\mu_w} \frac{\partial p_o}{\partial x}\right), \quad q = q_w + q_o - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K k_w}{\mu_w} \frac{\partial p_c}{\partial x}\right).$$

Для численного решения в области Ω введем равномерную сетку $\omega = \omega_h \times \omega_\tau$, где

$$\omega_h = \left\{x_i = ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad x_N = 1\right\},$$
$$\omega_\tau = \left\{t^n = n\tau, \ \ n = \overline{0, N_t}, \ \ t^n = T\right\}.$$

Поставим в соответствие задаче (7), (8), (5), (6) разностную схему

$$-(\nu p_{\bar{x}})_{x,i} = \psi_i, \tag{9}$$
$$\Delta^{\gamma}_{0t_{n+\sigma}} s_i = \eta_i^- \xi_i s_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + \eta_i^+ \xi_{i+1} s_{x,i}^{(\sigma)} + \left(\xi_i s_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i} + \chi_i s_i + \varphi_i, \tag{10}$$

где $\Delta^{\gamma}_{0t_{n+\sigma}} y$ – дискретный аналог дробной производной Капуто-Фабрицио порядка γ, $0 < \gamma < 1$ [7]:

$$\Delta^{\gamma}_{0t_{n+\sigma}} y = \frac{1}{\gamma} \sum_{m=0}^{n} g_{n-m}^{\gamma,\sigma} y_{t,m},$$

веса $g_m^{\gamma,\sigma}$ определяются по формуле

$$g_0^{\gamma,\sigma} = A_0^{\gamma,\sigma}, \ \ n = 0,$$
$$g_m^{\gamma,\sigma} = \begin{cases} A_0^{\gamma,\sigma} + B_1^{\gamma,\sigma}, & m = 0, \\ A_m^{\gamma,\sigma} - B_m^{\gamma,\sigma} + B_{m+1}^{\gamma,\sigma}, & 1 \le m \le n-1, \ \ n > 0, \\ A_n^{\gamma,\sigma} - B_n^{\gamma,\sigma}, & m = n, \end{cases}$$
$$A_0^{\gamma,\sigma} = 1 - e^{-\frac{\gamma\tau\sigma}{1-\gamma}}, \quad A_m^{\gamma,\sigma} = \left(e^{\frac{\gamma\tau}{1-\gamma}} - 1\right) \cdot e^{-\frac{\gamma\tau(\sigma+m)}{1-\gamma}}, \ \ m > 0,$$
$$B_m^{\gamma,\sigma} = \frac{1}{2\gamma}\left(e^{\frac{\gamma\tau}{1-\gamma}}(\gamma\tau + 2\gamma - 2) + \gamma\tau - 2\gamma + 2\right) \cdot e^{-\frac{\gamma\tau}{1-\gamma}(\sigma+m)}, \ \ m > 0,$$

а также введены обозначения $s_i = s(x_i, t^n)$, $p_i = p(x_i)$,

$$\eta^- = \frac{1}{2}(\eta - |\eta|), \quad \eta^+ = \frac{1}{2}(\eta + |\eta|),$$
$$\xi_i^n = k\left(x_{i-\frac{1}{2}}, t^{n+\sigma}\right), \ \ \eta_i^n = \frac{r(x_i, t^{n+\sigma})}{k(x_i, t^{n+\sigma})}, \quad \varphi_i^n = f(x_i, t^{n+\sigma}),$$
$$\sigma = 1 - \frac{\gamma}{2}, \quad y^{(\sigma)} = \sigma y^{n+1} + (1-\sigma) y^n.$$

Для реализации разностной схемы (9)-(10) на каждом временном слое требуется решить систему линейных уравнений

$$A_i^{(1)} p_{i-1} - C_i^{(1)} p_i + B_i^{(1)} p_{i+1} = -F_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$A_i^{(2)} s_{i-1}^{n+1} - C_i^{(2)} s_i^{n+1} + B_i^{(2)} s_{i+1}^{n+1} = -F_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

где

$$A_i^{(1)} = \frac{\nu^n_{i-\frac{1}{2}}}{h^2}, \quad B_i^{(1)} = \frac{\nu^n_{i+\frac{1}{2}}}{h^2}, \quad C_i^{(1)} = \frac{\nu_{i-\frac{1}{2}}+\nu_{i+\frac{1}{2}}}{h^2}, \quad F_i^{(1)} = \psi_i^n,$$

$$A_i^{(2)} = \xi_i \sigma \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}(\eta_i - |\eta_i|) \right),$$

$$B_i^{(2)} = \xi_{i+1} \sigma \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}(\eta_i + |\eta_i|) \right),$$

$$C_i^{(2)} = \frac{g_0^{\gamma,\sigma}}{\gamma\tau} + \frac{\sigma}{2h}\left(\xi_{i+1}(\eta_i + |\eta_i|) - \xi_i(\eta_i - |\eta_i|) \right) + \frac{\sigma}{h^2}(\xi_i + \xi_{i+1}) + \chi_i,$$

