

УДК 517.95 + 536.252

Визуализация динамических систем на примере аттрактора Лоренца

*Т.А. Сибирякова, К.А. Шишмарев**АлтГУ, г. Барнаул*

Рассматривается полная система гидродинамики записывается в приближении Буссинеска [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta u + \rho g, \\ \frac{d\rho}{dx} + \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \frac{dT}{dx} = k \nabla^2 T, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где u – скорость течения, ρ – плотность, p – давление, T – температура жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости, g – сила тяжести, T_0 – температура верхней границы, H – высота жидкости, α – коэффициент теплового расширения, k – коэффициент теплопроводности. Введем обозначения $\frac{1}{\rho} \nabla p = P$, $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$. Разложим вектор скорости на проекции осей в соответствии с системой уравнений (1). Для упрощения задачи предлагается ограничить развитие конвективных движений только в плоскости xOz , и, следовательно, уравнения для конвекции переписываются в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial P}{\partial x} - \nu \nabla^2 u = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial P}{\partial z} - \nu \nabla^2 w - g \alpha T = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial z} w - k \nabla^2 T = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

В силу равенства (5) можем определить функцию тока следующим образом

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6)$$

Температурное отклонение T раскладывается на среднее значение по горизонтали и отклонение от него. В свою очередь, мы можем расширить T на часть, представляющую линейную вариацию между верхней и нижней границами, и отклонение от этой линейной вариации. Будем считать, что температура на верхней и нижней границах поддерживается внешним нагревом постоянной. Исключаем P из (2) и (3), вводим (6) и соотношение для температуры, и вводя дальнейшее упрощение, записав нелинейные адвективные члены в виде якобианского оператора, переписываем систему уравнений. Далее уравнения раскладываются в ряды Фурье и "обрезаются" с точностью до первых гармоник, что в определенной мере оправдано, так как Сольцмен в своей работе продемонстрировал, что поведение большинства гармоник не вносит большого вклада в развитие системы. [1,2]

$$\alpha(1 + \alpha^2)^{-1}k^{-1}\psi = X\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi\alpha x}{H}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right), \quad (10)$$

$$\pi R_c^{-1}R_\alpha \nabla T^{-1}\theta = Y\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi\alpha x}{H}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) - Z\sin\left(2\frac{\pi z}{H}\right), \quad (11)$$

где $R_c = \pi^4 \alpha^{-2}(1 + \alpha^2)^3$, $R_\alpha = g\alpha H^3 \Delta T_v^{-1}k^{-1}$, θ – отклонение температуры.

После чего уравнения (21) и (22) подставляются в систему уравнений Буссинеска, выражаются функции x , y и z и, переобозначая параметры, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = x(r - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases}$$

где $\sigma = k^{-1}\nu$, $b = 4(1 + \alpha^2)^{-1}$, $r = R_c^{-1}R_\alpha$.

Анализ неподвижных точек на устойчивость

Найдем неподвижные точки системы уравнений Лоренца. Находим 3 неподвижные точки $O = (0,0,0)$, $O_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$, $O_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$.

Рассмотрим при каких значениях параметров найденные неподвижные точки являются устойчивыми и неустойчивыми. Линеаризуем систему уравнений и далее уравнения можно решать в виде задачи на собственные числа. Условием существования нетривиального решения является равенство нулю определителя. Для точки O получаем, что при $r < 1$ неподвижная точка является устойчивой (устойчивый узел), а при $r > 1$ неустойчивой (неустойчивый седло-узел).

Для точек $O1$ и $O2$, которые существуют при $g > 1$, исследование уравнения показывает, что при g немного превышающих 1, все 3 собственных числа отрицательны (устойчивые точки являются устойчивыми узлами). При дальнейшем увеличении g знак меняется и это момент потери устойчивости состояниями $O1$ и $O2$.

Рассмотрим изменения в поведении решения системы Лоренца при различных параметрах g .

При $g > 0$ и $g < 1$ система имеет только одну критическую точку. Любое начальное состояние приближается к началу координат при t стремящемся к бесконечности. При g близкой к 1 возникает критическое замедление. Когда g превышает значение 1, происходит первая бифуркация. Начало координат теряет устойчивость и от него отщепляются два аттрактора, оба глобально и локально устойчивы (Рисунок 1а).

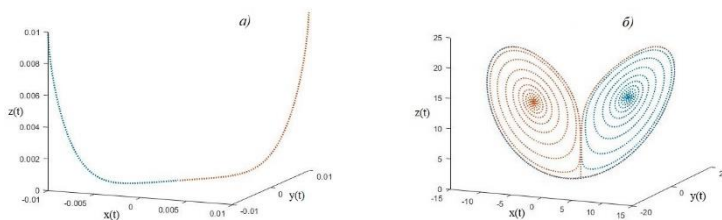


Рисунок 1 – Траектории системы Лоренца для а) $g = 0.5$, б) $g = 13.927$.

При некотором значении $g = 13,927$ происходит перестройка структуры потока фазовых траекторий, которая не сводится к локальным изменениям в окрестности какой-то одной точки фазового пространства. Переход параметра g через указанное значение никак не отражается на свойствах стационарных режимов, отвечающих аттракторам $O1$ и $O2$. Однако в глобальной структуре фазового пространства происходят существенные изменения (Рисунок 1б).

Следующая существенная нелокальная бифуркация происходит при $g = 24,06$. Траектории асимптотически приближаются к неустойчивым предельным циклам, возникает уже притягивающее множество сложной структуры – странный аттрактор Лоренца. Отметим, что состояния $O1$ и $O2$ все еще остаются устойчивыми, и в интервале g от 24,06 до 24,74 в системе существует три аттрактора. Далее неподвижные точки теряют устойчивость и аттрактор Лоренца остается единственным притягивающим множеством.

При $\gamma = 28$ – классические значения параметров, при которых обычно проводят исследование системы Лоренца для задачи конвекции морской воды в плоском слое (Рисунок 2).

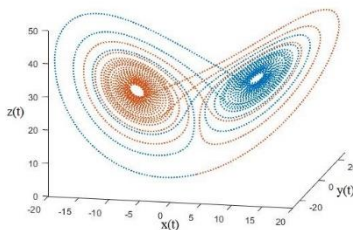


Рисунок 2. Траектории системы Лоренца для $\gamma = 28$.

В случае увеличения γ до 100 наблюдается автоколебательный режим. При $\gamma \geq 313$ система находится в единственном устойчивом предельном симметричном аттракторе.

Заключение

Рассмотрена система уравнений Буссинеска, описывающая конвекцию жидкости. Изучен алгоритм решения с помощью функции тока и разложения в ряд Фурье системы уравнений Буссинеска и сведения ее к системе уравнений Лоренца. Проведен анализ неподвижных точек на устойчивость. Описано поведение решения системы Лоренца при изменениях параметра γ .

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

Библиографический список

1. Lorenz, Edward N. (1963). «Deterministic Nonperiodic Flow». Journal of the Atmospheric Sciences 20: 130–141.
2. Saltzman, Barry (1962). «Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem– I». Journal of the Atmospheric Sciences 19 (4): 329– 341.