УДК 517

О линейном движении геометрических объектов

Е.А. Плотникова[1], А.Н. Саженков[2]

[1]Новосибирский государственный университет,
г. Новосибирск; [2]АлтГУ, г. Барнаул

Решение геометрических задач на линейное движение объектов объединяет в себе несколько основных соображений-идей, на которых базируется общий принцип решения задач. Последовательное увеличение количества условий и требований к рассматриваемым объектам позволяет демонстрировать востребованность ранее полученных результатов и изученных методов исследования [1-4].

Определение. Скажем, что объект движется линейно, если существует такой вектор $\vec{v}$, что за время *t* объект сдвигается на вектор $t \cdot \vec{v}$.

Далее приводятся базовые задачи, элементарные решения которых, позволяют решать в последствии совсем не простые задачи.

(*a*) Точки *A*, *B* двигаются линейно. Докажите, что и середина отрезка движется линейно.

Действительно, пусть $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$ – начальное положение точек *A* и *B*, $\vec{u}$ и $\vec{v}$ – их скорости. В момент времени *t* положение середины определяется соотношением $\left(\vec{a}_0 + \vec{b}_0\right)/2 + t \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right)/2$.

(*b*) Две прямые двигаются линейно. Докажите, что их точка пересечения движется линейно.

Пусть *X* –точка пересечения прямых *l* и *m*. Вектора $\overrightarrow{XA}$ и $\overrightarrow{XC}$ – вектора движения прямых *m* и *l*, соответственно. *B* и *D* положения точки *X* на прямых *m* и *l* в момент *t*. Для решения задачи достаточно заметить, что *X*, *Y*, *Z* на одной прямой и $\overrightarrow{XZ} = t \cdot \overrightarrow{XY}$.

(*c*) Три прямые двигаются линейно. Докажите, что достаточно двух моментов времени, в которые они пересекаются в одной точке, чтобы утверждать, что они всегда пересекаются в одной точке.

Пусть точка пересечения первой и второй прямой движется по закону $\vec{a}_0 + t \cdot \vec{u}$, второй и третьей – $\vec{b}_0 + t \cdot \vec{v}$. По условию существуют два момента, когда $\vec{a}_0 + t_1 \cdot \vec{u} = \vec{b}_0 + t_1 \cdot \vec{v}$ и $\vec{a}_0 + t_2 \cdot \vec{u} = \vec{b}_0 + t_2 \cdot \vec{v}$. Отсюда легко выводится, что $\vec{a}_0 = \vec{b}_0$ и $\vec{u} = \vec{v}$.

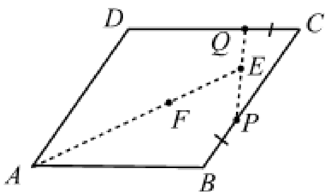
(*d*) Точка A покоится на месте, а точки B и C двигаются линейно и параллельно друг другу. Докажите, что достаточно двух моментов времени, в которые они лежат на одной прямой, чтобы утверждать, что они всегда лежат на одной прямой.
Это легко устанавливается через подобие. Можно считать, что в начальный момент они на прямой и в некоторый момент тоже.

(*e*) Точки A, B, C двигаются линейно. Докажите, что достаточно трех моментов времени, в которые они лежат на одной прямой, чтобы утверждать, что они всегда лежат на одной прямой.

(*a)** Точки A, B двигаются линейно, точка C находится на отрезке [A, B] и постоянно делит его в одном и том же отношении. Докажите, что при этом точка C движется линейно.
Пусть $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$ начальное положение точек A и B, $\vec{u}$ и $\vec{v}$ их скорости, $\vec{c}_0 = \alpha \cdot \vec{a}_0 + \beta \cdot \vec{b}_0$ начальное положение точки C. В момент времени t положение точек A и B определяется соотношениями $\vec{a}_0 + t \cdot \vec{u}$ и $\vec{b}_0 + t \cdot \vec{v}$. Рассмотрим положение точки C на движущемся отрезке: $\alpha \cdot \left(\vec{a}_0 + t \cdot \vec{u}\right) + \beta \cdot \left(\vec{b}_0 + t \cdot \vec{v}\right) = \vec{c}_0 + t \cdot \left(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}\right)$. Следовательно, точка C движется линейно.

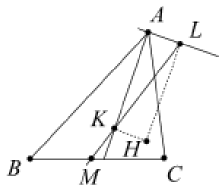
Рассмотрим теперь несколько задач, демонстрирующих успешное решение при применении базовых результатов.

Задача 1. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба.



