УДК 517.958

Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде

А.А. Глушкова, А.А. Папин
АлтГУ, г. Барнаул

В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial \Phi s_i \rho_i^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i^0 \Phi s_i u_i) = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial (1-\Phi)\rho_3^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\Phi)\rho_3^0 u_3) = 0, \qquad (2)$$

$$s_i \Phi (u_i - u_3) = -K_0 \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}\left(\frac{\partial p_i}{\partial x} - \rho_i^0 g\right), \qquad (3)$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = -a_1(\Phi) p_e - a_2(\Phi)\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + u_3 \frac{\partial p_e}{\partial x}\right), \qquad (5)$$

$$\mathrm{p_{tot}} = \Phi p_f + (1-\Phi) p_s,\ p_e = p_{tot} - p_f, p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2,$$
$$p_2 = p_1 + p_c(s_1).$$

Данная система описывает одномерное нестационарное движение двухфазной смеси в деформируемой пористой среде [1].
Здесь (x, t) – переменные Эйлера, Ф – пористость, $\overrightarrow{\mathrm{u_i}}$ – скорость i-й фазы (i=1 – вода, i=2 – нефть, i=3 – твердый скелет), $\mathrm{s_i}$ – скорость и насыщенность фаз, $\mathrm{K_0}(\Phi)$-тензор фильтрации, ρ_i^0 – истинная плотность фаз, $\mathrm{p_e}$ – эффективное давление, $\mathrm{p_{tot}}$ – общее давление, $\mathrm{p_f}, \mathrm{p_s}$ – соответственно давления жидкой и твердой фаз, $\rho_{tot} = (1-\Phi)\rho_2^0 + \Phi s_1 \rho_1^0 + \Phi s_2 \rho_2^0$ – плотность среды, $a_1(\Phi), a_2(\Phi)$ -параметры горной породы, $\overline{\mathrm{k_{0i}}}(\mathrm{s_i})$ – относительные фазовые проницаемости μ_i-коэффициент динамической вязкости, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести. Плотности ρ_i^0 принимаются постоянными. Искомыми являются величины Φ, u_i, p_i, s_i, p_s.

Система (1)-(3) близка по структуре системе уравнений двухфазной фильтрации в упругой пористой среде [2], но отличается уравнениями движения твердого скелета. При известной пористости уравнения движения третьей фазы игнорируются и система (1)-(3) совпадает с классической системой Маскета-Леверетта [3,4] и ее аналогами [5,6]. Однофазные задачи для системы (1)-(3) ($\mathrm{s_1} = 1, \mathrm{s_2} = 0$) рассмотрены в

[7]. В [8,9] для (1)-(3) рассмотрена задача поршневого вытеснения Н.Н.Веригина в случае отсутствия капиллярного скачка.

Получим аналитическое решение системы (1)-(3). Будем использовать следующие гипотезы:

(1) жидкости и твердый скелет несжимаемы, т.е., ρ_i^0 – const, i = 1,2,3;

(2) ускорения силы тяжести и капиллярный скачок не равны нулю.

В установившемся движении скорости равны нулю ($u_i = 0,\ i = 1,2,3$), пористости и насыщенности положим постоянными (Φ=Φ^0, s_i=s_i^0 , (Φ^0, s_i^0) $\in$ (0, 1). Тогда (1) и (2) выполняются автоматически. Из (3) следует, что $p_i = A_i x + B_i$ ($i = 1,2$). Из (4) и (5) получим $p_s = p_{tot} = p_f = Cx + D$.

При сделанных предположениях уравнения (1)-(5) выполняются автоматически. Итак, стационарное решение (1)-(5) есть

Φ=Φ^0, s_i=s_i^0 , $u_i = 0$ ($i = 1,2,3$), $p_{tot} = p_f = Cx + D$, $p_i = A_i x + B_i$.

Так как $p_2 = p_1 + p_c$, то при данном стационарном решении функция p_c зависит от (s_1^0, x), иначе не выполняется (2) гипотеза и попадаем в случай, когда ускорения силы тяжести и капиллярный скачок равны нулю. Решение системы (1)-(5) ищется в окрестности стационарного решения в виде

$$u_i = \overline{u_i},\ \ s_1 = s_1^0 + \overline{s_1},\ \ s_2 = s_2^0 + \overline{s_2}\,,\ \ s_2 = s_2^0 + \overline{s_2}\,,\ \ s_1^0 + s_2^0=1,$$
$$p_i = A_i\mathrm{x} + B_i + \overline{p_i}\ (\mathrm{i}=1,2),\ \ \Phi = \Phi^0 + \overline{\Phi}\ (0 \le \Phi^0 + \overline{\Phi} \le 1),$$

