7. Бештоков М. Х. Нелокальные краевые задачи для уравнения соболевского типа с дробной производной и сеточные методы их решения // Математические труды. – 2018. – Т. 21(2). – С. 72–101.

УДК 512.552

Сжатые графы делителей нуля на четырёх вершинах

А.А. Афанасьев, А.С. Монастырёва
АлтГУ, г. Барнаул

На протяжении всей работы слово “кольцо” означает ассоциативное конечное кольцо.

И. Бек в 1988 году в работе [1] впервые использовал идею построения графа делителей нуля для коммутативного кольца. Он предложил считать все элементы кольца вершинами графа делителей нуля. В 1999 году Д. Андерсон и Ф. Ливингстон в работе [2] изменили способ построения графов делителей нуля: вершинами графа коммутативного кольца считались все ненулевые делители нуля кольца.

Мы же будем использовать следующее определение. Пусть R – произвольное кольцо, $D(R)$ – множество делителей нуля кольца R. Вершинами графа будем считать все элементы множества $D(R)^* = D(R) - \{0\}$, причем две различные вершины x и y соединяем ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ либо $yx = 0$. Данное определение ввел Редмонд в 2002 году в статье [3]. Граф делителей нуля кольца мы будем обозначать следующим образом: $\Gamma(R)$.

Графы $\Gamma(R)$ хорошо изучены. В 2003 и 2007 годах конечные коммутативные кольца с планарными $\Gamma(R)$ описали S. Akbari, H.R. Maimani, S. Yassemi и R. Belshoff, J. Chapman в статьях [4] и [5] соответственно. S. Akbari, A. Mohammadian в 2006 году описывали свойства колец с двудольными $\Gamma(R)$ в работе [6]. Так же полностью описаны нильпотентные кольца с планарными $\Gamma(R)$ Монастырёвой А.С и Ю.Н. Мальцевым в работе [7] 2008-ого года. Уже в 2009 году в статье [8] А.С. Монастырёва полностью описала ненильпотентные кольца с планарными $\Gamma(R)$. В 2012 году ею же были описаны конечные кольца с эйлеровыми $\Gamma(R)$ в статье [9]. В этом же году были описаны конечные кольца с полными двудольными $\Gamma(R)$ А.С. Монастырёвой, Ю.Н. Мальцевым в работе [10]. Ими так же в статье [11] 2014-ого года были описаны конечные кольца с однородными $\Gamma(R)$, а также доказаны некоторые свойства конечных колец, $\Gamma(R)$ которых удовлетворяет условию Дирака. В работе [12] 2015-ого ими продолжено изучение конечных колец, $\Gamma(R)$ которых удовлетворяют условию Дирака.

Доказано в работе [13], что $\Gamma(R)$ связный, причем его диаметр меньше или равен трём. Так же он конечный тогда и только тогда, когда кольцо конечное, что так же показано в работе [13].

Геометрическое изображение $\Gamma(R)$ представляется довольно сложным даже для колец малых порядков. Поэтому необходимо разбить множество вершин графа на классы эквивалентности, причем так, чтобы не нарушалось представление о строении графа в целом. В 2010-2013 годах Н. Блумфилд и С. Викхам в работах [14] и [15] предложили способ решения этой проблемы для коммутативных колец. В статье [16] Е.В. Журавлев и А.С. Монастырёва расширили их подход на некоммутативный случай. Происходит это следующим образом. Пусть R произвольное кольцо. Введем отношение эквивалентности на множестве $D(R)^*$: $x, y \in D(R)^*$ $x{\sim}y <=> l(x) \cup r(x) = l(y) \cup r(y)$, где $l(x), r(x)$ – левый и правый аннулятор x, для y аналогично. То есть это отношение эквивалентности задает разбиение множества делителей нуля кольца на классы, такое, что каждый делитель нуля попадает в один из них и только в один. Пусть $[x]$ – класс эквивалентности элемента x. Дадим определение сжатого графа делителей нуля кольца. Граф, множеством вершин которого являются все классы эквивалентности кольца R и две вершины $[x], [y]$ (не обязательно различные) соединяются ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$, будем называть сжатым графом делителей нуля кольца R. Сжатый граф делителей нуля кольца мы будем обозначать следующим образом: $\Gamma_{\sim}(R)$.

