Далее значения эйлеровой характеристики суммируются. На выходе программа выдает три функционала Минковского для двумерного цифрового изображения: периметр, площадь, эйлерова характеристика.

При написании алгоритма были использованы результаты подсчета типов точек двумерных цифровых симплексов из работы Я.В. Базайкина [4].

Библиографический список

1. C.H. Arns, M.A. Knackstedt, K.R. Mecke. Characterisation of irregular spatial structures by parallel sets and integral geometric measures // Colloids and Surfaces A. – 2015. – T.24. – C. 352–359.

2. C.H. Arns, M.A. Knackstedt, W.V. Pinczewski, and K.R. Mecke. Euler – Poincare' characteristics of classes of disordered media // Cambridge University Press. – 2004.

3. Базайкин Я.В. Лекции по вычислительной топологии: Учебно – метод. Пособие. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2017. – 57с.

4. Богоявленская О.А. О вычислении функционалов Минковского четырехмерных цифровых изображений. – М.: Научно-исслед. вычислит. центр МГУ им. М.В. Ломаносова, 2020. – 170с.

УДК 514.745.82

Вопросы единственности и устойчивости циклов в многомерных моделях генных сетей

***В.П. Голубятников*[1,2]**

[1]Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, г. Новосибирск; [2]НГУ, г. Новосибирск

Статья посвящена вопросам единственности и устойчивости циклов в многомерных моделях генных сетей.

Ключевые слова: *многомерные динамические системы, кольцевые генные сети.*

Мы продолжаем изучение многомерных динамических систем, моделирующих функционирование кольцевых генных сетей. В работах [1, 2] нами были установлены условия единственности и устойчивости цикла в трёхмерной модели кольцевой генной сети. Здесь мы будем рассматривать подобные динамические системы размерности 4 и 6, имеющие вид

$$dx_1/dt = L_1(x_4) - k_1x_1; \quad dx_2/dt = \Gamma_2(x_1) - k_2x_2;$$
$$dx_3/dt = \Gamma_3(x_2) - k_3x_3; \quad dx_4/dt = \Gamma_4(x_3) - k_4x_4 \; . \qquad (1)$$

и, соответственно,

$$dx_1/dt = L_1(x_6) - k_1x_1;\ dx_2/dt = \Gamma_2(x_1) - k_2x_2;$$
$$dx_3/dt = L_3(x_2) - k_3x_3;\ dx_4/dt = \Gamma_4(x_3) - k_4x_4; \qquad (2)$$
$$dx_5/dt = L_5(x_4) - k_5x_5;\ dx_6/dt = \Gamma_6(x_5) - k_6x_6.$$

Через x_j здесь обозначены концентрации компонент генных сетей, участвующих в биохимических реакциях, положительные коэффициенты k_j характеризуют скорости разложения этих компонент, а ступенчатые функции Γ_j и L_j описывают положительные и, соответственно, отрицательные обратные связи в генных сетях и определяются следующим образом:

$\Gamma_j(x) = 0$, если $0 \le x \le 1$ и $\Gamma_j(x) = A_j > k_j$, если $1 < x$;

$L_j(x) = B_j > k_j$, если $0 \le x \le 1$ и $L_j(x) = 0$, если $1 < x$.

Подобные динамические системы, в том числе и со ступенчатыми функциями в правых частях, рассматривались в [3, 4] в несколько упрощённой форме, у системы (1) в работе [3] все коэффициенты разложений k_j предполагались равными единице (безразмерный случай), а система (2) предполагалась симметричной относительно циклических перестановок $(x_1,x_2) \to (x_3,x_4) \to (x_5,x_6) \to (x_1,x_2)$ пар переменных этих систем уравнений. Поскольку различные компоненты генных сетей имеют, вообще говоря, различные кинетические характеристики, в наших рассмотрениях мы таких упрощающих предположений не делаем.

Траектории обеих динамических систем (1) и (2) располагаются в положительных октантах евклидовых пространств $\boldsymbol{R}^4$, соответственно, $\boldsymbol{R}^6$. Далее мы займёмся описанием локализации циклов этих систем в их фазовых портретах, то есть в соответствующих октантах. Из этих комбинаторно-геометрических рассмотрений вытекают основные результаты настоящей работы.

