УДК 514.765.2

О собственных значениях оператора Риччина четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с четырехмерной подгруппой изотропии

П.Н. Клепиков, О.П. Хромова
АлтГУ, г. Барнаул

Задача об установлении связей между топологией и кривизной риманова многообразия является одной из важных проблем римановой геометрии. Связь между кривизной Риччи, одномерной кривизной и топологией однородного риманова пространства изучалась в работах Дж. Милнора [1], В.Н. Берестовского [2], Ю.Г. Никонорова, Е.Д. Родионова и В.В. Славского [3].

Спектр оператора кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли исследовался Дж. Милнором [1]. В случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой им были найдены возможные сигнатуры оператора Риччи. Позднее О. Ковальский, С. Никшевич решили задачу о предписанных значениях спектра оператора Риччи на трехмерных метрических группах Ли, а также трехмерных римановых локально-однородных пространствах [4].

В случае левоинвариантных лоренцевых метрик на группах Ли известна работа Дж. Кальварусо, О. Ковальского [5], в которой исследуется задача о существовании трехмерной группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и заданными значениями оператора Риччи.

Данная работа посвящена изучению собственных значений оператора Риччи на четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с четырехмерной подгруппой изотропии.

Для данного исследования мы будем использовать классификацию четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с четырехмерной подгруппой изотропии, полученную в работе [6]. Далее мы будем ссылаться на случаи из данной классификации по их номеру. Например, перечислим номера всех четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с четырехмерной подгруппой изотропии, которые приведены в данной классификации: $4.1^1.1$, $4.1^2.1$, $4.2^1.1$, $4.2^1.2$, $4.2^2.1$, $4.2^2.2$, $4.2^2.3$, $4.2^3.1$, $4.2^3.2$, $4.3^1.1$, $4.3^1.2$.

В соответствии с результатами работы [7], многообразия $4.1^1.1$, $4.1^2.1$, $4.2^1.2$, $4.2^2.3$, $4.2^3.2$, $4.3^1.2$ являются плоскими для любой инвариантной (псевдо)римановой метрики на них, а многообразие $4.3^1.1$ имеет нулевой тензор Риччи для любой инвариантной (псевдо)римановой метрики на нем. Следовательно, собственные значения оператора Риччи на данных многообразиях всегда равны нулю, а оператор Риччи всегда имеет диагональный вид.

Далее, с помощью алгоритмов, приведенных, например, в работе [8], для каждого оставшегося случая вычислим оператор Риччи. Во всех случаях он будет иметь диагональный вид. Полученные собственные значения приведены в таблице 1 вместе с сигнатурой метрического тензора для каждого случая.

Таблица 1 – собственные значения оператора Риччи на четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с четырехмерной подгруппой изотропии

№	Сигнатура метрического тензора	Собственные значения оператора Риччи
$4.1^1.1$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	0,0,0,0
$4.1^2.1$	(3,1) при любом $\alpha_{4,4} > 0$	0,0,0,0
$4.2^1.1$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	$-\frac{6}{\alpha_{2,4}}, -\frac{6}{\alpha_{2,4}}, -\frac{6}{\alpha_{2,4}}, -\frac{6}{\alpha_{2,4}}$
$4.2^1.2$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	0,0,0,0
$4.2^2.1$	(4,0) при любом $\alpha_{4,4} > 0$	$\frac{6}{\alpha_{4,4}}, \frac{6}{\alpha_{4,4}}, \frac{6}{\alpha_{4,4}}, \frac{6}{\alpha_{4,4}}$
$4.2^2.2$	(4,0) при любом $\alpha_{4,4} > 0$	$-\frac{6}{\alpha_{4,4}}, -\frac{6}{\alpha_{4,4}}, -\frac{6}{\alpha_{4,4}}, -\frac{6}{\alpha_{4,4}}$
$4.2^2.3$	(4,0) при любом $\alpha_{4,4} > 0$	0,0,0,0
$4.2^3.1$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	$-\frac{6}{\alpha_{2,4}}, -\frac{6}{\alpha_{2,4}}, -\frac{6}{\alpha_{2,4}}, -\frac{6}{\alpha_{2,4}}$
$4.2^3.2$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	0,0,0,0
$4.3^1.1$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	0,0,0,0
$4.3^1.2$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	0,0,0,0

Из вышеприведенной таблицы следует следующая

Теорема. *Пусть $(G/H, g)$ — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с четырехмерной подгруппой изотропии. Тогда оператор ρ может быть оператором Риччи многообразия $(G/H, g)$ для некоторой инвариантной метрики тогда и только тогда, когда оператор ρ диагонализируем и имеет одно* *собственное значение кратности* 4. *При этом, если дополнительно потребовать, что* g *— лоренцева метрика (сигнатуры* $(3{,}1)$*), то оператор* ρ *обязан быть нулевым. Другие сигнатуры метрического тензора не накладывают дополнительных ограничений на оператор* ρ.

В дальнейшем планируется продолжить данную работу для четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с подгруппой изотропии произвольной размерности.

Библиографический список

1. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – V. 21. – P. 293–329.

2. Berestovskii V.N. Homogeneous Riemannian manifolds of positive Ricci curvature // Mathematical Notes. – 1995. – V. 55, No. 3. – P. 905–909.

3. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия. – 2006. – Т. 37. – С. 1–78.

4. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedicata. – 1996. – No. 1. – P. 65–72.

5. Calvaruso G., Kowalski O. On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds // Cent. Eur. J. Math. – 2009. – V. 7(1). – P. 124–139.

6. Komrakov B.B. Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces // Lobachevskii J. Math. – 2001. – V. 8. – P. 33–165.

7. Клепиков П.Н. Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Схоутена–Вейля // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. – 2019. – № 5. – С. 24–50.

8. Хромова О.П. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях // Известия АлтГУ. – 2017. – №1(93). – С. 140–143.