4. Hoffmann K.-H., Botkin N.D., Starovoitov V.N. Homogenization of interfaces between rapidly oscillating fine elastic structures and fluids // SIAM J.Appl. Math. – 2005. – Vol. 65, no.3. – P. 983–1005.

УДК 517.972.5 + 51-72

Аппроксимация решения нестационарной односторонней задачи диффузии-абсорбции

***Т.В. Саженкова*[1]*, С.А. Саженков*[2,3]**
[1]*АлтГУ, Барнаул;* [2]*ИГиЛ СО РАН, НГУ, Новосибирск*
[3]*Хэйлунцзянский ун-т, Харбин*

1. Аннотация. Доклад посвящён исследованию начально-краевой задачи для нестационарного нелинейного уравнения диффузии-абсорбции с ограничением значений диффузионного потока и однородными начальными и граничными условиями. Изучается семейство приближённых решений, получаемых с помощью метода штрафа с применением интегрального оператора штрафа А. Каплана. Доказывается, что семейство приближённых решений сильно сходится к решению исходной задачи в анизотропном пространстве Бохнера при стремлении малого параметра регуляризации к нулю. Затем в результате систематического изучения структуры оператора штрафа устанавливается свойство равномерной аппроксимации в пространстве непрерывных по совокупности переменных функций. Настоящее исследование является развитием работ [1-3], более точно, их продолжением на нестационарный случай.

2. Постановка и разрешимость задачи. Рассматривается начально-краевая задача для нестационарного уравнения диффузии-абсорбции с односторонним ограничением на диффузионный поток и однородными начально-краевыми условиями.

Задача N-D-A. В пространственно-временном цилиндре $G_T \coloneqq \Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ и $T = const > 0$ – заданный момент времени, требуется найти функцию $u = u(\boldsymbol{x},t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\partial_t u - \mathrm{div}_x\,(\mu(t)\,\boldsymbol{J}) + |u|^{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{2}} u = f, \tag{1a}$$

в котором

$$\boldsymbol{J} \in \partial\Phi(\nabla_x u), \qquad \Phi(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{p}\int_\Omega Q(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}, Q(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} |\boldsymbol{\tau}|^p, |\boldsymbol{\tau}| \le 1, \\ +\infty, |\boldsymbol{\tau}| > 1, \end{cases} \tag{1b}$$

однородному граничному условию

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad t \in (0,T], \tag{1c}$$

и однородному начальному условию

$$u|_{t=0} = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{1d}$$

В постановке задачи N-D-A $p \in (1,+\infty)$ – заданный постоянный показатель; $\mu = \mu(t)$ – заданная гладкая функция (коэффициент диффузии), такая, что $\mu(t) \geq \mu_0 = const > 0$; $f \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ – заданный функционал; $W^{-1,p'}(\Omega)$ $(p^{-1} + (p')^{-1} = 1)$ – пространство, сопряжённое к пространству Соболева $W_0^{1,p}(\Omega)$. Нормы в $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ и $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ вводятся стандартно. Соотношения (1b) означают, что при каждом $t \in [0,T]$ диффузионный поток $\mu(t)\boldsymbol{J}$ является элементом субдифференциала $\partial(\mu(t)\Phi)$ функционала $(\mu(t)\Phi)$: $\boldsymbol{\tau} \mapsto \frac{\mu(t)}{p}\int_\Omega Q(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}$ в точке $\boldsymbol{\tau} = \nabla_x u$. Заметим, что $\mu(t)\Phi$ при всех $t \in [0,T]$ является дифференцируемым в смысле Гато отображением на множестве

$$M \coloneqq \{\boldsymbol{\tau}\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}^d - \text{измеримая функция}, \qquad |\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})| \leq 1\ \} \subset L^p(\Omega)^d$$

и его производная по Гато $\mu(t)\Phi'(\boldsymbol{\tau})$ определяется формулой

$$\langle \mu(t)\Phi'(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{v}\rangle = \int_\Omega \mu(t)|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})|^{p-2}\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{v} \in L^p(\Omega)^d \tag{2}$$

Здесь и далее через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначаются скобки двойственности между $W_0^{1,p}(\Omega)$ и $W^{-1,p'}(\Omega)$, то есть через $\langle\Psi,\psi\rangle$ обозначается значение какого-либо функционала $\Psi \in W^{-1,p'}(\Omega)$ на элементе $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Решение задачи N-D-A понимается в обобщённом смысле.