Как следует из [5, 6], параллелепипеды

$$Q^6 = [0, B_1]\times[0, A_2]\times[0, B_3]\times[0, A_4]\times[0, B_5]\times[0, A_6] \subset \boldsymbol{R}^6$$

и $Q^4 = [0, B_1]\times[0, A_2]\times[0, A_3]\times[0, A_4] \subset \boldsymbol{R}^4$ являются положительно инвариантными областями в содержащих их положительных октантах.

Рассмотрим для начала фазовый портрет динамической системы (1). Ввиду неравенств $A_j > k_j$, $B_j > k_j$, точка E=(1, 1, 1, 1) содержится во внутренности инвариантного параллелепипеда Q^4. Проходящие через эту точку гиперплоскости $x_j = 1$ разбивают Q^4 на 16 более мелких параллелепипедов, которые мы будем называть блоками и нумеровать бинарными мульти-индексами $\{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\}$ следующим образом: $\varepsilon_j = 0$, если в данном блоке $x_j < 1$, и $\varepsilon_j = 1$ в противном случае; здесь j = 1, 2, 3, 4.

В работе [3], см. также [5], при указанных выше упрощающих предположениях была описана следующая циклическая диаграмма (State Transition Diagram):

$$\begin{gathered}\to\{0000\}\to\{1000\}\to\{1100\}\to\{1110\}\to\{1111\}\to \\ \{0111\}\to\{0011\}\to\{0001\}\to\{0000\}\to\end{gathered} \tag{3}$$

В рассматриваемом нами общем, небезразмерном случае в этой диаграмме перечислены все восемь блоков, из которых траектории системы (1) могут переходить только в один соседний блок через разделяющую их трёхмерную грань. Эти переходы в диаграмме обозначены стрелками; такие построения в подробностях описаны в работе [6] для широкого круга многомерных динамических систем, аналогичных (1) и (2). Таким образом, объединение W_1 этих восьми блоков является инвариантной областью системы (1). В работах [2, 7] такие блоки называются одновалентными.

ТЕОРЕМА 1. Если $A_j > k_j$, $B_j > k_j$ при всех j=1, 2, 3, 4, то динамическая система (1) имеет в точности один цикл. Этот цикл проходит по блокам, образующим диаграмму (3), в соответствии с её стрелками и экспоненциально устойчив.

В точности такие же построения можно проделать и в инвариантной области Q^6 динамической системы (2), которая разбивается шестью гиперплоскостями $x_j = 1$ на 64 блока, пронумерованных бинарными мульти-индексами $\{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\}$ так же, как это было сделано для области Q^4. Из результатов работы [6] вытекает, что 12 одновалентных блоков такого разбиения области Q^6 образуют циклическую диаграмму переходов траекторий системы (2) из блока в блок:

$$\begin{gathered}\to\{001100\}\to\{101100\}\to\{111100\}\to\{110100\}\to\{110000\}\to \\ \{110010\}\to\{110011\}\to\{010011\}\to\{000011\}\to\{001011\}\to \\ \{001111\}\to\{001101\}\to\{001100\}\to\ldots\end{gathered} \tag{4}$$

Как и выше, объединение W_1 одновалентных блоков, перечисленных в (4), является инвариантной областью системы (2). Отметим также, что разбиение области Q^6 содержит 12 пятивалентных блоков, точки каждого из них могут переходить вдоль своих траекторий в пять соседних блоков. Оставшиеся 40 блоков разбиения имеют валентность три, это значит, что траектории точек каждого из этих блоков могут переходить в три соседних блока. Например, блок {011100} является трёхвалентным, траектории его точек могут переходить в точности в три соседних блока – в одновалентные блоки {111100}, {001100}, и в трёхвалентный блок {010100}. Значит для системы (2) объединение трёхвалентных блоков W_3 не является инвариантной областью.

ТЕОРЕМА 2. Если $A_j > k_j$, $B_j > k_j$ при всех j=1, 2, 3, 4, 5, 6, то динамическая система (2) имеет в области W_1, образованной одновалентными блоками, в точности один цикл. Этот цикл проходит по блокам, образующим диаграмму (4), в соответствии с её стрелками и экспоненциально устойчив.

