Библиографический список

1. Эсбенсен, К. Анализ многомерных данных: избранные главы / К. Эсбенсен; Пер. с англ. С.В. Кучерявского; под ред. О.Е. Родионовой. –Барнаул: Изд-во Алт. гос. ун-та, 2003. – 150 с.
2. Bro, R. Multi–way analysis with applications in the chemical sciences / A. Smilde, B. Rasmus, P. Geladi. – Chichester: Wiley, 2004, 381 p.

УДК 517.95

Автомодельная задача фильтрации вязкой жидкости в вязкоупругом пористом скелете

М.А. Токарева, В.Н. Ларионова
АлтГУ, г. Барнаул

Рассмотрим следущую квазилинейную систему составного типа, описывающую пространственное нестационарное изотермическое движение сжимаемой жидкости в вязкоупругой пористой среде [1] – [2]:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t}+div((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s)=0,$$

$$\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t}+div(\rho_f\phi\vec{v}_f)=0,$$

$$\phi(\vec{v}_f-\vec{v}_s)=-\frac{k\phi^n}{\mu}(\nabla p_f-\rho_f\vec{g}),$$

$$\nabla\cdot\vec{v}_s=-\frac{\phi^m}{\eta}p_e-\phi^b\beta_\phi(\frac{\partial p_e}{\partial t}+\vec{v}_s\cdot\nabla p_e),$$

$$\nabla\cdot\sigma+\rho_{tot}\vec{g}=0,\ \rho_{tot}=\phi\rho_f+(1-\phi)\rho_s,$$

$$p_{tot}=\phi p_v+(1-\phi)p_s, p_e=(1-\phi)\big(p_s-p_f\big).$$

Здесь ϕ – пористость; $\rho_f,\rho_s,\vec{v}_s,\vec{v}_f$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз; p_e – эффективное давление, p_{tot} – общее давление, ρ_{tot} – общая плотность; $\vec{g}$ – плотность массовых сил; β_ϕ – коэффициент сжимаемости твердого скелета, η – динамическая вязкость твердой фазы, k – проницаемость, $\mu -$ динамическая вязкость жикости, σ – общий тензор напряжений. Истинная плотность твердой фазы ρ_s принимается постоянной. Система является замкнутой, если $p_f=p_f(\rho_f)$ или $\rho_f=const$. В случае неполного уравнения баланса сил $\frac{dp_{tot}}{dx_i}=-\rho_{tot}g$ и g=0 разрешимость автомодельной задачи для исходной системы уравнений установлена в работе [3].

В одномерном случае при условии $\rho_s, \rho_f = const$ приходим к замкнутой системе уравнений для $\phi, \vec{v}_s, \vec{v}_f, p_s, p_f$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_f\phi) = 0,$$
$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_s(1-\phi)) = 0,$$
$$\phi(v_f - v_s) = -\frac{k\phi^n}{\mu}(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f g),$$
$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\frac{\phi^m}{\eta}p_e - \phi^b\beta_\phi(\frac{\partial p_e}{\partial t} + v_s\frac{\partial p_e}{\partial x}),$$
$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot}g + 2\eta\frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)\quad\frac{\partial v_s}{\partial x})).$$

Перейдём в этой системе к безразмерным переменным:

$$t = t_1 t', x = x_1 x', v_f = v_1 v_f{}', v_s = v_1 v_s{}', p_f = p_1 p_f', p_{tot} = p_1 p_{tot}'.$$

После чего система уравневий примет вид (штрихи опускаются):

$$\frac{1}{t_1}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v_1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(v_f\phi\right) = 0,\ \frac{1}{t_1}\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{v_1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x}(v_s(1-\phi)) = 0, \qquad (1)$$
$$v_1\phi(v_\mathrm{f} - v_\mathrm{s}) = -\frac{k}{\mu}\phi^n(\frac{p_1}{\mathrm{x}_1}\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_\mathrm{f}\mathrm{g}) = 0,$$
$$\frac{v_1}{x_1}\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\frac{\phi^m}{\eta}p_1\left(p_{tot} - p_f\right) - \phi^b\beta_\phi\left(\frac{p_1}{t_1}\frac{\partial\left(p_{tot} - p_f\right)}{\partial t} + \frac{v_1 p_1}{x_1}v_s\frac{\partial\left(p_{tot} - p_f\right)}{\partial x}\right),$$
$$\frac{p_1}{x_1}\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\left(\phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s\right)g + 2\eta\frac{v_1}{{x_1}^2}\frac{\partial}{\partial x}\left((1-\phi)\quad\frac{\partial v_s}{\partial x}\right). \qquad (4)$$