Доказано в работе [16], что вершины сжатого графа делителей нуля делятся на два типа. Если $x^2 = 0$, то класс эквивалентности $[x]$ – это вершина с петлей. Если $x^2 \neq 0$, то $[x]$ – это вершина без петли.

Изображение $\Gamma_{\sim}(R)$, в отличие от $\Gamma(R)$, более компактно и наглядно. Зная, сколько элементов содержится в каждом классе эквивалентности, мы всегда от $\Gamma_{\sim}(R)$ можем перейти к $\Gamma(R)$. Поэтому при изучении свойств $\Gamma_{\sim}(R)$ можно использовать свойства $\Gamma(R)$.

На настоящий момент $\Gamma_{\sim}(R)$ мало изучены. Ненильпотентные кольца, $\Gamma_{\sim}(R)$ которых имеют порядок два, описаны А.С. Монастырёвой в 2019 году в работе [17]. В статье [16] 2020-ого Е.В. Журавлева и А.С. Монастырёвой описаны кольца, $\Gamma_{\sim}(R)$ которых имеют порядок один. Там же описаны коммутативные кольца, $\Gamma_{\sim}(R)$ которых имеют порядок два. Что касается колец, $\Gamma_{\sim}(R)$ которых имеют порядок три, то известно, что существует два типа таких графов. Доказательство этого факта так же получено в работе [16].

Остается открытым вопрос: описать графы с петлями на четырех вершинах, которые являются $\Gamma_{\sim}(R)$ какого-либо кольца.

Были перебором найдены всевозможные неизоморфные графы на четырех вершинах. Всего пятьдесят случаев. В настоящей работе уже для двадцати графов нами получен ответ на вопрос, могут ли эти графы быть графами делителей нуля какого-либо кольца.

Теорема. *Для графов, изображённых на рисунке 1 и рисунке 2, существуют кольца, сжатые графы делителей нуля которых изоморфны найденным. Для графов, изображённых на рисунках 3-20, нет таких колец, сжатые графы делителей нуля которых изоморфны данным.*

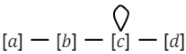

Рисунок 1.

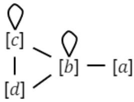

Рисунок 2.

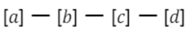

Рисунок 3.

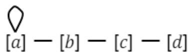

Рисунок 4.

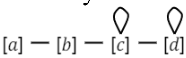

Рисунок 5.

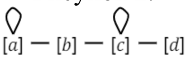

Рисунок 6.

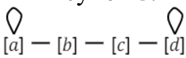

Рисунок 7.

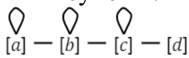

Рисунок 8.

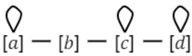

Рисунок 9.

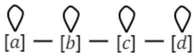

Рисунок 10.

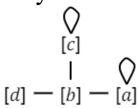

Рисунок 11.

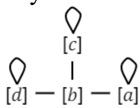

Рисунок 12.

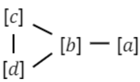

Рисунок 13.

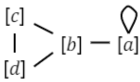

Рисунок 14.

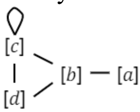

Рисунок 15.

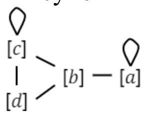

Рисунок 16.

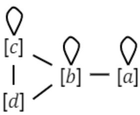

Рисунок 17.

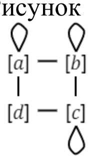

Рисунок 18.

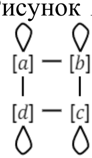

Рисунок 19.

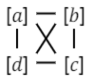

Рисунок 20.

Библиографический список

1. Beck I. Coloring of Commutative Rings // Journal of Algebra. – 1988. – V. 116. – P. 208–226.

2. Anderson D.F., Livingston P.S. Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring // Journal of Algebra. – 1999. – V. 217. – P. 434–447.

3. Redmond S.P. The Zero-Divisor graph of a Noncommutative Ring // Int. J. Commut. rings. – 2002. – №1(4). – P. 203–211.

4. Akbari S., Maimani H.R., Yassemi S. When a Zero-Divisor Graph is Planar or a Complete r-partite Graph // Journal of Algebra. – 2003. – V. 270. – P. 169-180.