Обобщённым решением (о.р.) задачи N-D-A называется функция $u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, удовлетворяющая оценке

$$|\nabla_x u| \leq 1 \ \text{ почти всюду в } G_T \tag{3a}$$

и вариационному неравенству

$$\int_0^s \langle \partial_t\varphi(t) - f(t), \varphi(t) - u(t)\rangle dt$$
$$+ \int_0^s \int_\Omega \left(\mu(t)|\nabla_x u|^{p-2}\, \nabla_x u \cdot \nabla_x(\varphi - u) + |u|^{p-2}u(\varphi - u)\right) d\boldsymbol{x}dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\varphi(\boldsymbol{x},s) - u(\boldsymbol{x},s)|^2 d\boldsymbol{x} \quad \forall s \in [0,T] \tag{3b}$$

для любой пробной функции $\varphi \in L^{p'}(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ такой, что $\partial_t\varphi \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$, $\varphi(\boldsymbol{x},0) = 0$ и $|\nabla_x\varphi| \leq 1$ почти всюду в G_T.

Из хорошо известных положений выпуклого анализа и теории вариационных неравенств для монотонных операторов [4, глава 3, §§ 6.1-6.3] следует, что при любом заданном $f \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ задача N-D-A имеет единственное обобщённое решение в указанном выше смысле.

3. Оператор штрафа А. Каплана. В приложениях часто бывает полезно определить решение односторонней задачи вида (1) приближённо с помощью решения задач безусловной оптимизации. Такую возможность даёт метод штрафа. Настоящий доклад посвящён вопросу построения приближённых решений задачи N-D-A методом штрафа с помощью оператора штрафа с внутренней регуляризацией, предложенного А. Капланом и получившего широкое применение при изучении нелинейных задач с ограничениями [5-7].

Оператор штрафа А. Каплана $\beta_\varepsilon^{(k)}$ при фиксированных значениях $\varepsilon > 0$ и $k \geq 0$ определяется формулой

$$\langle\beta_\varepsilon^{(k)}(\varphi),\psi\rangle = \\ = \int_\Omega \left(1 + \frac{|\nabla_x\varphi|^p - 1}{\sqrt{(|\nabla_x\varphi|^p - 1)^2 + \varepsilon^{2+k}}}\right)|\nabla_x\varphi|^{p-2}\,\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\psi d\boldsymbol{x}$$

$$\forall\, \varphi,\psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{4}$$

Начально-краевую задачу для сильно нелинейного дифференциального уравнения

$$\partial_t u_\varepsilon - \mathrm{div}_x(\mu(t)|\nabla_x u_\varepsilon|^{p-2}\nabla_x u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta_\varepsilon^{(k)}(u_\varepsilon) + |u_\varepsilon|^{p-2}u_\varepsilon = f,$$

$$u_\varepsilon \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \quad \varepsilon > 0, \tag{5}$$

с начальным условием (1d) назовём *задачей с приближённым штрафом (по А. Каплану), ассоциированной с задачей N-D-A.*

Первый основной результат работы состоит в том, что *при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *и для любого заданного* $f \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ *задача (5), (1d) имеет единственное обобщённое решение* $u_\varepsilon = u_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ и что *семейство решений* $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *сходится к решению u задачи N-D-A сильно в* $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ *при* $\varepsilon \searrow 0$. Обоснование этого результата является, за исключением несущественных деталей, стандартным. Оно проводится сочетанием методов монотонности и компактности для решения нелинейных краевых задач, в целом следуя изложению в [4, главы 2 и 3].

