

галереи. Необходимо найти наименьшее число охранников, которое может потребоваться для охраны любой галереи из  $n$  залов ( $n > 1$ ), чтобы все залы оказались под присмотром.

Теорема. Для охраны описанного выше многоугольника из  $n$  залов ( $n > 1$ ) всегда достаточно, а иногда необходимо  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  охранников.

Для создания алгоритма расстановки охранников была реализована идея «жадного» алгоритма. Каждый охранник занимает позицию, которая позволяет наблюдать за наибольшим количеством залов, учитывая, что, возможно, есть залы, находящиеся под присмотром других охранников.

Возможно, данный алгоритм не позволяет найти оптимальную расстановку средств наблюдения. Следующая задача состоит в поиске оптимального алгоритма.

### **Библиографический список**

1. Берг М., Чеонг О., Кревельд М., Овермарс М. Вычислительная геометрия. Алгоритмы и приложения. – М.: ДМК Пресс, 2017. – С 438.
2. O'Rourke, Joseph. Art Gallery Theorems and Algorithms // Oxford University Press. – 1987.
3. V. Chvatal. A combinatorial theorem in plane geometry // Journal of Combinatorial Theory, Series B. – 1975. – Т. 18. – С. 39–41.
4. S. Fisk. A short proof of Chvatal's watchman theorem // Journal of Combinatorial Theory, Series B. – 1978. – Т. 24, вып. 3. – С. 374.
5. Satyan L. Devadoss, Joseph O Rourke. Discrete and Computational Geometry. – Princeton University Press, 2011. – p. 255.

**УДК 519.6**

## **Оболочки для сумм Минковского в секторной интервальной арифметике с центральной формой записи**

***В.С. Дронов***

*АлтГУ, г. Барнаул*

Тот факт, что поле комплексных чисел невозможно упорядочить согласованно с умножением и сложением, мешает естественности введения интервала в комплексном случае. Та же интуитивная идея ограниченной неопределённости или небольшого отклонения для элементов  $\mathbb{C}$  может приводить к использованию разных базовых

объектов. Так, если важен модуль отклонения, то за интервал естественно брать круг на комплексной плоскости (все элементы, мало отклоняющиеся от центра), если рассматривать запись числа в алгебраической форме, то интервалами естественно становятся прямоугольники на комплексной плоскости, если же рассматривать комплексные числа в показательной форме, то базовым объектом естественно выбирать сектор. Если задать некоторый интервал неотрицательных действительных чисел  $\mathbf{r}$  (жирным шрифтом здесь и далее обозначаются интервалы), и задающий углы интервал действительных чисел не шире  $2\pi$  (как правило, для всех элементов берётся конкретный промежуток; например, в [1] – от 0 до  $2\pi$ ), то секторным интервалом будет

$$\langle \mathbf{r}, \phi \rangle = \{z \in \mathbb{C} : z = r e^{i\varphi}, r \in \mathbf{r}, \varphi \in \phi\}$$

Множество таких интервалов далее будет обозначаться  $IC_{\text{sec}}$ . Элемент  $IC_{\text{sec}}$  описывается четырьмя действительными числами. В [1] для этого используются границы интервалов по радиусу и углу, но, как будет показано ниже, более удобной формой является задание интервалов через середину и половину ширины (далее  $\text{mid}$  и  $\text{rad}$ ). Подобная запись ниже будет называться центральной формой, в то время как классическая – граничной.

Дополнительной проблемой, характерной для комплексных интервальных арифметик, является усиленный по сравнению с действительным случаем "эффект обёртывания". Из-за свойств арифметических операций над комплексными числами, ни в одной из упомянутых выше интервальных арифметик все арифметические операции разом не являются "удобными", то есть имеется операция, для которой множество поточечных результатов операции над представителями входных интервалов не является интервалом данной арифметики, и приходится вводить минимальный содержащий его интервал-оболочку.

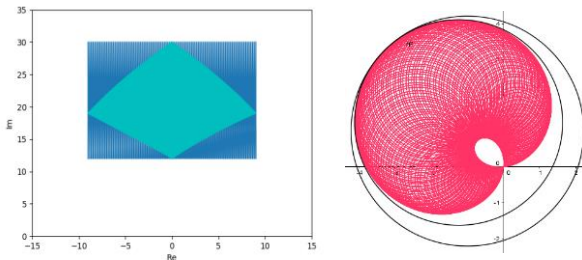


Рисунок 1 – Примеры интервалов-оболочек для умножения в прямоугольной и круговой интервальной арифметиках.