5. Belshoff R., Chapman J. Planar Zero-Divisor Graphs // Journal of Algebra. – 2007. – V. 316. – P. 471–480.

6. Akbari S., Mohammadian A. On Zero-Divisor Graphs of Finite Rings // Journal of Algebra. – 2006. – V. 314. – P. 168–184.

7. Kuz'mina A.S., Maltsev Yu.N. Nilpotent Finite Rings with Planar Zero-Divisor Graphs // Asian-European Journal of Mathematics. – 2008. – 1. №4. – P. 565–574.

8. Кузьмина А.С. Описание конечных ненильпотентных колец, имеющих планарные графы делителей нуля // Дискретная математика. – 2009. – Вып. 4. – С. 60–75.

9. Kuzmina A.S. Finite Rings with Eulerian Zero-Divisor Graphs // Journal of Algebra and Its Appl. – 2012. – 11(3). – P. 551–559.

10. Кузьмина А.С., Мальцев Ю.Н. Конечные кольца с полными двудольными графами делителей нуля // Известия вузов. Математика. – 2012. – №3. – С. 24–30.

11. Кузьмина А.С., Мальцев Ю.Н. Конечные кольца с некоторыми ограничениями на графы делителей нуля // Известия вузов. Математика. – 2014. – №12. – С. 48–59.

12. Kuzmina A.S., Maltsev Yu.N. On Finite Rings in Which Zero-Divisor Graphs Satisfy the Dirac's condition // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – 4(36). – P. 376–384.

13.Кузьмина А.С. О строении колец с планарными графами делителей нуля // Известия АГУ. – 2009. – 1(61). – С. 17–25.

14. Bloomfield N., Wickham C. Local Rings with Genus Two Zero Divisor Graph // Communication in Algebra. – 2010. – V. 38. – P. 2965–2980.

15. Bloomfield N. The Zero Divisor Graphs of Commutative Local Rings of Order p^3 and p^4// Communication in Algebra. – 2013. – V. 41. – P. 765–775.

16. Журавлев Е.В, Монастырева А.С. Сжатые графы делителей нуля ассоциативных колец // Сибирский математический журнал. – 2020. – Т. 61. №1. – С. 96–106.

17. Monastyreva A.S. Finite Non-nilpotent Rings with Complete Compressed Zero Divisor Fraphs // Сборник тезисов докладов, представленных на международную конференцию "Алгебра и математическая

логика: теория и приложения" (г. Казань, 24-28 июня 2019 г.). – Казань: КФУ. – 2019. – С. 52–53.

УДК 512.57

Независимая аксиоматизируемость квазимногообразий групп простой экспоненты

А.И. Будкин
АлтГУ, г. Барнаул

Квазимногообразие групп – это класс групп, определимый специальными формулами, называемыми квазитождествами. В этой работе изучается вопрос о существовании независимых базисов квазитождеств.

Множество квазитождеств называется независимым, если оно не эквивалентно никакому своему собственному подмножеству. В частности, любое конечное множество квазитождеств эквивалентно независимой системе квазитождеств.

Существует тесная связь между независимыми базисами квазитождеств и определенными свойствами решеток квазимногообразий групп. Из существования бесконечного независимого базиса у данного квазимногообразия следует наличие бесконечного множества покрытий этого квазимногообразия в решетке квазимногообразий групп.

Вопрос о независимой аксиоматизируемости квазимногообразий изучался в [1–11]. В [6] доказано, что квазимногообразие, порождённое свободной 2-ступенно нильпотентной группой, не имеет независимого базиса квазитождеств в классе нильпотентных групп без кручения ступени не выше двух, но по [1] оно имеет независимый базис квазитождеств в классе всех групп.

Пусть M – многообразие нильпотентных групп класса не выше двух экспоненты p (p – нечетное простое число), F – свободная в M группа ранга 2. Обозначим через qF – квазимногообразие, порожденное группой F.

В [7] показано, что qF не имеет покрытий в решетке квазимногообразий, содержащихся в M. Следствием этого является теорема о том, что qF не имеет независимого базиса квазитождеств в M. К настоящему времени не известно квазимногообразий, отличных от qF, порождённых конечной группой, содержащихся в M и не имеющих независимого базиса квазитождеств. В данной работе анонсировано решение этой задачи.