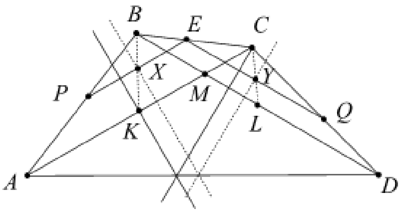
Пусть точка P линейно двигается к точке C, точка Q линейно двигается к точке D с той же скоростью. В силу свойства (a) точка E–середина отрезка PQ двигается линейно. Определим точку F на AE так, что она делит AE в отношении 2:1 от A. Поскольку точка A неподвижна, точка F движется линейно. Остается заметить, что в начальный момент $F = B \in BD$ и при $Q = D$ также $F \in BD$. Значит, всегда.

Задача 2. Из ортоцентра H треугольника ABC опустили перпендикуляры на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла A. Докажите, что прямая, соединяющая основания опущенных перпендикуляров, проходит через середину BC.



Пусть A, B – фиксированы, C линейно движется по прямой AC. Рассмотрим поведение H. Во-первых, H остается на прямой BH, во-вторых, прямая, содержащая высоту, проведенную из C, движется линейно, наконец, точка пересечения этих двух прямых движется линейно. Отсюда ясно, что K, L, M движутся линейно. В силу свойства (*e*) достаточно найти три момента, когда они на одной прямой. Первый: $C = A$, здесь $A = K = L$, M середина AB – итог все точки на AB. Второй: $CA = AB$, здесь K, L, M лежат на биссектрисе угла A. Третий: точка C находится с другой стороны от точки A и $CA = AB$, здесь K, L, M снова лежат на биссектрисе угла A.

Задача 3. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M, причем $\angle AMD = 120°$, $AM = MD$. На стороне BC выбрана произвольная точка E, через нее проведены прямые, параллельные диагоналям, которые пересекают четырехугольник второй раз в точках P и Q. Докажите, что центр описанной окружности треугольника PEQ лежит на прямой AD.



Пусть E линейно двигается на BC, вместе с ней линейно двигаются прямые EP и EQ, точки P и Q, точки X и Y – середины отрезков EP и EQ, вместе с ними перпендикуляры в X и Y к EP и EQ, наконец, линейно движется точка пересечения этих перпенди-куляров. Достаточно заметить, что два раза эта точка оказалась на AD. Этими моментами, например, являются $E = B$ и $E = C$. На рисунке показан момент $E = C$. С одной стороны, $E \to C$, $Y \to C$, перпендикуляр из Y к EQ переходит в перпендикуляр из C на DM. С другой стороны, $E \to C$, $P \to A$, $X \to K$ – середина AC. Остальное очевидно.

Библиографический список

1. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2009. Заключительные этапы. – М.: МЦНМО. 2010. – 552 с.

2. Заславский А.А., Пермяков Д.А., Скопенков А.В., Скопенков М.Б., Шаповалов А.В. Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду. – М.: МЦНМО. 2009. – 488 с.

3. Медников Л.Э., Шаповалов А.В. Турнир городов: мир математики в задачах. – М.: МЦНМО. 2012. – 480 с.

4. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Геометрический факультатив-практикум в научно-исследовательской работе старшеклассников и студентов младших курсов // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. – Барнаул: 2017. – № 3. – С. 34-37.

УДК 519.6

Численное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии плоской упругой области в программном комплексе Abaqus

Н.С. Поморов, А.В. Устюжанова
АлтГУ, г. Барнаул

В настоящее время существует большое количество специализированных компьютерных пакетов для решения инженерных задач. Одним из них является программный комплекс Simulia Abaqus, предназначенный для многоцелевого междисциплинарного анализа [1-2]. Комплекс широко используется как в научно-исследовательской деятельности, так и различных сферах производства.

Работа программного комплекса основана на методе конечных элементов, который является одним из эффективных численных методов, применяемых для решения задач механики деформируемого твердого тела.

Abaqus имеет свободно распространяемую версию Abaqus Student Edition, которая включает в себя модули Abaqus/CAE, Abaqus/Standart, Abaqus/Explicit, полную документацию к программе и набор тестовых задач. Это позволяет использовать данный пакет в учебных целях и дает возможность студентам знакомиться с новыми достижениями в разработке комплекса. Ограничением версии Abaqus Student Edition является использование не более 1000 элементов и узлов для построения конечно-элементной модели.

Программный комплекс Abaqus организован по модульному принципу. Пакет состоит из двух основных модулей (решателей) – Abaqus/Standart и Abaqus/Explicit, а также включает пре-постпроцессор Abaqus/CAE.

Модуль Abaqus/Standard основан на неявной формулировке метода конечных элементов, предназначен для решения традиционных задач