$n \leq 2$, либо $n \geq 3$ и $p(1) = 1$, $p'(1) = \left[\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$.
Тогда R – коммутативное кольцо.

Следствие 2. Пусть ассоциативное кольцо R удовлетворяет одному из тождеств:

$$p([x, y]) = [p(x), y] + [x, p(y)],$$

где $p(t) = t - t^2 + t^3, t + t^2 - t^3$.
Тогда R – коммутативное кольцо.

Библиографический список

1. Мальцев Ю.Н., Журавлев Е.В. Лекции по теории ассоциативных колец. – Барнаул: АлтГПА. – 2014. – 422 с.

2. Дурандина Е.В., Мальцев Ю.Н. О коммутативности колец, удовлетворяющих некоторым коммутаторным тождествам // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2002. – № 1 (23). – С. 18–21.

УДК 512.552.4

Об особенностях строения 2-порожденной нильпотентной алгебры R над полем с ограничениями на $\dim \mathrm{R}^3 / R^4$

Е.П. Петров

АлтГУ, г. Барнаул

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] Л.А. Бокутем была предложена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n-мерных ассоциативных алгебрах над полем (n – фиксированное число). С.А. Пихтильковым в работе [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n < 18$. Ю.Н. Мальцевым в статье [3] изучалось многообразие алгебр M_n, порожденное всеми n-мерными нильпотентными алгебрами (такие многообразия там были описаны для $\mathrm{n} \leq 6$). И.Л. Гусевой в статье [4] было доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $k = \left[\frac{\mathrm{n}}{3}\right] + 2$. В 1991 г. автором в работе [5] была сформулирована гипотеза о том, что произвольная n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, и в качестве подтверждения этой гипотезы был приведен пример n-мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра R с условием $\dim \mathrm{R}^2 / R^3 \leq 2$ удовлетворяет данной гипотезе. В целях дальнейшего подтверждения обозначенной гипотезы автором в работах [6]–[9] проведены исследования нильпотентной конечномерной алгебры R, удовлетворяющей для некоторого натурального числа N > 1 условию: $\dim \mathrm{R}^{\mathrm{N}} / \mathrm{R}^{\mathrm{N}+1} = 2$, с описанием ее строения, определяющих соотношений и тождеств. В частности, доказано, что такая алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени N+2.

Из полученных автором результатов ясно, что степень стандартного тождества в алгебре R с условием $\dim \mathrm{R}^{\mathrm{N}} / R^{\mathrm{N}+1} = 2$, N>1, не зависит от величины индекса нильпотентности алгебры R. В случае, когда $\dim \mathrm{R}^2 / \mathrm{R}^3 = 3$, такой независимости уже нет. В [10] автором замечено, что для любого натурального числа k найдется конечномерная нильпотентная алгебра R над произвольным полем с условием $\dim \mathrm{R}^2 / \mathrm{R}^3 = 3$, не удовлетворяющая никакому полилинейному тождеству степени k.

Заметим, что нильпотентная конечномерная алгебра R с условием $\dim \mathrm{R}^{\mathrm{N}} / \mathrm{R}^{\mathrm{N}+1} = 2$ является в некотором смысле опорной для дальнейшего изучения произвольных нильпотентных конечномерных алгебр, для которых $\dim \mathrm{R}^{\mathrm{N}} / R^{\mathrm{N}+1} > 2$. При этом для нахождения тождеств, которым удовлетворяют такие алгебры, описание их строения и изучение их определяющих соотношений является весьма важным.

В [10] автором отмечалось, что для конечномерной нильпотентной алгебры R над алгебраически замкнутым полем, которая удовлетворяет условию $\dim \mathrm{R}^2 / \mathrm{R}^3 = 3$ и в которой выполняется одно единственное определяющее соотношение, для любого натурального k> 2 имеет место одно из следующих равенств: $\dim \mathrm{R}^k / \mathrm{R}^{k+1}$ = k+1 или $\dim \mathrm{R}^k / \mathrm{R}^{k+1} = F_{k+2}$, где F_n – числа Фибоначчи.

Имеют место также следующие результаты.

Предложение 1. В нильпотентной 2-порожденной алгебре R над алгебраически замкнутым полем с условием

$$\dim \mathrm{R}^2 / \mathrm{R}^3 = \dim \mathrm{R}^3 / \mathrm{R}^4 = 3$$

для любого k > 3 имеют место ограничения $\dim \mathrm{R}^k / \mathrm{R}^{k+1} \leq 4$.

