Верны следующие теоремы.

Теорема 1. $L(K^{p^s}) = R^{p^s}$.

Теорема 2. Для любого неабелева подквазимногообразия K квазимногообразия N^{p^s} выполнено $L(K) = M^{p^s}$, причём существует континуум таких подквазимногообразий.

Библиографический список

1. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сиб. матем. журн. – 1999. – №2 (10). – С. 266–270.
2. Будкин А.И. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами // Алгебра и логика. – 2000. – №6 (39). – С. 635–647.
3. Будкин А.И., Таранина Л.В. О квазимногообразиях Леви, порождённых нильпотентными группами // Сиб. матем. журн. – 2000. – №2 (41). – С. 270–277.
4. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порождённых нильпотентными группами // Изв. Алт. гос. ун-та. – 2009. – №1 (61). – С. 26–29.
5. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами // Сиб. матем. журн. – 2010. – №6 (51). – С. 1359–1366.
6. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. – 2011. – №1 (50). – С. 26–41.
7. Лодейщикова В.В. О классе Леви, порождённом квазимногообразием нильпотентных групп // Алгебра и логика. – 2019. – №4 (58). – С. 327–336.
8. Шахова С.А. Об аксиоматическом ранге классов Леви // Алгебра и логика. – 2018. – №5 (57). – С. 587–600.

УДК 512.552.4

Коммутативность колец, удовлетворяющих некоторому коммутативному тождеству

Ю.А. Павлюк

АлтГПУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию ассоциативных колец, удовлетворяющих некоторым тождествам на коммутативность.

Ключевые слова: *кольцо, коммутатор, коммутативность, тождество.*

В 1905 г. Д. Веддерберн показал, что любое конечное тело коммутативно, положив начало «теоремам коммутативности» [1, с. 71]. В настоящее время «теоремы коммутативности» представляют собой целое направление в теории ассоциативных колец. В 2002 г. была опубликована работа Е.В. Дурандиной и Ю.Н. Мальцева [2, с. 18], в которой доказана следующая теорема.

Теорема 1. Произвольное ассоциативное кольцо, удовлетворяющее тождеству:

$$[y-\varphi(y)\psi(x),x]=0, \text{ где } \psi(t)=\sum_{i=0}^{n}a_it^i,\ \varphi(t)=\sum_{i=0}^{m}b_it^i\in Z[t]$$

является коммутативным тогда и только тогда, когда $1-a_0b_1=\pm 1$.

В 2019 г. был получен новый результат, который обобщает результат 2002 г.

Теорема 2. Пусть R – ассоциативное кольцо, удовлетворяющее тождеству:

$$[x,y]+[x,(b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+x^n)(a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{k-1}y^{k-1}+y^k)(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{m-1}x^{m-1}+x^m)]=0,$$

где $a_i,b_j,c_t\in\mathbb{Z}, n\geq 1, m\geq 1, k\geq 1$ и $b_0c_0=0$.
Тогда R – коммутативное кольцо.

Далее, был поставлен вопрос о доказательстве теорем коммутативности с условиями, обобщающими условия, наложенные в предыдущих работах. В данной работе получен результат, обобщающий результат 2019 года.

Теорема 3. Пусть R – ассоциативное кольцо, удовлетворяющее тождеству:
$[x-a(y)b(x)c(y),y-\varphi(x)\psi(y)g(x)]$, где $a(y)=\sum_{i=0}^{n}a_iy^i$, $b(x)=\sum_{i=0}^{k}b_ix^i$, $c(y)=\sum_{i=0}^{m}c_iy^i$, $\varphi(x)=\sum_{i=0}^{h}f_ix^i$, $\psi(y)=\sum_{i=0}^{s}t_iy^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{r}g_ix^i$, $a_i,b_j,c_k,f_l,t_p,g_u\in\mathbb{Z}$, $a_n=b_k=c_m=f_h=t_s=g_r=1$, $b_1=b_0=f_0g_0=a_0c_0=0$.

Тогда R – коммутативное кольцо.

Следствие 1. Ассоциативное кольцо R, удовлетворяющее тождеству $[x-y^nx^ky^m,y-x^hy^sx^r]=0$, где $k\geq 2, n\geq 1, m\geq 1, h\geq 1, s\geq 1, r\geq 1$ является коммутативным.

Так же была поставлена новая задача, которая успешна решена.

Теорема 4. Пусть R – ассоциативное кольцо, удовлетворяющее тождеству:

$$p([x,y])=[p(x),y]+[x,p(y)],$$

где $p(t)=a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n\in\mathbb{Z}[t]$, $a_1=1, a_n=\pm 1$ и либо

$n \leq 2$, либо $n \geq 3$ и $p(1) = 1, p'(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Тогда R – коммутативное кольцо.

Следствие 2. Пусть ассоциативное кольцо R удовлетворяет одному из тождеств:

$$p([x, y]) = [p(x), y] + [x, p(y)],$$

где $p(t) = t - t^2 + t^3, t + t^2 - t^3$.
Тогда R – коммутативное кольцо.

Библиографический список

1. Мальцев Ю.Н., Журавлев Е.В. Лекции по теории ассоциативных колец. – Барнаул: АлтГПА. – 2014. – 422 с.
2. Дурандина Е.В., Мальцев Ю.Н. О коммутативности колец, удовлетворяющих некоторым коммутаторным тождествам // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2002. – № 1 (23). – С. 18–21.

УДК 512.552.4

Об особенностях строения 2-порожденной нильпотентной алгебры R над полем с ограничениями на $\dim \mathrm{R}^3 / R^4$

Е.П. Петров

АлтГУ, г. Барнаул

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] Л.А. Бокутем была предложена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n-мерных ассоциативных алгебрах над полем (n – фиксированное число). С.А. Пихтильковым в работе [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n < 18$. Ю.Н. Мальцевым в статье [3] изучалось многообразие алгебр M_n, порожденное всеми n-мерными нильпотентными алгебрами (такие многообразия там были описаны для $\mathrm{n} \leq 6$). И.Л. Гусевой в статье [4] было доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $k = \left[\frac{\mathrm{n}}{3}\right] + 2$. В 1991 г. автором в работе [5] была сформулирована гипотеза о том, что произвольная n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, и в качестве подтверждения этой гипотезы был приведен пример n-мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной