6. Griffin J.D. and Kolda T.G. Nonlinearly constrained optimization using heuristic penalty methods and asynchronous parallel generating set search // Appl. Math. Research eXpress. – 2010. – Vol. 2010(1). – P. 36-62.

УДК 514.765.2

Применение универсальных математических пакетов при исследовании кривых

А.А. Самыкова, О.П. Хромова
АлтГУ, г. Барнаул

В последнее время все чаще для решения научно-практических задач применяются универсальные математические пакеты. Существует множество, примеров, доказывающих их эффективность [1]. Поэтому представляется естественным использование систем компьютерной математики для исследования кривых, в частности, для вычисления их кривизны и кручения.

Пусть γ – некоторая регулярная кривая класса C^3 в R^3. Возьмем на ней фиксированную точку P и произвольную точку Q. Обозначим $\Delta\vartheta$ угол между касательными кривой в точках P и Q, а $|\Delta s|$ – длину дуги отрезка PQ кривой.

Кривизной кривой γ в точке P называется предел отношения $\Delta\vartheta(|\Delta s|)^{-1}$, когда точка $Q \to P$.

Будем обозначать кривизну через k_1 и считать, что она отлична от нуля в точке P. Тогда, по непрерывности, кривизна кривой γ отлична от нуля и в некоторой окрестности точки P. Возьмем произвольную точку T в этой окрестности. Известно (см., например, [2]), что в точках P и T существуют единственные соприкасающиеся плоскости π_P и π_T. Обозначим угол между ними через $\Delta\vartheta$, а длину дуги отрезка PT кривой γ – через $|\Delta s|$.

Абсолютным *кручением* $|k_2|$ кривой γ в точке Р назовем предел отношения $\Delta\vartheta(|\Delta s|)^{-1}$, когда $T \to P$.

Вычислительные формулы для кривизны и кручения кривой содержатся в следующих утверждениях (см., например, [2, 3]).

Теорема 1. *Если γ — регулярная дважды непрерывно дифференцируемая кривая, то в каждой ее точке существует кривизна, и если $r = r(t)$ – ее параметризация, то*

$$k_1 = \frac{|[\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'']|}{|\boldsymbol{r}'|^3} \quad (1).$$

Теорема 2. *Если γ – регулярная кривая класса C^3, то в каждой ее точке, в которой кривизна отлична от нуля, существует абсолютное кручение k_2, и если r = r(t) – ее параметризация, то*

$$k_2 = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{|[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'']|^2} \quad (2).$$

Таким образом, вычисление кривизны и кручения кривой γ может быть осуществлено с помощью следующей математической модели.

1) Задать вектор-функцию $\mathrm{r} = \mathrm{r}(\mathrm{t}) = \{\mathrm{x}(\mathrm{t}), \mathrm{y}(\mathrm{t}), \mathrm{z}(\mathrm{t})\}$

2) Найти производные $\mathrm{r}', \mathrm{r}'', \mathrm{r}'''$.

3) Определить произведения производных вектор-функции, присутствующих в вычислительных формулах.

4) Вычислить кривизну k_1 или кручение k_2 по формулам (1) и (2) соответственно.

В данной работе по построенной математической модели в средах пакетов прикладных программ Maxima и SageMath разработана компьютерная модель, позволяющая определять кривизну и кручение кривой.

Далее, приведем реализацию данной модели в Maxima.

Зададим вектор-функцию. Например, для винтовой линии это осуществляется так:

$$\mathrm{r}: [\cos(\mathrm{t}), \sin(\mathrm{t}), \mathrm{t}];$$

Найдем для неё производную первого, второго и третьего порядков соответственно:

$$\mathrm{db}: [\mathrm{diff}(\mathrm{r}[1], \mathrm{t}, 1), \mathrm{diff}(\mathrm{r}[2], \mathrm{t}, 1), \mathrm{diff}(\mathrm{r}[3], \mathrm{t}, 1)];$$
$$\mathrm{db2}: [\mathrm{diff}(\mathrm{r}[1], \mathrm{t}, 2), \mathrm{diff}(\mathrm{r}[2], \mathrm{t}, 2), \mathrm{diff}(\mathrm{r}[3], \mathrm{t}, 2)];$$
$$\mathrm{db3}: [\mathrm{diff}(\mathrm{r}[1], \mathrm{t}, 3), \mathrm{diff}(\mathrm{r}[2], \mathrm{t}, 3), \mathrm{diff}(\mathrm{r}[3], \mathrm{t}, 3)];$$

Вычисление кривизны кривой по формуле (1) произведем в три этапа.

Этап 1. Введем процедуры для вычисления модуля векторного произведения первой и второй производной:

$$\mathrm{v}: \mathrm{db}{\sim}\mathrm{db2};$$
$$\mathrm{v1}: \mathrm{express}(\%);$$
$$\mathrm{v2}: \mathrm{trigsimp}(\mathrm{v1});$$
$$\mathrm{v3}: \mathrm{v2}.\mathrm{v2};$$
$$\mathrm{v4}: \mathrm{v3}\hat{}(1/2);$$
$$\mathrm{v5}: \mathrm{trigsimp}(\mathrm{v4});$$

Этап 2. Создадим процедуру вычисления для знаменателя $|r'|^3$:

$$\mathrm{v6}: \mathrm{db}.\mathrm{db};$$
$$\mathrm{v7}: \mathrm{v6}\hat{}(1/2);$$
$$\mathrm{v8}: \mathrm{v7}\hat{}3;$$

$$v9: \text{trigsimp}(v8);$$

Этап 3. Согласно формуле (1) получим результат:

$$k: v5/v9;$$

Аналогично, используя формулу (2), найдем кручение кривой в три этапа.

Этап 1. Разработаем процедуру вычисления смешанного произведения первых трех производных радиус-векторов кривых (r', r'', r''') как композицию скалярного произведения и векторного произведения ($[r', r''], r'''$):

$$v: db \sim db2;$$
$$v1: \text{express}(\%);$$
$$v2: \text{trigsimp}(v1);$$
$$v3: v2. db3;$$
$$v4: \text{trigsimp}(v3);$$

Этап 2. Далее находим квадрат длины векторного произведения векторов r' и r'':

$$c: db \sim db2;$$
$$c1: \text{express}(c);$$
$$c2: c1. c1;$$
$$c3: \text{trigsimp}(c2);$$

Этап 3. По формуле (2) получаем кручение кривой:

$$k: v4/c3;$$

Библиографический список

1. Пономарев, И. В. Системы компьютерной математики в задачах геометрического моделирования: учеб. пособие / И. В. Пономарев, О. П. Хромова; АлтГУ. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2014. – 51 с.

2. Топоногов В. А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей: учебное пособие для вузов. – М.: Физматкнига, 2012. – 224 с.

3. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия // Учеб. пособие; под ред. А. Ф. Лапко. – М.: Наука, 1974. – 176 с.