На рисунке 1 слева – произведение  $[1,2]+[i,2i]$  на  $[3,4]+[3i,4i]$  (поточечное произведение выделено зелёным), справа – произведение  $\langle 1 + 0i, 1 \rangle$  и  $\langle i - 1, 0, 9 \rangle$ , оболочка в классической круговой интервальной арифметике – больший внешний круг (рисунок взят из [2]).

В случае  $IC_{sec}$  произведение секторов не требует взятия оболочки, но сумма Минковского для двух элементов  $IC_{sec}$  не является сектором. Дополнительной проблемой является появление в формулах перевода суммы в показательную форму тригонометрических функций, из-за которых пропадает монотонность, дополнительно усложняя взятие оболочки. Если для прямоугольной комплексной арифметики экстремальные значения результата достигаются на крайних значениях входных интервалов, и для получения оболочки достаточно перебрать их комбинации, для  $IC_{sec}$  это в общем случае неверно:

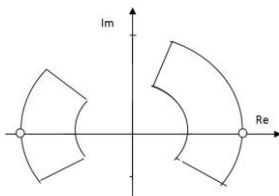


Рисунок 2– Два секторных интервала.

На рисунке 2 изображены два секторных интервала. Сумма выделенных значений в каждом даст 0, то есть нижнее возможное значение радиуса для сектора-суммы. Ни одна комбинация угловых точек секторов при этом не даёт чисел с нулевым модулем.

В [1] рассматривается выявление возможных представителей входных секторов, на которых достигаются экстремальные значения угла и радиуса, и приводятся алгоритмы для получения оболочки в случае суммы. Два из трёх алгоритмов, переписанные под более экономную систему обозначений, приводятся ниже (формально для четырёх границ секторного интервала в [1] используются четыре алгоритма, но поиск нижней и верхней границы оболочки по углу отличается только направлением вращения, то есть знаками в нескольких формулах).

Входными данными являются два секторных интервала, заданных через пары интервалов в граничной форме каждый:

$$S_i = \langle [r_i^-, r_i^+], [\varphi_i^-, \varphi_i^+] \rangle.$$

При этом  $\varphi_i^-$  подразумевается углом от 0 до  $2\pi$ , граница  $\varphi_i^+$  – превышающей  $\varphi_i^-$ , но отличающейся не более, чем на  $2\pi$ . (В случае,

если секторный интервал пересекает действительную ось на комплексной плоскости, верхняя граница может превышать  $2\pi$  и, вообще говоря, быть сколь угодно близкой к  $4\pi$ ).

За  $\theta$  обозначается разность угловых интервалов  $S_1$  и  $S_2$ :

$$\theta = [\varphi_1^- - \varphi_2^+, \varphi_1^+ - \varphi_2^-]$$

$$\text{Функция } \rho(r_1, r_2, \alpha) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\alpha}$$

Алгоритм нахождения верхней границы оболочки по радиусу имеет вид:

Алгоритм 1: MaxR ( $S_1, S_2$ )

1. if  $0 \in \theta$ , return  $\rho(r_1^+, r_2^+, 0)$
2. if  $\sin\theta^+ \geq 0$ , return  
 $\max\{\rho(r_1^+, r_2^+, \theta^-), \rho(r_1^-, r_2^+, \theta^-), \rho(r_1^+, r_2^-, \theta^-)\}$
3. if  $\sin\theta^- \leq 0$ , return  
 $\max\{\rho(r_1^+, r_2^+, \theta^+), \rho(r_1^-, r_2^+, \theta^+), \rho(r_1^+, r_2^-, \theta^+)\}$
4.  $\rho_{m1} = \max\{\rho(r_1^+, r_2^+, \theta^+), \rho(r_1^-, r_2^+, \theta^+), \rho(r_1^+, r_2^-, \theta^+)\}$   
 $\rho_{m2} = \max\{\rho(r_1^+, r_2^+, \theta^-), \rho(r_1^-, r_2^+, \theta^-), \rho(r_1^+, r_2^-, \theta^-)\}$   
return  $\max\{\rho_{m1}, \rho_{m2}\}$

Алгоритм нахождения нижней границы оболочки по радиусу имеет вид:

Алгоритм 2: MinR ( $S_1, S_2$ )

