емкостной сложностью PS (= NPS). В полиномиальном пространстве существуют полные проблемы, к которым полиномиально (по времени) сводятся все проблемы данного класса. Если примером NP-полной проблемы служит класс выполнимых булевых функций, то примером PS-полной проблемы – класс истинных булевых функций с кванторами.

Труднорешаемые задачи, в первую очередь NP-полные, не имеющие полиномиального алгоритма для нахождения оптимальных решений, можно “решать” с помощью приближенных алгоритмов, решение которых не оптимальное, а некоторое приближение к нему, приемлемое на практике.

Библиографический список

1. Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. – Москва, Санкт-Петербург, Киев: Изд. дом “Вильямс”. – 2002. – 528 с.

УДК 579.64

Автомодельное решение задачи о движении газогидрата при изменении температуры

П.В. Гилев, А.А. Папин
АлтГУ, г. Барнаул

Постановка задачи. В настоящее время залежи природных газовых гидратов рассматриваются как потенциальный источник природного газа. Приоритетной является проблема развития технологий его извлечения [1]. Математические модели процессов, связанные с разработкой газогидратов, основаны на моделях тепловой многофазовой фильтрации в деформируемых пористых средах с учетом фазовых переходов и свободных границ.

В настоящей работе рассматриваются вопросы обоснования модельной задачи движения жидкости в деформируемой пористой среде. Изучается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\vec{v}=0,\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=\rho^{-1}div\Sigma,\\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=\left(I-\frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{x}}\right)\vec{v},m\cong m_0\left(1-\frac{1}{2}\nabla\cdot\vec{u}\right),\end{gathered}\qquad(1)$$

$$c_\varepsilon\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla T\right)+\left(\bar{\gamma}T_0+\bar{\lambda}\nabla\cdot\vec{u}\right)\left(\nabla\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla(\nabla\cdot\vec{u})\right)$$
$$+2\bar{\mu}\varepsilon{:}D=\bar{\rho}^{-1}\big(\Sigma{:}D+\nabla(\chi\nabla T)\big)+r.$$
$$\Sigma=(-\gamma(T-T_{\text{н}})+\lambda\nabla\cdot\vec{u}+2\mu\varepsilon)(1-m).$$

Здесь $\rho=\bar{\rho}(1-m)-$ приведенная плотность; $\bar{\rho}-$ истинная плотность среды; $m-$ пористость среды; $\chi-$ коэффициент теплопроводности среды; D – тензор скоростей деформации среды; $\varepsilon-$ тензор Альманси, $\vec{v}-$ скорость среды; $\Sigma-$ тензор напряжений среды; $\vec{u}-$ вектор перемещения твердого скелета; $r-$ источник тепла; $T-$ температура среды; $c_\varepsilon-$ коэффициент теплоемкости; m_0- пористость покоящейся среды; $\lambda,\mu-$ коэффициенты вязкости среды; T_0- начальная температура;$\gamma-$ константа; $\overline{\gamma}=\overline{\rho}^{-1}\gamma$; $\overline{\lambda}=\overline{\rho}^{-1}\lambda$; $\overline{\mu}=\overline{\mu}^{-1}\lambda$. Искомые функции $\rho,\vec{u},\vec{v},m,T$.

Автомодельное решение типа бегущей волны. Предполагается что все искомые функции зависят от одной переменной $\xi=x-\tau t, x\in[-\infty;0]$, $t\in[0;t_0], r=0$. В этом случае система (1) принимает вид:

$$-\tau\frac{d\rho}{d\zeta}+\frac{d}{d\xi}(\rho v)=0,\qquad -\tau\frac{du}{d\xi}=\left(1-\frac{du}{d\xi}\right)v,$$
$$\rho\left(-\tau\frac{dv}{d\xi}+\left(v\frac{dv}{d\xi}\right)\right)=\frac{d\Sigma}{d\xi},\qquad \rho c_\varepsilon\frac{dT}{d\xi}(v-\tau)=\chi\frac{d^2T}{dx^2}, \tag{2}$$
$$m=m_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{du}{d\xi}\right).$$

Граничные условия имеют вид:

$$v(0)=v^+, v(-\infty)=v^-, T(-\infty)=T^-, T(0)=T^+, \tag{3}$$
$$\rho(0)=\rho^+\ \ \rho(-\infty)=\rho^+ .$$

Решением задачи (2) называются непрерывные функции: $\rho(\xi),u(\xi),v(\xi),m(\xi),T(\xi)$, удовлетворяющие уравнениям (2) и граничным условиям (3).

Теорема 1. Существует хотя ты одно решение задачи (2).

