

$$\frac{x^3 + 2x - 3}{(x + 3)^4} = \frac{1}{x + 3} - \frac{9}{(x + 3)^2} + \frac{29}{(x + 3)^3} - \frac{36}{(x + 3)^4}$$

Библиографический список

1. Винберг Э.Б. Алгебра многочленов. – М., 1980. – 176 с.
2. Севостьянова С.А., Мартынова Е.В., Нигматулин Р.М., Шумакова Е.О. Формирование проектных умений будущих учителей математики при выполнении методических проектов / Современные наукоёмкие технологии. 2019. № 10-2. С. 360-365.
3. Шумакова Е.О., Миссаль В.В. Применение технологии учебных проектов при изучении профильных математических дисциплин / Современные проблемы науки и образования. 2019. № 6. С. 3.
4. Шумакова Е.О., Севостьянова С.А., Вагина М.Ю. Формирование профессиональных компетенций бакалавров при изучении дисциплины "Алгебра" / Современные проблемы науки и образования. 2019. № 5. С. 45.

УДК 574.34:575.174.4

Особенности динамики модели эволюции двухвозрастной популяции

В.С. Жданов¹, О.Л. Жданова², Е.Я. Фрисман³

¹ДВФУ, г. Владивосток; ²ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток;

³ИКАРП ДВО РАН, г. Биробиджан

Простейшие модели лимитированных популяций, построенные на классических для математической биологии уравнениях, демонстрируют удивительно сложную динамику [1-3]. При этом эффект мультистабильности, который выражается в одновременном сосуществовании в системе различных предельных режимов динамики, а переход к ним определяется выбором начальных условий [4], позволяет объяснить случаи смены динамических режимов, наблюдаемые в реальных биологических популяциях (напр., [5-7]).

Эколого-генетические модели обладают естественной мультистабильностью, т.к. весьма часто имеют несколько генетически различных равновесий и переход между ними в ряде параметрических областей определяется начальными условиями [8-9]. Этот эффект имеет важное эволюционное значение, т.к. направление эволюции популяции в таком

случае определяется набором начальных условий, или случайных факторов.

Данная работа посвящена выявлению спектра возможных динамических режимов и изучению областей мультистабильности в модели популяции с двумя стадиями развития, плотностным лимитированием на ранней стадии развития, а ее репродуктивный потенциал определяется на генетическом уровне [10]. Рассматривается действие естественного отбора по адаптивному признаку, кодирующемуся одним диаллельным локусом с аллелями A и a . Каждому генотипу поставлен в соответствие коэффициент W_{ij} – приспособленность ij -ого генотипа зародышей. Выжившие в результате естественного отбора зародыши к следующему $(n+1)$ сезону размножения составят младший возрастной класс (x_{n+1}) неполовозрелых особей. Выживаемость неполовозрелых особей определяется линейным плотностно-зависимым отбором и не зависит от их генотипов. Выживаемость старшего возрастного класса c постоянна и не зависит от их генотипов:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n y_n \\ y_{n+1} = x_n(1-x_n) + cy_n \\ q_{n+1} = \frac{p_n(W_{AA}p_n + W_{Aa}(1-p_n))}{a_n} \\ p_{n+1} = \frac{x_n(1-x_n)q_n + cy_n p_n}{x_n(1-x_n) + cy_n} \end{cases}, \quad (1)$$

где p_n – частота аллеля A в старшем возрастном классе; q_n – частота аллеля A в младшем возрастном классе; $a_n = W_{AA}p_n^2 + 2W_{Aa}p_n(1-p_n) + W_{aa}(1-p_n)^2$ – репродуктивный потенциал старшего возрастного класса (или средняя приспособленность зародышей); y_n и x_n – численность половозрелых и неполовозрелых особей, соответственно.

Анализ возможных динамических режимов модели (1) проведен с помощью разработанной программы Gen Seacher для построения карты динамических режимов. В каждой точке (соответствующей одному пикселю) плоскости параметров программа считает 30000 итераций системы (1), далее по последним 50 шагам определяется период колебаний траектории и генетическое состояние популяции (монофорфизм или полиморфизм), далее точка параметрической плоскости окрашивается в цвет, характеризующий генетический состав популяции и полученный период. Пример карт динамических режимов в области мультистабильности модели (1) приведен на рисунке 1 (фрагменты рисунка

отличаются только выбором начальных условий). Как видно из рисунка 1, результат эволюции, а именно каким будет генетическое состояние популяции, не зависит от начальных условий, но ими определяется динамический режим, который установится в системе.