Положим $t_1 = \frac{x_1}{v_1}$, $v_1 = \frac{kg\rho_f}{\mu}, p_1 = \rho_f g x_1$, $t_1 = \beta_\phi\eta$, тогда $x_1 = \frac{\beta_\phi\eta k\rho_f g}{\mu}, p_1 = \frac{\beta_\phi\eta k}{\mu}\rho_f^2 g^2$, а система примет вид

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial v_s(1-\phi)}{\partial x} = 0,$$
$$\phi\left(v_f - v_\mathrm{s}\right) = -\phi^n\frac{\partial p_f}{\partial x} - \phi^n,$$
$$\frac{\mu}{(\beta_\phi\rho_f g)^2\eta k}\frac{\partial v_\mathrm{s}}{\partial x} = -\phi^m\left(p_{tot} - p_f\right) - \phi^b\frac{\partial(p_{tot} - p_f)}{\partial t}$$
$$-\phi^b v_s\frac{\partial(p_{tot} - p_f)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = \frac{2\mu}{\left(\beta_\varphi\rho_f g\right)^2\eta k}\frac{\partial}{\partial x}\left((1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x}\right) - \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\phi - \frac{\rho_s}{\rho_f}.$$

Обозначим $\lambda = \frac{\rho_s}{\rho_f}, \gamma = \frac{\mu}{(\beta_\phi \rho_f g)^2 \eta k}$, тогда имеем

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(v_f \phi\right) = 0,\ \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(v_s(1-\phi)\right) = 0,$$
$$\phi(v_f - v_s) = -\phi^n \frac{\partial p_f}{\partial x} - \phi^n,$$
$$\gamma \frac{\partial v_s}{\partial x} = -\phi^m\left(p_{tot} - p_f\right) - \phi^b v_s \frac{\partial(p_{tot} - p_f)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = 2\gamma \frac{\partial}{\partial x}\left((1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x}\right) - (1-\lambda)\phi - \lambda.$$

Перейдём к автомодельным переменным $\xi = x - ct\ (> 0)$:

$$\frac{d}{d\xi}\left((-c + v_f)\phi\right) = 0, \qquad \frac{d}{d\xi}\left((1-\phi)(v_s - c)\right) = 0,$$
$$\phi\left(v_f - v_s\right) = -\phi^n \frac{dp_f}{d\xi} - \phi^n,$$
$$\gamma \frac{dv_s}{d\xi} = -\phi^m\left(p_{tot} - p_f\right) - \phi^b (v_s - c) \frac{d(p_{tot} - p_f)}{d\xi},$$
$$\frac{dp_{tot}}{d\xi} = 2\gamma \frac{d}{d\xi}\left((1-\phi)\frac{dv_s}{d\xi}\right) - (1-\lambda)\phi - \lambda.$$

Система дополняется граничными условиями:

$$v_s(0) = v_s^0, v_f(0) = v_f^0, \phi(0) = \phi^0,$$
$$\lim_{\xi\to\infty} v_f(\xi) = u^+, \lim_{\xi\to\infty}\phi(\xi) = \phi^+,$$

где $v_s^0, v_f^0, \phi^0, \phi^+$ -заданные постоянные, удовлетворяющие условиям $v_s^0 \neq v_f^0, \phi^0 \neq \phi^+$.

Из первых двух уравнений системы получим:

$$A_1 = \phi\left(v_f - c\right), A_2 = (1-\phi)(v_s - c), \qquad A_1, A_2 - const,$$
$$v_f = c + \frac{A_1}{\phi}, v_s = c + \frac{A_2}{1-\phi}.$$

Тем самым приходим к системе уравнений для неизвестных констант A_1, A_2, u^+, c:

$$v_f = c + \frac{A_1}{\phi^0}, v_s = c + \frac{A_2}{1-\phi^0}, \qquad u^+ = c + \frac{A_1}{\phi^+}, \quad u^+ = c + \frac{A_2}{1-\phi^+},$$

решив которую, получим:

$$c = \frac{\phi^+(1-\phi^0)v_s^0 - \phi^0(1-\phi^+)v_f^0}{\phi^+ - \phi^0},$$
$$u^+ = \phi^0 v_f^0 + (1-\phi^0)v_s^0,$$
$$A_2 = \frac{(1-\phi^+)\phi^0(1-\phi^0)(v_f^0 - v_s^0)}{\phi^+ - \phi^0}, \quad A_1 = \frac{\phi^+}{1-\phi^+}A_2.$$