4. Свойство равномерной аппроксимации. Конструкция оператора штрафа $\beta_\varepsilon^{(t)}$ содержит в себе следующую особенность: заметно, что дробное выражение в скобках под знаком интеграла в (4) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ — это приближенное значение $\mathrm{sign}(\theta)$ в точке $\theta = |\nabla_x \varphi|^p - 1$, не превосходящее по модулю единицы и имеющее знак величины θ. Благодаря этому, удаётся установить интересный результат о равномерной сходимости семейства решений $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ к u, который является вторым основным результатом работы. Сформулируем его ниже в виде теоремы.

Теорема N-U. (О равномерной сходимости.) *Для любого* $\delta > 0$ *найдутся число* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) \in (0,1)$ *и замкнутое множество* $\Xi^\delta \subset G_T$, $meas\ \Xi^\delta > (meas\ \Omega)T - \delta$, *такие, что* $u_\varepsilon \in C_{x,t}^{\vartheta,0}(\Xi^\delta)$ $\forall \vartheta \in [0,1)$, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* u_ε *сходится к* u *равномерно в* $C\big(\Xi^\delta\big)$ *при* $\varepsilon \searrow 0$.

Работа второго соавтора (С.А. Саженкова) поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (код проекта III.22.4.2) и РФФИ (грант № 18-01-00649).

Библиографический список

1. Sazhenkova T.V. and Sazhenkov S.A. Kaplan's penalty operator in approximation of a diffusion-absorption problem with a one-sided constraint // Siberian Electron. Math. Rep. – 2019. – Vol. 16. – P. 236-248.

2. Саженкова Т.В., Саженков С.А. Аппроксимация решения односторонней задачи анизотропной диффузии-абсорбции // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. Вып. 4. / гл. ред. Е.Д. Родионов. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2018. – С. 15-24.

3. Саженкова Т.В., Саженков С.А. Равномерная аппроксимация решения односторонней задачи диффузии-абсорбции методом штрафа А. Каплана // МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием. – Барнаул: Изд-во Алт. унта, 2019. – С. 62-65.

4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

5. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной оптимизации. – Новосибирск: Наука, 1981. – 183 с.

6. Griffin J.D. and Kolda T.G. Nonlinearly constrained optimization using heuristic penalty methods and asynchronous parallel generating set search // Appl. Math. Research eXpress. – 2010. – Vol. 2010(1). – P. 36-62.

УДК 514.765.2

Применение универсальных математических пакетов при исследовании кривых

А.А. Самыкова, О.П. Хромова
АлтГУ, г. Барнаул

В последнее время все чаще для решения научно-практических задач применяются универсальные математические пакеты. Существует множество, примеров, доказывающих их эффективность [1]. Поэтому представляется естественным использование систем компьютерной математики для исследования кривых, в частности, для вычисления их кривизны и кручения.

Пусть γ – некоторая регулярная кривая класса C^3 в R^3. Возьмем на ней фиксированную точку P и произвольную точку Q. Обозначим $\Delta\vartheta$ угол между касательными кривой в точках P и Q, а $|\Delta s|$ – длину дуги отрезка PQ кривой.

Кривизной кривой γ в точке P называется предел отношения $\Delta\vartheta(|\Delta s|)^{-1}$, когда точка $Q \to P$.

Будем обозначать кривизну через k_1 и считать, что она отлична от нуля в точке P. Тогда, по непрерывности, кривизна кривой γ отлична от нуля и в некоторой окрестности точки P. Возьмем произвольную точку T в этой окрестности. Известно (см., например, [2]), что в точках P и T существуют единственные соприкасающиеся плоскости π_P и π_T. Обозначим угол между ними через $\Delta\vartheta$, а длину дуги отрезка PT кривой γ – через $|\Delta s|$.

Абсолютным *кручением* $|k_2|$ кривой γ в точке P назовем предел отношения $\Delta\vartheta(|\Delta s|)^{-1}$, когда $T \to P$.

Вычислительные формулы для кривизны и кручения кривой содержатся в следующих утверждениях (см., например, [2, 3]).

Теорема 1. *Если γ — регулярная дважды непрерывно дифференцируемая кривая, то в каждой ее точке существует кривизна, и если r = r(t) – ее параметризация, то*

$$k_1 = \frac{|[r', r'']|}{|r'|^3} \quad (1).$$