1. if  $r_1^+/r_2^- \leq 1$  swap ( $S_1, S_2$ )
2. if  $\pi \in \theta$   
if  $r_2^+ \geq r_1^-$  return 0  
return  $\rho(r_1^-, r_2^+, \pi)$
3. if  $\sin\theta^+ \leq 0$ , return  $\min\{\rho(r_1^-, r_2^+, \theta^-), \rho(r_1^-, r_2^-, \theta^-),$   
 $\rho\left(r_1^-, \frac{-r_1^-}{\cos(\theta^-)}, \theta^-\right), \rho\left(\frac{-r_2^-}{\cos(\theta^-)}, r_2^-, \theta^-\right)\}$
4. if  $\sin\theta^- \geq 0$ , return  $\min\{\rho(r_1^-, r_2^+, \theta^+), \rho(r_1^-, r_2^-, \theta^+),$   
 $\rho\left(r_1^-, \frac{-r_1^-}{\cos(\theta^+)}, \theta^+\right), \rho\left(\frac{-r_2^-}{\cos(\theta^+)}, r_2^-, \theta^+\right)\}$
5.  $\rho_{m1} = \min\{\rho(r_1^-, r_2^+, \theta^+), \rho(r_1^-, r_2^-, \theta^+),$   
 $\rho\left(r_1^-, \frac{-r_1^-}{\cos(\theta^+)}, \theta^+\right), \rho\left(\frac{-r_2^-}{\cos(\theta^+)}, r_2^-, \theta^+\right)\}$   
 $\rho_{m2} = \min\{\rho(r_1^-, r_2^+, \theta^-), \rho(r_1^-, r_2^-, \theta^-),$   
 $\rho\left(r_1^-, \frac{-r_1^-}{\cos(\theta^-)}, \theta^-\right), \rho\left(\frac{-r_2^-}{\cos(\theta^-)}, r_2^-, \theta^-\right)\}$

return min  $\{\rho_{m1}, \rho_{m2}\}$

В такой форме алгоритмы не требуют расчёта более восьми (в наихудшем случае) значений радиусов, что, конечно, лучше возможных 27 в случае лобового подхода. Тем не менее, в такой форме они обладают явными недостатками.

Как легко заметить, задействованный в алгоритме интервал  $\theta$  в предлагаемом определении зависит от порядка слагаемых, что означает, что при перестановке интервалов в сумме может измениться ветка, по которой следует алгоритм, потенциально меняя сложность получения или точность сравниваемых значений. Собственно, симметричность веток 2 и 3 в алгоритме 1 и 3 и 4 в алгоритме 2 вызвана именно необходимостью отслеживать симметричные случаи по  $\theta$ . При этом показатель  $\theta$  представляет, по сути, просто сдвиг углов раствора интервалов 1 и 2 относительно друг друга. При подобном геометрическом взгляде на показатель, во-первых, становится видна симметричность, а во-вторых, становится понятно, что пересчёт по правилам обращения с углами в [1], подразумевающий возможные границы до  $4\pi$  избыточен.

Точно так же не приводимый тут алгоритм 3, позволяющий определять границы оболочки по углу, идейно основан на рассмотрении экстремумов функции

$$f(r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2) = \arctg\left(\frac{r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2}{r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2}\right)$$

(в упрощённом виде сводимой к экстремуму функции трёх переменных, так как значения  $r_1$  и  $r_2$  по отдельности не важны для границ результатов по углу, важно лишь их отношение), что тоже наводит на мысль, что интервал возможных значений  $\theta$  (задающих возможную разность  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ) в  $2\pi$  излишен, так как для рассмотрения поведения тангенса достаточно промежутка длины  $\pi$ .

Естественным кандидатом на более удобное представление алгоритмов является переформулировка исходных данных в центральной форме и работа с ними в новых терминах. Будем задавать 4 числа, определяющие  $S \in IC_{\text{sec}}$  в форме

$$\langle \text{rad } r, \text{mid } r, \text{rad } \phi, \text{mid } \phi \rangle$$

Дополнительным преимуществом подобной записи является отсутствие необходимости работать с двумя витками окружности, которые возникали в записи углов в оригинале. В случае, если интервал  $\phi$  представляет собой полное кольцо (т.е.  $\text{rad } \phi = \pi$ ), за  $\text{mid } \phi$  принимается 0.

Назовём угловым зазором между  $S_1$  и  $S_2$  величину

$$Zz_{\varphi}(S_1, S_2) = |mid \varphi_2 - mid \varphi_1| - rad \varphi_1 - rad \varphi_2$$

(так как задачей является приведение алгоритмов для вычисления оболочки суммы в симметричный вид, без ограничения общности можно считать, что за интервал 2 берётся интервал с условием  $mid \varphi_2 \geq mid \varphi_1$  и модуль в первой части выражения не обязателен; тем не менее, чтобы не создавать путаницы с возможной сменой порядка интервалов в алгоритме MinR, определение дано с модулем).

Аналогично определяется радиальный зазор между  $S_1$  и  $S_2$ , обозначаемый далее  $Zz_r(S_1, S_2)$ .

Условие  $0 \in \theta$  из первого алгоритма по определению зазора выше оказывается эквивалентно условию  $Zz_{\varphi}(S_1, S_2) \leq 0$ .