Предложение 2. В нильпотентной 2-порожденной алгебре R над алгебраически замкнутым полем со следующими условиями:

$$\dim \mathrm{R}^2 / \mathrm{R}^3 = \dim \mathrm{R}^3 / \mathrm{R}^4 = 3, \dim \mathrm{R}^4 / \mathrm{R}^5 \geq 3,$$

при подходящем выборе порождающих базис R^3/R^4 с точностью до антиизоморфизма имеет один из следующих видов: $\{a^3, a^2b, aba\}$, $\{a^3, a^2b, ab^2\}$, $\{a^3, a^2b, ba^2\}$, $\{a^3, a^2b,\ b^3\}$.

Предложение 3. В нильпотентной 2-порожденной алгебре R над алгебраически замкнутым полем со следующими условиями:

$$\dim \mathrm{R}^2 / \mathrm{R}^3 = \dim \mathrm{R}^3 / \mathrm{R}^4 = 3, \dim \mathrm{R}^4 / \mathrm{R}^5 \geq 3,$$

у которой базис R^3/R^4 может быть представлен только в виде $\{a^3, a^2b, ba^2\}$, выполняются соотношения: $b^2 \equiv 0$ (mod R^3), aba ≡ 0 (mod R^4), bab ≡ 0 (mod R^4).

Остается пока открытым вопрос: какому минимальному тождеству может удовлетворять нильпотентная 2-порожденная алгебра R над полем с условием $\dim \mathrm{R}^2 / \mathrm{R}^3 = \dim \mathrm{R}^3 / \mathrm{R}^4 = 3$.

Библиографический список

1. Днестровская тетрадь: нерешенные проблемы теории колец и модулей: (оперативно-информационный материал). – Новосибирск, Ин-т математики СО АН СССР, 1982.

2. Пихтильков С.А. О многообразиях, порожденных n-мерными алгебрами. – Тульский политехнический институт, Тула (1980), Деп. в ВИНИТИ, № 1213-80.

3. Мальцев Ю.Н. О тождествах нильпотентных алгебр // Известия вузов, Мат. – 1986. – № 9. – С. 68-72.

4. Гусева И.Л. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Международная конференция по алгебре памяти А.И. Мальцева: сборник трудов, Новосибирск, август 1989. – С. 43.

5. Петров Е.П. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Алгебра и логика. – 1991. – Т. 30, вып. 5. – С. 540-556.

6. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества нильпотентной конечномерной алгебры R с условием $\dim \mathrm{R}^2 / R^3 = 2$ // Сибирские электронные математические известия. – 2016. – № 13. – С. 1052-1066.

7. Петров Е.П. Строение, определяющие соотношения и тождества конечномерной нильпотентной алгебры R с условием $\dim \mathrm{R}^{\mathrm{N}} / \mathrm{R}^{\mathrm{N}+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. – 2017. – № 14. – С. 1153-1187.

8. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества конечнопорожденной нильпотентной алгебры R с условием $\dim \mathrm{R}^{\mathrm{N}} / R^{\mathrm{N}+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. – 2018. – № 15. – С. 1048-1064.

9. Петров Е.П. О стандартном тождестве в конечнопорожденной нильпотентной алгебре R над произвольным полем с условием $\dim \mathrm{R}^{\mathrm{N}} / R^{\mathrm{N}+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – № 16. – С. 1981-2002.

10. Петров Е.П. О строении, определяющих соотношениях и тождествах в 2-порожденной нильпотентной алгебре R с условием $\dim \mathrm{R}^2 / R^3 = 3$ // Межд. конференция «Мальцевские чтения», 19–23 августа 2019 г., тезисы докладов, Новосибирск. – С. 169-170.

ПОДСЕКЦИЯ ГЕОМЕТРИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УДК 514.765

Исследование конформно киллинговых векторных полей на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях

Т.А. Андреева [1], Д.Н. Оскорбин [1], Е.Д. Родионов [1]

[1] АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию конформно киллинговых векторных полей на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях. Конформно киллинговы поля играют важную роль в теории солитонов Риччи, а также порождают важный класс локально конформно однородных (псевдо)римановых многообразий. В римановом случае В.В. Славским и Е.Д. Родионовым было доказано, что такие пространства являются либо конформно плоскими, либо конформно эквивалентны локально однородным римановым многообразиям. В псевдоримановом случае вопрос их строения остается открытым.

Ключевые слова: *конформно киллинговы векторные поля, лоренцевы многообразия, k-симметрические пространства.*

Псевдориманово многообразие (M, g) называется симметрическим порядка k, если $\nabla^k R = 0$, $\nabla^{k-1} R \neq 0$, где $k \geq 1$ и R – тензор кривизны (M, g)

Симметрические лоренцевы многообразия порядков 2 и 3 изучены в работах Галаева, Алексеевского [1], Сеновиллы [2].

Векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии (M, g) называется конформно киллинговым векторным полем, если