Кроме того, обнаружены области мультистабильности, где результат эволюции определяют не только внутривидовые параметры, но и начальное состояние популяции: в зависимости от начальных условий система (1) оказывается в генетически различных состояниях и при этом характер ее динамики может изменяться. Наряду с неподвижной точкой (динамически устойчивой либо неустойчивой) могут существовать и циклы различной длины (или хаотические аттракторы), которые тоже оказываются притягивающими для рассматриваемой системы из некоторых областей начальных условий.

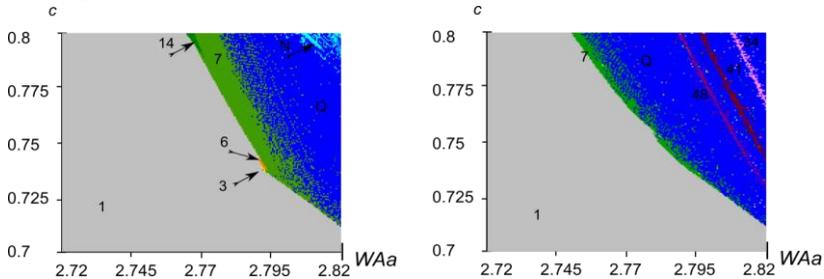


Рисунок 1 – Карты динамических режимов модели (1) в плоскости параметров (W_{Aa} , c). Числа соответствуют длине наблюдаемого цикла в полиморфной популяции, Q – квазипериодическая динамика, N – область недопустимых значений. Фиксированы значения параметров и начальные условия: $W_{AA} = 1.1$, $W_{Aa} = 1.05$, $x_0=0.1$ и $y_0=0.1$; (слева) – $q_0=0.3$ и $p_0=0.5$; (справа) – $q_0=0.91$ и $p_0=0.99$

Работа выполнена в рамках государственных заданий Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН, а также при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 18-04-00073, 18-51-45004 ИНД_а).

Библиографический список

1. Шапиро А.П. К вопросу о циклах в возвратных последовательностях // Управление и информация. – 1972. – №. 3. – С. 96–118.

2. May R.M. Biological populations with non-overlapping generations: stable points, stable cycles and chaos // *Science* – 1974. – V.186.– P. 645–647.

3. Шапиро А.П., Луппов С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. – М.: Наука, 1983. – 132 с.

4. Безручко Б.П., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П. Виды колебаний, мультистабильность и бассейны притяжения аттракторов симметрично связанных систем с удвоением периода // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. – 2002. – Т. 10. – №. 4. – С. 47–68.

5. Фрисман Е.Я., Кулаков М.П., Ревуцкая О.Л., Жданова О.Л., Неверова Г.П. Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // *Компьютерные исследования и моделирование*. – 2019. – Т. 11. – №. 1. – С. 119–151.

6. Kausrud K.L., Mysterud A., Steen H., Vik J.O., Østbye E., Cazelles B., Stenseth N.C. Linking climate change to lemming cycles // *Nature*. – 2008. – Т. 456. – №. 7218. – С. 93-97.

7. White T.C.R. What has stopped the cycles of sub-Arctic animal populations? Predators or food? // *Basic and applied ecology*. – 2011. – Т. 12. – №. 6. – С. 481–487.

8. Жданова О.Л., Фрисман Е.Я. Проявление мультирежимности в простейшей эколого-генетической модели эволюции популяций // *Генетика*. – 2016. – Т. 52. – №. 8. – С. 975–984.

9. Неверова Г.П., Жданова О.Л., Фрисман Е.Я. Возникновение сложных режимов динамики численности в ходе эволюции структурированной лимитированной популяции // *Генетика* – 2020. – Т. 56. – №. 6. – С. 714–725.

10. Фрисман Е.Я., Жданова О.Л. Эволюционный переход к сложным режимам динамики численности двухвозрастной популяции // *Генетика*. – 2009. – Т. 45. – №. 9. – С. 1277–1286.