Доказательство. Интегрируя первое уравнение (2), получим $\rho(v-\tau)=C_1=$ const. Откуда

$$v=\tfrac{C_1}{\rho}+\tau. \tag{4}$$

Подставляя (4) во второе уравнение (2), получаем

$$u_\xi=\frac{\tau}{C_1}\rho+1. \tag{5}$$

Разделив обе части четвертого уравнения (2) на χ и умножив полученное равенство на exp $(-\frac{C_1 c_\varepsilon \xi}{\chi})$. После интегрирования, получим представление для температуры

$$T = \frac{\chi C_2}{C_1 c_\varepsilon} e^{(-\frac{C_1 c_\varepsilon \xi}{\chi})} + C_3, \tag{6}$$

где C_2, C_3 константы интегрирования.
Подставляя (4) в третье уравнение (2) и интегрируя, получаем

$$v C_1 = \Sigma + C_4, \tag{7}$$

где C_4 константа интегрирования.
Постоянные $C_1, C_2, C_3, C_4, \tau, m^- = m(-\infty), m^+ = m(0), u_\xi^- = \frac{du}{d\xi}(0)$, $u_\xi^+ = \frac{du}{d\xi}(\infty)$ находятся из условий граничных условий (3):

$$C_1 = \frac{(v^- - v^+)\rho^-\rho^+}{\rho^+ - \rho^-}, \qquad \tau = \frac{v^+\rho^+ - v^-\rho^-}{\rho^+ - \rho^-},$$
$$u_\xi^- = \frac{\tau\rho^-}{C_1} + 1, \qquad u_\xi^+ = \frac{\tau\rho^+}{C_1} + 1,$$
$$C_3 = T^-, C_2 = (T^+ - T^-)\frac{c_\varepsilon C_1}{\chi}$$
$$m^- = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\tau\rho^+}{C_1}\right), m^+ = \frac{1}{2}(1 + \frac{\tau\rho^-}{C_2})$$
$$C_4 = C_1 v^+ + (1 - m^+)\left(-\gamma(T^+ - T_н) + \lambda u_\xi^+ + 2\mu u_\xi^+\right),$$
$$C_4 = C_1 v^- + (1 - m^-)\left(-\gamma(T^- - T_н) + \lambda u_\xi^- + 2\mu u_\xi^-\right).$$

Из последний двух равенств следует:

$$C_1(v^- - v^+) - (1 - m^-)\left(-\gamma(T^- - T_н) + \lambda u_\xi^- + 2\mu u_\xi^-\right) + (1 - m^+)\left(-\gamma(T^+ - T_н) + \lambda u_\xi^+ + 2\mu u_\xi^+\right) = 0.$$

Подставим (4)-(6) в (7). В результате элементарных преобразований получим кубическое уравнение относительно ρ:

$$\rho^3\left[\frac{\tau^2}{C_1^2} m_0\left(\mu + \frac{1}{2}\lambda\right)\right] + \rho^2\left[\frac{\tau}{C_1}(\lambda + 2\mu) + \frac{m_0\tau\gamma}{2C_1}(T_н - T)\right] + \rho\left[\left(1 - \frac{m_0}{2}\right)\left(\gamma(T_н - T) + (\lambda + 2\mu)\right) + \tau C_1 + C_4\right] - C_1^2 = 0. \tag{8}$$

Исследуем разрешимость уравнения (8). Постоянные λ, μ обладают свойством $\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$ по [3 стр. 13]. По теореме Виета уравнение (8) имеет хотя бы один положительный корень. Действительно, в приведенном виде свободный член отрицательный, а это возможно только когда существует действительный положительный корень.

Положим:

$$a = \left[\frac{\tau^2}{C_1^2} m_0 \left(\mu + \frac{1}{2}\lambda\right)\right], b = \left[\frac{\tau}{C_1}(\lambda + 2\mu) + \frac{m_0 \tau \gamma}{2C_1}(T_\text{н} - T)\right],$$
$$c = \left[\left(1 - \frac{m_0}{2}\right)\left(\gamma(T_\text{н} - T) + (\lambda + 2\mu)\right) + \tau C_1 + C_4\right], d = -C_1^2.$$

Теорема 2. При условии $3ac > b^2$решение задачи (2) единственно.

Доказательство. Пусть задача (2) имеет два положительных действительных решения p и q. В силу (8) справедливо равенство

$$ap^3 + bp^2 + cp + d = aq^3 + bq^2 + cq + d = 0.$$

Тогда

$$(p - q)[a(p^2 + qp + q^2) + b(p + q) + c] = 0.$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$\Phi(x_1 x_2 x_3) = ax_1^2 + ax_1x_2 + bx_2x_3 + ax_2^2 + bx_1x_3 + x_3^2 c.$$

В условиях теоремы, данная форма положительно определена, причем $\Phi(p, q, 1) = a(p^2 + qp + q^2) + b(p + q) + c > 0$. Следовательно $p = q$.

Работа выполнена при поддержке совместного проекта TUBITAK и РФФИ 20-58- 46009 СТ_а "Нагрузки на инженерные сооружения в морском льду".

Библиографический список

1. Хабиров В.В., Хабиров С.В. Разработка газогидратов современными технологиями // Труды института механики уфимского научного центра РАН 2010. Т.7. С. 202-210.

2. Овсяников Л.И. Введение в механику сплошных сред. Новосибирск, 1977. Т.2. 69 с.

3. Хабиров С.В. Теория поля. Уравнение механики сплошных сред. Уфа, 1994. 42 с.

4. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. – Барнаул, 2009. 220 с.