Таким образом, система преобразуется к следующему виду:

$$\phi\left(\frac{A_1}{\phi} - \frac{A_2}{1-\phi}\right) = -\phi^n \frac{dp_f}{d\xi} - \phi^n,$$
$$\gamma A_2 \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{1-\phi}\right) = -\phi^m (p_{tot} - p_f) - \phi^b \frac{A_2}{1-\phi}\frac{d(p_{tot} - p_f)}{d\xi},$$
$$\frac{p_{tot}}{d\xi} = 2\gamma A_2 \frac{d}{d\xi}\left((1-\phi)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{1-\phi}\right)\right) - (1-\lambda)\phi - \lambda.$$

Выразим из первого и третьего уравнений полученной системы $\frac{dp_f}{d\xi}$ и $\frac{dp_{tot}}{d\xi}$. Поделим второе уравнение на ϕ^m, продифференцируем его и подставим выраженные производные. Таким образом, получим уравнение для нахождения функции ϕ :

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\phi^{b-m}}{1-\phi}\frac{d}{d\xi}\left((1-\phi)^{-1}\frac{d\phi}{d\xi}\right)\right) + \frac{1}{2A_2}\frac{d}{d\xi}\left((\phi^{-m}(1-\phi)^{-2} + \right.$$
$$\left. 2(1-\phi)^{-1})\frac{d\phi}{d\xi}\right) + \frac{1}{2\gamma A_2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\phi^{b-m-n}}{1-\phi}\left(A_1 - \frac{A_2\phi}{1-\phi}\right) + \phi^{b-m}(1-\lambda)\right) +$$
$$\frac{1}{2\gamma A_2}\left(\phi^{-n}\left(\frac{A_1}{A_2} - \frac{\phi}{1-\phi}\right) + + \frac{(1-\lambda)(1-\phi)}{A_2}\right) = 0.$$

Для уравнения подобного вида в работе [4] изучена проблема эквивалентности.

Работа выполнена по проекту МК-204.2020.1 «Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей в пороупругих средах и их приложения в динамике снежно-ледового покрова» при поддержке гранта Президента РФ.

Библиографический список

1. Morency C. at all. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Research. – 2007.

2. Fowler A. Mathematical Geoscience. – Springer-Verlag London Limited, 2011.

3. Токарева М.А. Вирц Р.А. Аналитическое и численное исследование задачи фильтрации в пороупругой среде // МАК 2016.

4. Yu.Yu. Bagderina, Equivalence of third-order ordinary differential equations to Chazy equations I-XIII. Stud. Appl. Math. 2008. V. 120, №3. P. 293–332.

УДК 517.947

Асимптотическое разложение решения первой начально-краевой задачи для системы малых колебаний вращающейся жидкости

С.И. Янов

АлтГПУ, г. Барнаул

Исследуется асимптотическое разложение решения первой начально-краевой задачи для системы С.Л. Соболева [1, с. 51]:

$$\vec{V}_t - [\,\vec{V} \times \vec{\omega}\,] + \operatorname{grad} P = 0 \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

$$\vec{V}\,|_{t=0} = 0, \quad P\,|_{z=0} = g\,(t, x'), \quad x' = (x, y), \quad \vec{\omega} = (0, 0, 1).$$

Согласно закону Блеза Паскаля (1623–1662): Давление, производимое на жидкость или газ, передается в любую точку без изменений во всех направлениях. Поэтому, естественно предположить, что функция

$$g\,(t, x, y) = P\,|_{z=0},$$

обладает свойством

$$\frac{\partial\, g\,(t, x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)}{\partial\rho} = 0 \qquad (1')$$

при всех t и $(x + \rho\cos\varphi,\ y + \rho\sin\varphi)$ из supp $g\,(t, x')$ содержащегося в $\{ x' : |\,x'\,| < R \}$.

Ранее асимптотика различных задач для системы (1) исследовалась в работах С.Л. Соболева [1], В.Н. Масленниковой [2], С.В. Успенского, Г.В. Демиденко [3], С.В. Успенского, Е.Н. Васильевой [4–5], С.И. Янова [5].

Асимптотика решения первой краевой задачи для уравнения Соболева в работах [6–7]. В работе [8] было приближенно описано поведение решения задачи (1). Настоящая работа уточняет результаты работы [8] для случая финитной функции $g\,(t, x')$. Доказана следующая теорема.