Библиографический список

1. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра, Мир, 1976.
2. Жиров А. О.,Жиров О. В., Кренделев С. Ф Статья: Безопасные облачные вычисления с помощью гоммофной криптографии.
3. Лидовский В.В. Теория информации, Москва, 2004.
4. Ромащенко А.Е., Румянцев А.Ю., Шень А. Заметки по теории кодирования. 2-е изд., испр. и доп. М.: МЦНМО, 2017.

УДК 512.622

Симметрические многочлены

А.С. Жукабаева, М.А. Дульцева, Л.В. Истомина
Южно-уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск

Фундаментальные знания теории многочленов составляют значительную часть дисциплины алгебра и необходимы в будущей профессиональной деятельности и при прохождении педагогической практики [1]. Теория многочленов служит основой для проведения научно-исследовательских работ бакалавров, применяется в реализации учебных проектов [2-3].

Очень важным разделом в теории многочленов являются специальные многочлены, называемые симметрическими. Они используются при решении некоторых алгебраических уравнений высшего порядка и некоторых систем алгебраических уравнений. Дадим его определение.

Многочлен $f(x_1 \dots x_n)$ называется симметрическим, если для любой подстановки номеров переменных он не изменяется [4].

$$f(x_1 \dots x_n) = f\left(x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n)}\right), \forall\tau$$

Например, многочлен $f(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 x_2 x_3 + x_1 {x_2}^2 x_3 + x_1 x_2 {x_3}^2$ является симметрическим, а многочлен $g(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 x_2 x_3 + x_1 {x_2}^2 x_3$ не является симметрическим, т.к $g(x_2, x_3, x_1) = {x_2}^2 x_3 x_1 + x_2 {x_3}^2 x_1 \neq g(x_1, x_2, x_3)$.

Отдельно рассматривают элементарные симметрические многочлены:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sigma_1,$$
$$x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n = \sigma_2,$$
$$x_1x_2x_3 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sigma_3, \text{ и так далее}$$
$$x_1x_2x_3 \dots x_n = \sigma_n,$$
$$\sigma_k = \sum x_{i_1} \cdots x_{i_k} \text{(сумма произведений по } k \text{ переменных без повторений)}$$

Теорема (о симметрическом многочлене). Симметрический многочлен над кольцом целостности можно выразить через элементарные симметрические над тем же кольцом [5].

Приведем алгоритм, который позволяет выразить симметрический многочлен через элементарные симметрические:

1. Выделим в многочлене однородные части $a{x_1}^{i} \dots {x_n}^{i_n}$, $i_1 + \dots + i_n = k$ и будем работать с каждой частью отдельно.

2. Для k выпишем все наборы $s_1 + s_2 + \dots + s_n = k$ невозрастающих последовательностей.

3. Для каждого набора составим произведение вида

$$ {\sigma_1}^{s_1 - s_2} \dots {\sigma_n}^{s_n} \tag{1} $$

4. Будем искать fв виде суммы с неопределенными коэффициентами произведений вида (1), придавая переменным разные значения.

$$ f = \sum_l \underbrace{a_l}_{\text{неопр.коэф}-\text{т}} \underbrace{{\sigma_1}^{s_1 - s_2} \dots {\sigma_n}^{s_n}}_{*} $$

5. Найдем коэффициенты, решая систему уравнений.

Используя данный алгоритм, рассмотрим следующий пример:

Выразить через основные симметрические многочлен

$$ f(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^3 x_2 x_3 + x_1 {x_2}^3 x_3 + x_1 x_2 {x_3}^3 + x_1 {x_2}^2 + {x_1}^2 x_2 + {x_1}^2 x_3 + x_1 {x_3}^2 + {x_2}^2 x_3 + x_2 {x_3}^2. $$

Многочлен $f(x_1, x_2, x_3)$ является неоднородным симметрическим многочленом. Для того, чтобы выразить его через основные симметрические, нужно данный многочлен разбить предварительно в сумму однородных симметрических. Сумма всех представлений и есть представление данного симметрического неоднородного многочлена в виде многочлена от элементарных симметрических.

В результате разбиения получаем два многочлена:

$$ f_1(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^3 x_2 x_3 + x_1 {x_2}^3 x_3 + x_1 x_2 {x_3}^3 $$

$$ f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 {x_2}^2 + {x_1}^2 x_2 + {x_1}^2 x_3 + x_1 {x_3}^2 + {x_2}^2 x_3 + x_2 {x_3}^2. $$

Выразим через основные симметрические каждый многочлен отдельно.