Условия  $\sin \theta^+ \geq 0$  и  $\sin \theta^- \leq 0$  из алгоритма 1 с использованием записи выше могут быть представлены единым условием:

$0 < Zz_{\varphi}(S_1, S_2) < \pi$ . Аналогично сводятся к одному условию требования веток 3 и 4 для алгоритма 2. Таким образом, вместо условий с тригонометрическими функциями в изначальном варианте, значение  $Zz_{\varphi}(S_1, S_2)$  сразу задаёт одну из веток алгоритма MaxR. Хотя симметричность выражения для зазора на первый взгляд не даёт возможности выбора из подвергнутых слиянию веток алгоритмов, фактически разница между ними в направлении смещения интервалов относительно друг друга, то есть в знаке выражения  $mid \varphi_2 - mid \varphi_1$ . Так как граничные точки интервала  $\Phi$  в центральной записи отличаются только знаком перед  $rad \varphi$ , и использование множителя  $sgn(mid \varphi_2 - mid \varphi_1)$  напрямую в аргументах функции  $\rho(r_1, r_2, \alpha)$ , позволяет получать требуемые наборы значений.

С учётом этого, алгоритм 1 может быть переписан в форме:

Алгоритм 1а: MaxR ( $S_1, S_2$ )

1. if  $Zz_{\varphi}(S_1, S_2) \leq 0$ , return  $\rho(r_1^+, r_2^+, 0)$
2. if  $0 < Zz_{\varphi}(S_1, S_2) < \pi$ , return

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \rho(r_1^+, r_2^+, sgn(mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_{\varphi}(S_1, S_2)), \\ \rho(r_1^-, r_2^+, sgn(mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_{\varphi}(S_1, S_2)), \\ \rho(r_1^+, r_2^-, sgn(mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_{\varphi}(S_1, S_2)) \end{array} \right\}$$

3. return

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \rho \left( r_1^+, r_2^+, Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \rho \left( r_1^-, r_2^+, Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left( r_1^+, r_2^-, Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \rho \left( r_1^+, r_2^+, -Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left( r_1^-, r_2^+, -Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \rho \left( r_1^+, r_2^-, -Zz_\varphi (S_1, S_2) \right) \end{array} \right\}$$

Алгоритм 2 же с учётом перечисленного выше может быть записан как:

Алгоритм 2а: MinR ( $S_1, S_2$ )

1. if  $r_1^+ / r_2^- \leq 1$  swap ( $S_1, S_2$ )
2. if  $0 \leq \pi - Zz_\varphi (S_1, S_2) \leq 2\text{rad } \varphi_1 + 2\text{rad } \varphi_2$   
if  $Zz_r (S_1, S_2) \leq 0$  return 0  
return  $\rho(r_1^-, r_2^+, \pi)$
3. if  $-\pi < Zz_\varphi (S_1, S_2) < 0$ , return

$$\min \left\{ \begin{array}{l} \rho \left( r_1^-, r_2^+, \text{sgn}(\text{mid } \varphi_2 - \text{mid } \varphi_1) Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left( r_1^-, r_2^-, \text{sgn}(\text{mid } \varphi_2 - \text{mid } \varphi_1) Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left( r_1^-, \frac{-r_1^-}{\cos(\text{sgn}(\text{mid } \varphi_2 - \text{mid } \varphi_1) Zz_\varphi (S_1, S_2))} \right), \\ \rho \left( \frac{-r_2^-}{\cos(\text{sgn}(\text{mid } \varphi_2 - \text{mid } \varphi_1) Zz_\varphi (S_1, S_2))}, r_2^- \right) \end{array} \right\}$$

4. return

$$\min \left\{ \begin{array}{l} \rho \left( r_1^-, r_2^+, Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left( r_1^-, r_2^-, Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left( r_1^-, \frac{-r_1^-}{\cos \left( Zz_\varphi (S_1, S_2) \right)}, Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left( \frac{-r_2^-}{\cos \left( Zz_\varphi (S_1, S_2) \right)}, r_2^-, Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left( r_1^-, r_2^+, -Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left( r_1^-, r_2^+, -Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left( r_1^-, \frac{-r_1^-}{\cos \left( -Zz_\varphi (S_1, S_2) \right)}, -Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left( \frac{-r_2^-}{\cos \left( -Zz_\varphi (S_1, S_2) \right)}, r_2^-, -Zz_\varphi (S_1, S_2) \right) \end{array} \right\}$$

### Библиографический список

1. Candau Y., Raissi T., Ramdani N., Ibos L. Complex interval arithmetic using polar form //Reliable Computing. – 2006. – №1 – p. 1-20.
2. Дронов В.С., Кузнецов Н.А. Об эффекте обёртывания для круговых интервалов// Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования: сборник научных статей международной конференции (Барнаул, 14–17 ноября 2017 г.). – Барнаул, 2017. – С. 265-270.