СЕКЦИЯ 1. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ПОДСЕКЦИЯ АЛГЕБРА

УДК 512.552

Некоторые свойства сжатых графов делителей нуля конечных колец

А.А. Афанасьев, А.С. Монастырёва
АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию сжатых графов делителей нуля конечных ассоциативных колец на пяти вершинах и более, являющихся деревьями, и содержащих мост.

Ключевые слова: *сжатый граф делителей нуля, конечное ассоциативное кольцо, делители нуля.*

На протяжении всей работы слово “кольцо” означает ассоциативное кольцо.

Идея построения графов делителей нуля впервые появилась в 1988 году в работе [1] И. Бека. Он считал вершинами графа все элементы коммутативного кольца. В 1999 году Д. Андерсон и Ф. Ливингстон в работе [2] изменили способ построения графов делителей нуля: вершинами графа коммутативного кольца уже считались все ненулевые делители нуля кольца.

Мы же будем использовать определение, введенное в статье [3] Редмондом в 2002 году для общего случая. Пусть R – произвольное кольцо, $D(R)$ – множество делителей нуля кольца R. Вершинами графа будем считать все элементы множества $D(R)^* = D(R) - \{0\}$, причем две различные вершины x и y соединяем ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ либо $yx = 0$. Граф делителей нуля кольца мы будем обозначать следующим образом: $\Gamma(R)$. Известно, что $\Gamma(R)$ связный для любого кольца R [3].

Графы $\Gamma(R)$ хорошо изучены. За период с 2003 по 2015 год были получены следующие результаты. Конечные коммутативные кольца с планарными $\Gamma(R)$ описали S. Akbari, H.R. Maimani, S. Yassemi и R. Belshoff, J. Chapman в статьях [4] и [5] соответственно. S. Akbari, A. Mohammadian в работе [6] описывали свойства колец с двудольными

$\Gamma(R)$. Полностью описаны нильпотентные кольца с планарными $\Gamma(R)$ в статье [7] Монастырёвой А.С и Ю.Н. Мальцевым. В работе [8] А.С. Монастырёва полностью описала ненильпотентные кольца с планарными $\Gamma(R)$. В статье [9] ею же были описаны конечные кольца с эйлеровыми $\Gamma(R)$. А.С. Монастыревой, Ю.Н. Мальцевым были описаны конечные кольца с полными двудольными $\Gamma(R)$ в работе [10]. В статье [11] ими же были описаны конечные кольца с однородными $\Gamma(R)$, а также доказаны некоторые свойства конечных колец, $\Gamma(R)$ которых удовлетворяет условию Дирака, в работе [12] продолжено изучение конечных колец, $\Gamma(R)$ которых удовлетворяют условию Дирака.

Геометрическое изображение $\Gamma(R)$ представляется довольно сложным даже для колец малых порядков. Поэтому в 2010–2013 годах в работах [13] и [14] Н. Блумфилдом и С. Викхамом было предложено разбить вершины графа $\Gamma(R)$, где кольцо R – коммутативное кольцо, на классы эквивалентности. Е.В. Журавлев и А.С. Монастырева расширили их подход на некоммутативный случай в статье [15]. Происходит это следующим образом. Пусть R произвольное кольцо. Введем отношение эквивалентности на множестве $D(R)^{*}: x, y \in D(R)^{*}$ $x \sim y <=> l(x) \cup r(x) = l(y) \cup r(y),$ где $l(x), r(x)$ – левый и правый аннулятор x, для y аналогично, то есть это отношение эквивалентности задает разбиение множества делителей нуля кольца на классы такое, что каждый делитель нуля попадает в один из них и только в один.

Пусть $[x]$ – класс эквивалентности элемента $x \in D(R)^{*}$. Граф, для которого множеством вершин являются классы эквивалентности и две вершины $[x], [y]$ (не обязательно различные), соединяются ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$, будем называть сжатым графом делителей нуля кольца R. Сжатый граф делителей нуля кольца мы будем обозначать следующим образом: $\Gamma_{\sim}(R)$.

В работе [15] доказано, что вершины сжатого графа делителей нуля делятся на два типа. Если $x^{2} = 0$, то класс эквивалентности $[x]$ – это вершина с петлей. Если $x^{2} \neq 0$, то $[x]$ – это вершина без петли.

Изображение $\Gamma_{\sim}(R)$, в отличие от $\Gamma(R)$, более компактно и наглядно. Зная, сколько элементов содержится в каждом классе эквивалентности, мы всегда от $\Gamma_{\sim}(R)$ можем перейти к $\Gamma(R)$. Поэтому при изучении свойств $\Gamma_{\sim}(R)$ можно использовать свойства $\Gamma(R)$.