Многочлен $f_1(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^3 x_2 x_3 + x_1 {x_2}^3 x_3 + x_1 x_2 {x_3}^3$ является однородным симметрическим многочленом степени 5. Наша цель – выразить $f_1(x_1, x_2, x_3)$ через элементарные симметрические многочлены от 3-х переменных: $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$, $\sigma_3 = x_1 x_2 x_3$.

Его высший (в смысле лексикографического упорядочения) член совпадает с ${x_1}^3 x_2 x_3$. Лексикографическая степень многочлена

$f_1(x_1, x_2, x_3)$ равна (3,1,1). Выпишем всевозможные наборы (k_1, k_2, k_3) с натуральными k_1, k_2, k_3, удовлетворяющие условиям:

1. $k_1 + k_2 + k_3 = 5$,
2. $k_1 \geq k_2 \geq k_3$,
3. Набор (k_1, k_2, k_3) меньше или равен (3,1,1) в смысле лексикографического порядка.

Для каждого набора (k_1, k_2, k_3) укажем симметрический многочлен вида ${\sigma_1}^{\alpha_1}{\sigma_2}^{\alpha_2}{\sigma_3}^{\alpha_3}$, где $\alpha_1 = k_1 - k_2, \alpha_2 = k_2 - k_3, \alpha_3 = k_3$.

Получаем, что набору $(3, 1, 1)$ соответствует ${\sigma_1}^2\sigma_3$, а набору $(2, 2, 1)$ соответствует $\sigma_2\sigma_3$. В итоге имеем: $f_1 = {\sigma_1}^2\sigma_3 + b\sigma_2\sigma_3$.

Дальнейшие рассуждения оформим в таблицу 1.

Таблица 1 – Поиск значений для f_1

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	2	1	0	0
1	1	1	3	3	1	3

Составим и решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ 0 = 0, \\ 9 + 3b = 3. \end{cases} \Rightarrow b = -2.$$

$f_1 = {\sigma_1}^2\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3$.

Далее рассмотрим многочлен $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1{x_2}^2 + {x_1}^2x_2 + {x_1}^2x_3 + x_1{x_3}^2 + {x_2}^2x_3 + x_2{x_3}^2$.

$k = 3$ −степень многочлена.

Высший член многочлена равен ${x_1}^2x_2$. Выпишем наборы невозрастающих последовательностей и укажем симметрический многочлен вида (1): получаем, что набору $(2, 1, 0)$ соответствует $\sigma_1\sigma_2$, а набору $(1, 1, 1)$ соответствует σ_3. В итоге имеем: $f_2 = \sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$.

Дальнейшие рассуждения оформим в таблицу 2.

Таблица 2 – Поиск значений для f_2

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	2	1	0	2
1	1	1	3	3	1	6

Составим и решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ 2 = 2, \\ 9 + b = 6. \end{cases} \Rightarrow b = -3.$$

$f_2 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$.

Получаем

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1, x_2, x_3) + f_2(x_1, x_2, x_3) = {\sigma_1}^2\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3.$$

Ответ: ${\sigma_1}^2\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет» по договору о выполнении НИР «Изучение групп центральных единиц целочисленных групповых колец» заявка № ШК-20-04-17/1 от 17.04.2020.

Библиографический список

1. Шумакова Е.О., Севостьянова С.А., Вагина М.Ю. Формирование профессиональных компетенций бакалавров при изучении дисциплины "Алгебра" // Современные проблемы науки и образования. 2019. № 5. С. 45.
2. Шумакова Е.О., Миссаль В.В. Применение технологии учебных проектов при изучении профильных математических дисциплин // Современные проблемы науки и образования. 2019. № 6. С. 3.
3. Севостьянова С.А., Мартынова Е.В., Нигматулин Р.М., Шумакова Е.О. Формирование проектных умений будущих учителей математики при выполнении методических проектов // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 10-2. С. 360-365.
4. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учебное пособие для педагогических институтов. – М., 1979. – 485с.
5. Винберг Э.Б. Алгебра многочленов. – М., 1980. – 72с.

УДК 57:51-76

Исследование пространственно-временной модели

В.В. Журавлева, А.А. Выприцкая

АлтГУ, г. Барнаул

Метод математического моделирования позволяет представить основные закономерности в структуре либо в процессах лесных экосистем в виде конкретных математических моделей, тем самым повышая эффективность научных исследований и снизить временные и материальные издержки на наблюдения. Математические модели зачастую позволяют обнаружить, что за видимостью случайных