где функции $\overline{u_i}$, $\overline{s_i}, \overline{p_i}$, $\overline{\Phi}$ малы и имеют непрерывные производные. Функциональные параметры $K_o(\Phi)$, $k_{oi}(s_i)$, $a_i(\Phi)$ ($i = 1,2$) представимы в виде

$$K_o(\Phi) = K_o(\Phi^0) + K_0'(\Phi^0)\overline{\Phi},$$
$$k_{oi}(s_i) = k_{oi}(s_i^0) + k_{0i}'(s_i^0)\overline{s_i},$$
$$a_i(\Phi) = a_i(\Phi^0) + a_i'(\Phi^0)\overline{\Phi}.$$

Подставляя возмущенное решение в (1)-(5) и отбрасывая нелинейные члены, приходим к следующей линейной системе

$$s_1^0\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial t} + \Phi^0\frac{\partial\overline{s_1}}{\partial t} + \Phi^0 s_1^0\frac{\partial\overline{u_1}}{\partial x} = 0, \qquad (6)$$
$$s_2^0\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial t} + \Phi^0\frac{\partial\overline{s_2}}{\partial t} + \Phi^0 s_2^0\frac{\partial\overline{u_2}}{\partial x} = 0, \qquad (7)$$
$$\frac{\partial(1-\overline{\Phi})}{\partial t} + (1-\Phi^0)\frac{\partial\overline{u_3}}{\partial x} = 0, \qquad (8)$$
$$s_1^0\Phi^0(\overline{u_1} - \overline{u_3}) = -\frac{K_0(\Phi^0)k_{01}(s_1^0)}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial x} +$$

$$\left(\frac{K_0(\Phi^0)k'_{01}(s_1^0)\overline{s_1}}{\mu_1}+\frac{K'_0(\Phi^0)k_{01}(s_1^0)\overline{\Phi}}{\mu_1}\right)\rho_1^0 g, \quad (9)$$

$$s_2^0\Phi^0(\overline{u_2}-\overline{u_3})=-\frac{K_0(\Phi^0)k_{02}(s_2^0)}{\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial x}+$$
$$\left(\frac{K_0(\Phi^0)k'_{02}(s_2^0)\overline{s_2}}{\mu_2}+\frac{K'_0(\Phi^0)k_{02}(s_2^0)\overline{\Phi}}{\mu_2}\right)\rho_2^0 g, \quad (10)$$

$$\frac{\partial\overline{u_3}}{\partial x}=-(a_1(\Phi^0)+a'_1(\Phi^0)\,\overline{\Phi})p_e-a_2(\Phi^0)\frac{\partial p_e}{\partial t},\ \frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=-\rho_{tot}g. \quad (11)$$

Складывая уравнения (6)-(8) получим

$$\overline{u_3}=\frac{\tilde{c}(t)}{1-\Phi^0}-\frac{\Phi^0}{1-\Phi^0}(s_1^0\overline{u_1}+s_2^0\overline{u_2}), \quad (13)$$

где $\widetilde{c(t)}$ – некоторая функция времени. С учетом (13) уравнения (9),(10) можно представить в виде

$$\overline{u_1}=W_1\frac{\partial p_1}{\partial x}+W_2\frac{\partial p_2}{\partial x}+W_3\overline{s_1}+W_4\overline{s_2}+W_5\overline{\Phi}+W_6, \quad (14)$$
$$\overline{u_2}=L_1\frac{\partial p_1}{\partial x}+L_2\frac{\partial p_2}{\partial x}+L_3\overline{s_1}+L_4\overline{s_2}+L_5\overline{\Phi}+L_6. \quad (15)$$

Используя представление для $\overline{p_2}$ вида

$$\overline{p_2}=\overline{p_1}+\alpha\overline{s_1}+A_1x+B_1, \quad (16)$$

перепишем уравнения системы (6)-(11).
Сложив (6) и (7) уравнения и используя представления (14), (15), (16) получим

$$\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial t}+\alpha_1\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2}+\alpha_2\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\alpha_3\frac{\partial\bar{s}_1}{\partial x}+\alpha_4\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x}+\alpha_5=0. \quad (18)$$

Используя (13), (14), (16) из (9) имеем

$$\gamma_1\frac{\partial\overline{p_1}}{\partial x}+\gamma_2\frac{\partial\bar{s}_1}{\partial x}+\gamma_3\overline{s_1}+\gamma_4\overline{\Phi}+\gamma_5=0. \quad (19)$$

Подставив представление (13) из (11) уравнения, получим

$$\alpha_6\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2}+\alpha_7\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\alpha_8\frac{\partial\bar{s}_1}{\partial x}+\alpha_9\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x}+\alpha_{10}(a_1(\Phi^0)+a'_1(\Phi^0)\overline{\Phi})*$$
$$*(a_1(\Phi^0)+a'_1(\Phi^0)\overline{\Phi})\ (C_1\overline{s_1}x+C_2x+D_1\overline{s_1}+\overline{p_1}+B_1). \quad (20)$$

