групп, φ – продолжение φ_i на G, а частичный порядок P на G порожден порядками на G_i. Пусть H– свободная o-аппроксимируемая m-группа над (G, φ). Тогда m-группы (G_i, φ_i) допускают o-вложения α_i в m-группу (H, φ), перестановочные с φ (но не ℓ-вложения). Обозначим через $J = \langle (\alpha_i(g)^-)^{-1} \wedge (\alpha_i(g)^+ | g \in G_i \rangle$ m-идеал m-группы (H, φ), а через F – фактор-группу $H//J$ по этому m-идеалу.

Теорема. m-группа (F, φ) является свободным произведением m-групп $\{(G_i, \varphi_i)\}$ в классе o-аппроксимируемых m-групп.

Библиографический список

1. Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. The theory of lattice-ordered groups. – Dordrecht; Boston, London: Kluwer Acad. Publ. – 1994. – 400 p.

2. Conrad P. Free Lattice-Ordered Groups // J. of Algebra. – 1970. – V.16. – P. 191–203.

3.Giraudet M., Rachůnek J. Varieties of half lattice ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. – 1999. – V.49(124). – P. 743–766.

4. Holland C., Scrimger E. Free products of lattice-ordered groups // Algebra Univ. – 1972. – V.2. – P. 247–254.

5. Вараксин С.В. О свободных m-группах и свободных m-произведениях // Изв. АлтГУ. – 2013. – № 1. – С.16–18.

УДК 512.577

Инъективные мономиальные операторы Роты – Бакстера на свободной ассоциативной алгебре

В.Ю. Губарев

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск

В работе описаны инъективные мономиальные операторы Роты – Бакстера, заданные на свободной ассоциативной алгебре.

Ключевые слова: *оператор Роты – Бакстера, свободная ассоциативная алгебра, мономиальный оператор*.

Изучение операторов Роты – Бакстера является на данный момент бурно развивающейся областью современной алгебры. Для детального ознакомления с историей операторов Роты – Бакстера и основных результатов по ним мы отсылаем к монографии [3] и статье [2].

Пусть A – алгебра, линейный оператор R на A называется оператором Роты – Бакстера веса k, если равенство

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + kxy) \tag{1}$$

выполняется для всех x, y из A. Здесь k – скаляр из основного поля F.

Пусть $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$. Следуя [5], назовём оператор R, заданный на свободной ассоциативной алгебре $F<x_1,\ldots,x_n>$, порождённой множеством X, *мономиальным*, если R переводит каждое слово в алфавите X в какое-то слово с некоторым коэффициентом из F.

Пусть $a_1,\ldots,a_n$ – скаляры из F^*, w – слово из $F<x_1,\ldots,x_n>$. Определим

$$q(w,a_1,\ldots,a_n) = \frac{a_1^{i_1}\ldots a_n^{i_n}}{(a_1+1)^{i_1}\ldots(a_n+1)^{i_n} - a_1^{i_1}\ldots a_n^{i_n}},$$

$$r(w,a_1,\ldots,a_n) = \frac{1}{\dfrac{i_1}{a_1}+\ldots+\dfrac{i_n}{a_n}},$$

где $i_s = \deg_{x_s}(w)$.

В работе продолжается исследование инъективных мономиальных операторов Роты – Бакстера, но в отличие от [1, 4, 5] мы изучаем их не на алгебре многочленов, а на свободной ассоциативной алгебре.

Теорема 1. Пусть R – инъективный мономиальный оператор Роты – Бакстера веса 1 на $F<x_1,\ldots,x_n>$. Тогда найдутся такие ненулевые скаляры $a_1,\ldots,a_n$, что $R(w) = q(w,a_1,\ldots,a_n)w$ для любого слова w.

Доказательство. По формуле (1) получаем, что R является инъективным мономиальным оператором Роты–Бакстера веса 1, только если $R(w) = p(w)w$ для каждого слова w. Здесь $p(w)$ – некоторый ненулевой скаляр. Определим $a_i = p(x_i)$. Далее индукцией по длине слова w доказываем, что $R(w) = q(w,a_1,\ldots,a_n)w$ для любого слова w.

Инъективные мономиальные операторы Роты – Бакстера веса 0 на $F[x]$ были описаны в [5].

Теорема 2. Пусть R – инъективный мономиальный оператор Роты – Бакстера веса 0 на $F<x_1,\ldots,x_n>$ при $n>1$. Тогда найдутся такие ненулевые скаляры $a_1,\ldots,a_n$, что $R(w) = r(w,a_1,\ldots,a_n)w$ для любого слова w.

Доказательство. Пусть $R(w) = kv$, где v – слово, а k – скаляр. По формуле (1) получаем, что $k^2vv = kR(wv + vw)$. В силу мономиальности $wv = vw$. По теореме Бергмана w и v являются степенями одного и того же слова a. Рассмотрим слово w', начинающееся с другой, нежели w, буквы. Пусть $R(w') = lu$, где u – слово, а l – скаляр. Аналогично находим, что w и v являются степенями одного и того же слова b. Тогда формула

(1), применённая для w и w', влечёт $v = w$. Тем самым для любого слова z выполнено равенство $R(z) = p(z)z$, где $p(z)$ – некоторый ненулевый скаляр. Определим $a_i = p(x_i)$. Далее индукцией по длине слова w доказываем, что $R(w) = r(w,a_1,\ldots,a_n)w$ для любого слова w.

Библиографический список

1. Gubarev V. Monomial Rota-Baxter operators on free commutative non-unital algebra // Siberian Electron. Math. Rep. – 2020. – №17. – P. 1052–1063.

2. Gubarev V. Rota-Baxter operators on unital algebras // Mosc. Math. J. – 2021. – №21(2). – P. 325–364.

3. Guo L. An Introduction to Rota-Baxter Algebra. – Beijing, China: Higher education press, 2012. – 223 p.

4. Yu H. Classification of monomial Rota-Baxter operators on k[x] // J. Algebra Appl. – 2016. – №15. – 1650087 (16 p.).

5. Zheng S., Guo L., Rosenkranz M. Rota-Baxter operators on the polynomial algebras, integration and averaging operators // Pacific J. Math. – 2015. – №275(2). – P. 481–507.

УДК 512.552.4

Коммутативность ассоциативных колец с автоморфизмами

Е.С. Заботина, А.В. Кислицин

Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул

В статье приводятся условия коммутативности для ассоциативных колец с автоморфизмами.

Ключевые слова: ассоциативное кольцо, автоморфизм, теоремы коммутативности.

Пусть R обозначает ассоциативное кольцо с единицей, Cent$R$ – его центр, т.е. множество элементов R, перестановочных со всеми остальными элементами R. Очевидно, что Cent$R$ – подкольцо R.

Основываясь на результатах Джекобсона, Херстейна, МакХэйла, Томинаги [1], Мохаррам Хан выдвинул гипотезу: пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, f и g – автоморфизмы R, $n > 1$ –