УДК 514.765.2

О δ – защемленности биинваринтных римановых метрик положительной секционной кривизны компактных связных группы Ли с векторным кручением

Е.Д. Родионов, О.П. Хромова
АлтГУ, г. Барнаул

Одной из важных проблем римановой геометрии является задача об установлении связей между кривизной и топологией риманова многообразия, и, в частности, влияния знака секционной кривизны на топологическое строение риманова многообразия. В этом направлении хорошо известны следующие теоремы римановой геометрии: теорема Адамара–Картана о полном односвязном римановом многообразии неположительной секционной кривизны, теорема М. Громова о римановом многообразии неотрицательной кривизны Риччи [1], теорема сравнения углов треугольника А.Д. Александрова-В.А. Топоногова, теорема о сфере, экстремальные теоремы в римановой геометрии, ряд других результатов [2]. Особое значение в данных исследованиях имеет вопрос о влиянии δ – защемленности римановых метрик положительной секционной кривизны на геометрическое и топологическое строение риманова многообразия. Наиболее исследован данный вопрос в однородном римановом случае. Если секционная кривизна $K\sigma > 0$, то однородное риманово многообразие либо диффеоморфно КРОСПу (компактному симметрическому пространству ранга один), либо одному из пространств Алоффа-Берже-Уоллача, каждое из которых не гомеоморфно ни одному из симметрических пространств [3-5]. В случае неположительной секционной кривизны хорошо известны результаты работ [6,7]. Другие результаты о секционной кривизне однородных римановых многообразий содержатся в обзорах [8,9].

В настоящей работе исследуются римановы многообразия, метрическая связность которых является связностью с векторным кручением. В данный класс связностей попадает связность Леви-Чивиты. Хотя тензор кривизны этих связностей не обладает симметриями тензора кривизны связности Леви-Чивиты, но представляется возможным определить секционную кривизну [10]. Показано, что функция δ – защемленности секционной кривизны компактной связной группы Ли G с биинвариантной римановой метрикой и связностью с векторным кручением принимает значения $\delta(||V||) \in (0, 1]$.

Приведем необходимые определения и факты.

Пусть *(M, g)* – риманово многообразие, ∇^g – связность Леви-Чивиты, ∇ – связность с векторным кручением, определяемая по формуле

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X,$$

где V – некоторое фиксированное векторное поле, X, Y – произвольные векторные поля. Определим секционную кривизну в точке $p \in M$ по формуле *K(X,Y) =R(X,Y,X,Y)*, где *R(X,Y,Z,U)=g(R(X,Y)Z,U)* и $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z -$ тензор кривизны, {X,Y} – ортонормальный базис. Как показано в [10], это определение корректно.

Введем понятие δ – защемленности секционной кривизны K_σ на связном компактном римановом многообразии (M, g) положительной секционной кривизны в точке $p \in M$, как отношение минимального и максимального значений функции секционной кривизны в этой точке на множестве всех двумерных направлений: $\delta(p) = K_{min}/K_{max}$.

Пусть далее *(M, g) = (G, g)* – связная компактная группа Ли G с биинвариантной римановой метрикой g. Тогда справедливы

Лемма. *Пусть (G, g) – связная компактная группа Ли G с биинвариантной римановой метрикой g, ∇ – связность с векторным кручением. Тогда имеет место формула*

$$K(X,Y) = \frac{1}{4}||[X,Y]||^2 + ||V||^2(\cos^2\varphi - \sin^2\psi),$$

где φ и ψ углы между X, Y и V соответственно.

Теорема. *Пусть (G, g) – компактная связная группа Ли G с биинвариантной римановой метрикой g, ∇— связность с векторным кручением. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Если секционная кривизна K > 0, то универсальная накрывающая группы G изоморфна SU(2). Более того, для таких групп Ли K> 0 в том и только том случае, если ||V||<1/2.

2. Функция δ – защемленности секционной кривизны принимает значения $\delta(||V||) \in (0, 1]$.

Библиографический список

1. Громов М. Громов М. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.

2. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.

3. Berger M. Les varietes riemannienes homogenes normales a courbure strictement positive // Ann. Sc. Norm. Pisa. 1961. V. 15.

4. Wallach, N.R. Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature // Ann. Math. 1972. V. 2(96). P. 277–295.

5. Bérard Bergery, L. Les variétés riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impaire à courbure strictement positive // J. Math. Pures Appl. // 1976. V. 55. P. 47–67.

6. Алексеевский Д.В. Однородные римановы пространства отрицательной кривизны // Матем. сб. 1975. Т. 96(138), № 1. С. 93–117.

7. Bérard Bergery, L.: Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1978. V. (4)11, P. 543–576.

8.Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – V. 21. – P. 293–329.

9. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия. – 2006. – Т. 37. – С. 1–78.

10. Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. О секционной кривизне метрических связностей с векторным кручением// Известия АлтГУ. – 2020. – №1(111). – С. 124–127.

УДК 517.9 + 51-76

Эффективные характеристики механической системы «щетинистая структура – вязкая жидкость»

С.А. Саженков[1], Е.В. Саженкова[2]

[1]ИГиЛ СО РАН, Новосибирск, АлтГУ, Барнаул;

[2]НГУЭУ, Новосибирск

1. Введение. В настоящей заметке излагаются новые результаты о свойствах эффективных механических характеристик усредненной модели взаимодействия слабо сжимаемой вязкой жидкости (или газа) и погруженной в нее двухуровневой щетинистой структуры. Эта модель была построена авторами ранее (см. [1]-[3]) с помощью методов теории гомогенизации, исходя из базовых уравнений микроструктуры. Она естественным образом обобщает хорошо известную систему К.-Х. Хоффмана, Н.Д. Боткина и В.Н. Старовойтова [4], сконструированную в случае одноуровневой структуры, и в приложениях может быть использована, например, в описании аэродинамики в окрестности листа растения, в моделировании поверхности эпителия кровеносных сосудов