Библиографический список

1. Friedman A. Cancer as Multifaceted Disease // Math. Model. Nat. Phenom., 2012 7 1, p. 3–28.

2. Pettet G.J., Please C.P., Tindall M.J., S. McElwain D.L. The migration of cells in multicell tumor spheroids // Bull. Math. Biol., 2001 63, p. 231–257.

3. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред (учебное пособие для студентов НГУ) часть 1 // Новосибирск: НГУ, 1977, С. 70.

4. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления // Москва: "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1979, С. 288.

УДК 519.63

Численная реализация модели двухфазной неравновесной фильтрации

Д.А. Омариева[1], Д.Р. Байгереев[2], М.Н. Мадияров[2]

[1]Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан;

[2]Восточно-Казахстанский государственный университет им. С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан

Динамика протекания фильтрационных течений многофазной жидкости нелинейным образом зависит как от структурно-механических свойств жидкости, так и свойств окружающего скелета. Исследование процесса течения многофазной жидкости в пористой среде наиболее полно проведено в предположении о локальном фазовом равновесии. Однако в реальных пластовых условиях существенное влияние на процесс фильтрации имеет свойство запаздывания насыщенности фазы, изучение которого привело к возникновению теории неравновесной фильтрации. Необходимость учета данного явления при разработке нефтяных месторождений обсуждается во многих работах [1, 2].

В настоящей работе рассматривается модель двухфазной неравновесной фильтрации с обобщенным законом неравновесности вида

$$\tau(x)\frac{\partial s}{\partial t} - \tau(x)\nu(x)\frac{\partial \eta}{\partial t} = \eta - s, \tag{1}$$

введенным в работе [2]. Здесь s и η – истинная и эффективная насыщенности, τ – время замещения, ν – степень неравновесности. Решение задачи двухфазной неравновесной фильтрации сводится к решению системы уравнений относительно давления, истинной и эффективной насыщенностей с соответствующими начальными и граничными условиями.

Уравнение для определения поля давления является нелинейным уравнением эллиптического типа. Для его решения использован смешанный метод конечных элементов с элементами Brezzi-Douglas-Marini [3]. Построен итерационный метод Пикара, на каждой итерации которого требуется решить систему линейных алгебраических уравнений с сильно разряженной, симметричной, но не положительно определенной матрицей. Для решения системы уравнений применен метод, основанный на LDLt-факторизации матрицы [4].

Уравнение для истинной насыщенности относится к уравнению типа конвекции-диффузии с преобладанием конвекции. Для решения уравнения применен противопотоковый метод конечных элементов [5, 6], суть которого заключается в добавлении в уравнение искуственной вязкости с параметром стабилизации, зависящим от числа Пекле. Для определения эффективной насыщенности используется уравнение (1), которое решалось стандартным методом Галеркина.

Проведены вычислительные эксперименты для двумерной задачи с модельными параметрами. Дальнейшие исследования будут направлены на решение задачи двухфазной неравновесной фильтрации с более общим законом неравновесности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (ИРН AP08053189).

Библиографический список

1. Файзулин Т.А. Математическое моделирование релаксационных явлений при течении неоднородной жидкости в пористых средах. Дис. … канд. физ.-мат. – Уфа, 2007.

2. Ермагамбетов Т. К. Разрешимость и численное исследование модели неравновесной фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с обобщенным законом неравновесности. Дис. … канд. физ. мат. – Алматы, 2010.

3. Zhang S. X. An efficient implementation of Brezzi-Douglas-Marini mixed finite element method in matlab // ArXiV. – 2015. – No. 1508.06445v1. – P. 1–19.

4. Baboulin M., Dongarra J., Remy A., Tomov S., Yamazaki I. Solving dense symmetric indefinite systems using GPU // Concurrency and Computation. – 2017. – Vol. 29, No. 9. – P. 1–17.

5. Liu X., Zhang J. Comparison of supg with bubble stabilization parameters and the standard SUPG // Abstract and Applied Analysis. – 2014. – Vol. 2014, No. 364675. – P. 1–8.

6. Benedetto M., Berrone S., Borio A., Pieraccini S., Scialo S. Order preserving supg stabilization for the virtual element formulation of advection–diffusion problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2016. – Vol. 311, No. 1. – P. 18–40.

УДК 579.64

Конформно-киллинговы поля на симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности

Д.Н. Оскорбин, Т.А. Андреева

АлтГУ, г. Барнаул

Симметрические лоренцевы многообразия порядка k являются обобщением симметрических многообразий, классифицированных Кахеном и Уоллахом в работе [4]. Симметрические лоренцевы многообразия порядков 2 и 3 изучены в работах Галаева, Алексеевского, Сеновиллы, см. подробнее в [1, 2, 3]. И в данной работе изучаются конформно-киллинговы поля на лоренцевых симметрических эйнштейновых многообразия.х в размерности 4.

Лемма 1. Существует система координат (V, X, Y, U), в которой метрику четырехмерного симметрического неразложимого лоренцева эйнштейнова многообразия M можно записать в виде [4]:

$$\boldsymbol{ds^2 = dUdV + dX^2 + dY^2 + (a(X^2 - Y^2) + 2bXY)dU^2}$$

Векторное поле K на многообразии M называется конформно-киллинговым, если $L_K g = \mathrm{f}(\rho) g$, где $L_K g$ производная Ли метрического тензора вдоль поля K.

Рассматривая уравнение на конформно-киллингово поле в системе координат леммы 1, получаем теорему:

Теорема 1. Если K – конформно киллингово векторное поле на неразложимом эйнштейновом симметрическом четырехмерном лоренцевом многообразии M, то есть выполняется условие $L_K g = \mathrm{f}(\rho) g$, $\mathrm{f}(\rho)$ – ограниченная гладкая функция на многообразии M, то функция $\mathrm{f}(\rho)$ является константой.