$$F_i^{(2)} = \frac{1}{\gamma\tau}\left(g_0^{\gamma,\sigma} s_i - \sum_{m=0}^{n-1} g_{n-m}^{\gamma,\sigma}\left(s(x_i, t^{m+1}) - s(x_i, t^m)\right) \right) +$$
$$+ \frac{\xi_i(1-\sigma)}{2h}(\eta_i - |\eta_i|)(s_i - s_{i-1}) + \frac{\xi_{i+1}(1-\sigma)}{2h}(\eta_i + |\eta_i|)(s_{i+1} - s_i) +$$
$$+ \frac{1-\sigma}{h^2}\left(\xi_{i+1}(s_{i+1} - s_i) - \xi_i(s_i - s_{i-1}) \right) + \varphi_i.$$

Данная система решается методом скалярной прогонки. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что условие устойчивости метода прогонки выполняется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (ИРН AP08053189).

Библиографический список

1. Di Giuseppe E., Moroni M., Caputo M. Flux in porous media with memory: models and experiments // Transport in Porous Media. – 2010. – Vol. 83(3). – P. 479–500.

2. Газизов Р. К., Лукащук С. Ю. Дробно-дифференциальный подход к моделированию процессов фильтрации в сложных неоднородных пористых средах // Вестник УГАТУ. – 2017. – Т. 21, №4. – С. 104–112.

3. Abiola O. D., Enamul H. M., Kaseem M., Sidqi A. A. A modified memory-based mathematical model describing fluid flow in porous media // Computers and Mathematics with Applications. – 2017. – Vol. 73(6). – P. 1385–1402.

4. Caputo M. Models of flux in porous media with memory // Water Resources Research. – 2000. – Vol. 36(3). – P. 693–705.

5. Agarwal R., Yadav M. P., Baleanu D., Purohit S. D. Existence and uniqueness of miscible flow equation through porous media with a non singular fractional derivative // AIMS Mathematics. – 2020. – Vol. 5(2). – P. 1062–1073.

6. Zhong W., Li C., Kou J. Numerical fractional-calculus model for two-phase flow in fractured media // Advances in Mathematical Physics. – 2013. - Vol. 2013, No. 429835. – P. 1–7.

7. Бештоков М. Х. Нелокальные краевые задачи для уравнения соболевского типа с дробной производной и сеточные методы их решения // Математические труды. – 2018. – Т. 21(2). – С. 72–101.

УДК 512.552

Сжатые графы делителей нуля на четырёх вершинах

А.А. Афанасьев, А.С. Монастырёва
АлтГУ, г. Барнаул

На протяжении всей работы слово “кольцо” означает ассоциативное конечное кольцо.

И. Бек в 1988 году в работе [1] впервые использовал идею построения графа делителей нуля для коммутативного кольца. Он предложил считать все элементы кольца вершинами графа делителей нуля. В 1999 году Д. Андерсон и Ф. Ливингстон в работе [2] изменили способ построения графов делителей нуля: вершинами графа коммутативного кольца считались все ненулевые делители нуля кольца.

Мы же будем использовать следующее определение. Пусть R – произвольное кольцо, $D(R)$ – множество делителей нуля кольца R. Вершинами графа будем считать все элементы множества $D(R)^* = D(R) - \{0\}$, причем две различные вершины x и y соединяем ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ либо $yx = 0$. Данное определение ввел Редмонд в 2002 году в статье [3]. Граф делителей нуля кольца мы будем обозначать следующим образом: $\Gamma(R)$.

Графы $\Gamma(R)$ хорошо изучены. В 2003 и 2007 годах конечные коммутативные кольца с планарными $\Gamma(R)$ описали S. Akbari, H.R. Maimani, S. Yassemi и R. Belshoff, J. Chapman в статьях [4] и [5] соответственно. S. Akbari, A. Mohammadian в 2006 году описывали свойства колец с двудольными $\Gamma(R)$ в работе [6]. Так же полностью описаны нильпотентные кольца с планарными $\Gamma(R)$ Монастырёвой А.С и Ю.Н. Мальцевым в работе [7] 2008-ого года. Уже в 2009 году в статье [8] А.С. Монастырёва полностью описала ненильпотентные кольца с планарными $\Gamma(R)$. В 2012 году ею же были описаны конечные кольца с эйлеровыми $\Gamma(R)$ в статье [9]. В этом же году были описаны конечные кольца с полными двудольными $\Gamma(R)$ А.С. Монастырёвой, Ю.Н. Мальцевым в работе [10]. Ими так же в статье [11] 2014-ого года были описаны конечные кольца с однородными $\Gamma(R)$, а также доказаны некоторые свойства конечных колец, $\Gamma(R)$ которых удовлетворяет