Из (6) уравнения имеем

$$\beta_1\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial t}+\beta_2\frac{\partial^2\overline{p_1}}{\partial x^2}+\beta_3\frac{\partial^2\overline{s_1}}{\partial x^2}+\beta_4\frac{\partial\bar{s}_1}{\partial t}+\beta_5\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x}=0. \quad (21)$$

Систему (17)-(21) сведем к одному уравнению для $\overline{s_1}$

$$\omega_1 \frac{\partial^4 \overline{s_1}}{\partial x^4} + \omega_2 \frac{\partial^3 \overline{s_1}}{\partial x^3} + \omega_3 \frac{\partial^3 \overline{s_1}}{\partial t \partial x^2} + \omega_4 x \frac{\partial^3 \overline{s_1}}{\partial x^3} + \omega_5 \frac{\partial^2 \overline{s_1}}{\partial x^2} + \omega_6 x \frac{\partial^2 \overline{s_1}}{\partial t \partial x} + \omega_7 \frac{\partial^2 \overline{s_1}}{\partial t \partial x} +$$
$$+ \omega_8 x \frac{\partial^2 \overline{s_1}}{\partial x^2} + \omega_9 \frac{\partial \overline{s_1}}{\partial t} + \omega_{10} = 0.$$

Решение будем искать в виде $s_1 = \theta(t)P(x)$. Разделив переменные, получим

$$\frac{\omega_3 P'' + \omega_6 x P' + \omega_9 P}{\omega_1 P'''' + P'''(\omega_2 + \omega_4 x) + P''(\omega_5 + \omega_7 x) + \omega_8 P'} = -\frac{\theta'}{\theta} = -\lambda,$$

где $\lambda - const.$ Уравнение для $\theta(t)$ есть элементарное уравнение 1-го порядка. Очевидно, для устойчивости решения по времени необходимо, чтобы $\lambda < 0$. Для функции P(x) имеем линейное уравнение 4-го порядка. Это уравнение может быть исследовано сведением к системе уравнений 1-го порядка. Таким образом, для нелинейной системы уравнений была исследована задача об устойчивости стационарного решения.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

Библиографический список

1. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. 2015. № 1–2 (85). С.131–140.

2. Ведерников В.В., Николаевский В.Н. Уравнения механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Известия АНСССР. Механика жидкости и газа. 1978. Т.5. С. 165-169.

3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей // Новосибирск: Наука, 1983. – 316.

4. Антонцев С.Н., Папин А.А. Приближенные методы решения задач двухфазной фильтрации // Доклады Академии наук СССР. 1979. Т. 247. № 3. С. 521–525.

5. Папин А.А. Существование решения "в целом" уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси.II. Результаты о разрешимости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2006. Т. 9. № 3 (27). С. 111–123.

6. Папин А.А. Существование решения "в целом" уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси.I. Постановка задачи и вспомогательные утверждения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2006. Т. 9. № 2 (26). С. 116–136.

7. Токарева М.А. Корректность начально-краевых задач для уравнений фильтрации в пороупругих средах: дис. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2018.

8. Папин А.А., Сибин А.Н. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. 2016. № 1 (89). С. 152–156.

9.Веригин Н.Н. О фильтрации растворов и эмульсий в пористой среде // 2-й Всесоюзный съезд по теор. и прикл. мех.: Аннот. докл. – М.: Наука, 1964. – С. 50.

УДК 519.67

Задача об охране картинной галереи в случае ортогонального многоугольника на целочисленной решетке

А.В. Гринкевич, Д.Н. Оскорбин

АлтГУ, г. Барнаул

На сегодняшний день задача об охране картинной галереи является одной из хорошо изученных задач в области вычислительной геометрии. В реальном мире она возникает как задача об охране художественной галереи минимальным количеством средств наблюдения, которые наблюдают за всей галереей. В вычислительной геометрии план галереи представлен в виде простого многоугольника, а средство наблюдения – точкой внутри него.

Существует теорема, принадлежащая В. Хваталу, утверждающая, что для охраны простого многоугольника из n вершин всегда достаточно и иногда необходимо $\left[\frac{n}{3}\right]$ охранников.

В данной работе изучается случай, когда план галереи представлен в виде ортогонального многоугольника, т.е. соседние стороны пересекаются под прямыми углами. Вершины многоугольника находятся в узлах целочисленной решетки, а стороны параллельны линиям сетки, т.е. план галереи – клетчатая фигура, каждая клетка – зал. Средство наблюдения или охранник находится в середине зала и ограничено в перемещении ходом ладьи, при этом не выходя за план