На настоящий момент $\Gamma_{\sim}(R)$ изучены мало. Ненильпотентные кольца, $\Gamma_{\sim}(R)$ которых имеют порядок два, описаны А.С. Монастырёвой в 2019 году в работе [16]. В статье [15] 2020-го года Е.В. Журавлевлевым и А.С. Монастырёвой получены следующие результаты: описаны кольца, $\Gamma_{\sim}(R)$ которых имеют порядок один, а также описаны коммутативные кольца, $\Gamma_{\sim}(R)$ которых имеют порядок два. Что касается колец, $\Gamma_{\sim}(R)$ которых имеют порядок три, то известно, что существует два типа таких графов. Остается открытым вопрос: нахождение и описание колец, сжатые графы делителей нуля которых имеют порядок четыре и более.

В настоящей работе мы получаем свойства колец, сжатые графы делителей нуля которых не содержат циклов или имеют мост.

Введем некоторые определения и обозначения. Конечное кольцо R с единицей называется локальным, если $R/J(R)$ – поле, где под $J(R)$ мы понимаем радикал Джекобсона кольца R. Через $GF(q)$ мы обозначаем поле Галуа порядка q. Символом $\oplus$ обозначается прямая сумма (как идеалов) колец.

Утверждение 1. *Если сжатый граф делителей нуля кольца R имеет порядок больше или равный пяти и не содержит циклов, тогда он изоморфен графу, изображенному на рисунке 1 или рисунке 2.*

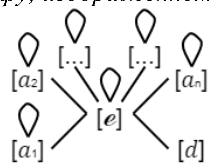

Рисунок 1

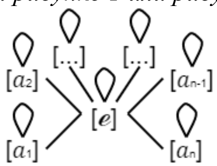

Рисунок 2

Утверждение 2. *Сжатый граф делителей нуля кольца R содер-жит мост, вершины которого не являются висячими, тогда и только тогда, когда он изоморфен графу на рисунке 3 и $R \cong GF(q) \oplus S$, где S – локальное кольцо и $J(S)^2 = 0$, $J(S) \neq 0$.*

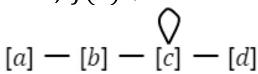

Рисунок 3

Библиографический список

1. Beck I. Coloring of Commutative Rings // Journal of Algebra. – 1988. – V. 116. – P. 208–226.

2. Anderson D.F., Livingston P.S. Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring // Journal of Algebra. – 1999. – V. 217. – P. 434–447.

3. Redmond S.P. The Zero-Divisor graph of a Noncommutative Ring // Int. J. Commut. rings. – 2002. – №1(4). – P. 203–211.

4. Akbari S., Maimani H.R., Yassemi S. When a Zero-Divisor Graph is Planar or a Complete r-partite Graph // Journal of Algebra. – 2003. – V. 270. – P. 169-180.

5. Belshoff R., Chapman J. Planar Zero-Divisor Graphs // Journal of Algebra. – 2007. – V. 316. – P. 471–480.

6. Akbari S., Mohammadian A. On Zero-Divisor Graphs of Finite Rings // Journal of Algebra. – 2006. – V. 314. – P. 168–184.

7. Kuz'mina A.S., Maltsev Yu.N. Nilpotent Finite Rings with Planar Zero-Divisor Graphs // Asian-European Journal of Mathematics. – 2008. – 1. №4. – P. 565–574.

8. Кузьмина А.С. Описание конечных ненильпотентных колец, имеющих планарные графы делителей нуля // Дискретная математика. – 2009. – Вып. 4. – С. 60–75.

9. Kuzmina A.S. Finite Rings with Eulerian Zero-Divisor Graphs // Journal of Algebra and Its Appl. – 2012. – 11(3). – P. 551–559.

10. Кузьмина А.С., Мальцев Ю.Н. Конечные кольца с полными двудольными графами делителей нуля // Известия вузов. Математика. – 2012. – №3. – С. 24–30.

11. Кузьмина А.С., Мальцев Ю.Н. Конечные кольца с некоторыми ограничениями на графы делителей нуля // Известия вузов. Математика. – 2014. – №12. – С. 48–59.

12. Kuzmina A.S., Maltsev Yu.N. On Finite Rings in Which Zero-Divisor Graphs Satisfy the Dirac's condition // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – 4(36). – P. 376–384.

13. Bloomfield N., Wickham C. Local Rings with Genus Two Zero Divisor Graph // Communication in Algebra. – 2010. – V. 38. – P. 2965–2980.

14. Bloomfield N. The Zero Divisor Graphs of Commutative Local Rings of Order p^3 and p^4// Communication in Algebra. – 2013. – V. 41. – P. 765–775.

15. Журавлев Е.В, Монастырева А.С. Сжатые графы делителей нуля ассоциативных колец // Сибирский математический журнал. – 2020. – Т. 61. №1. – С. 96–106.

16. Monastyreva A.S. Finite Non-nilpotent Rings with Complete Compressed Zero Divisor Fraphs // Сборник тезисов докладов межд. конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (г. Казань, 24-28 июня 2019 г.). – Казань: КФУ, – 2019. – С. 52–53.