Поведение траекторий многомерных (n>4) динамических систем вида (1), (2) и их аналогов вне объединений их одновалентных блоков выглядит гораздо сложнее, чем в инвариантных областях W_1. Дополнения $Q^n \setminus W_1$ не являются инвариантными областями, но в них могут содержаться и циклы, и инвариантные поверхности соответствующих динамических систем. В частности, для пятимерной симметричной динамической системы $dx_j/dt = L(x_{6-1}) - x_j$; j=1,2,…,5, j–1 = 5 при j=1; у которой ступенчатая функция L определяется так же, как и выше, в работе [7] установлены достаточные условия существования цикла в неинвариантной области W_3. Для такой системы область W_1 также содержит в точности один цикл этой системы, что следует из соответствующего аналога теоремы 1. Этот цикл устойчив.

Автор выражает искреннюю благодарность Л.С. Минушкиной, Н.Б. Аюповой и В.В. Иванову за полезные обсуждения и критические замечания.

Библиографический список

1. Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P. On the uniqueness of a cycle in an asymmetric three-dimensional model of a molecular repressilator // Journ. of Applied and Industrial Mathematics – 2014. – V. 8, № 2. – P. 153–157.

2. Golubyatnikov V.P., Ivanov V.V. Uniqueness and stability of a cycle in three-dimensional block-linear circular gene networks models // Siberian Journal of Pure and Appl. Mathematics – 2018. – V. 18, № 4. – P. 19–28.

3. Glass L., Pasternack J.S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // Journal of Mathematical Biology – 1978. – V. 6 – P. 207–223.

4. Elowitz M.B., Leibler S. A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators // Nature – 2000. – V. 403. – P. 335–338.

5. Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P. On two classes of non-linear dynamical systems: the four-dimensional case // Siberian Mathematical Journal – 2015. – V. 56, № 1. – P. 231–236.

6. Кириллова Н.Е., Минушкина Л.С. О дискретизации фазовых портретов динамических систем // Вестник Алтайского Государственного Университета – 2019. – № 4 (108). – С. 82–85.

7. Golubyatnikov V.P., Gradov V.S. On non-uniqueness of a cycles in some PL circular gene networks models // Siberian Advances in Mathematics – 2021. – V.31, № 1. – P. 1–12.

УДК 517.954

Задача Дирихле для листа Мёбиуса

***В.П. Голубятников*[1,2]**

[1]*Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, г. Новосибирск;* [2]*НГУ, г. Новосибирск*

В статье рассматривается решение задачи Дирихле для листа Мёбиуса.

Ключевые слова: *задача Дирихле, лист Мёбиуса.*

Рассмотрим лист Мёбиуса $\boldsymbol{M}$ со стандартной плоской евклидовой метрикой. $\boldsymbol{M} = [0,\pi]\times[-1,+1]$: $0 \le\varphi\le \pi$; $-1\le p\le+1$; с отождествлением по изометрии $(0,p)\equiv(\pi,\ -p)$. Границу $\partial\boldsymbol{M}$ будем отождествлять с окружностью, параметризованной углом ψ, $0 \le \psi \le 2\pi$. Метрика на $\boldsymbol{M}$ локально евклидова, поэтому дифференциальный оператор Лапласа можно представить в виде $\Delta = \partial^2/\partial\varphi^2+\partial^2/\partial p^2$.

Будем решать на многообразии $\boldsymbol{M}$ задачу Дирихле: найти такую функцию $u = u(\varphi,p)$, что $\Delta u=0$; $u(\varphi,+1)=f(\varphi)$; $u(\varphi, -1)=f(\varphi+ \pi)$.

Обозначим через f^+ и f^- чётную и нечётную части граничных условий:

$f^+(\varphi) = [f(\varphi)+ f(\varphi+ \pi)]/2 = f^+(\varphi+ \pi)$; $f^-(\varphi) = [f(\varphi) - f(\varphi+ \pi)]/2 = - f^-(\varphi+ \pi)$;

эти функции разлагаются в ряды Фурье следующим образом:

$$f^+(\varphi) = a_0 + \sum [a_{2m} \cos 2m\varphi + b_{2m} \sin 2m\varphi]; \qquad (1)$$

$$f^-(\varphi) = \sum [a_{2m+1} \cos (2m+1)\varphi + b_{2m+1} \sin (2m+1)\varphi]. \qquad (2)$$

Здесь и далее все суммирования производятся от $m=1$ до ∞.

Решение $u^+(\varphi,p)$ задачи Дирихле с чётными граничными условиями $f^+(\varphi)$ ищем в виде суперпозиций $u^+(\varphi,p) = A^+(\varphi)\cdot B^+(p)$. В уравнении $\Delta u^+=0$ переменные разделяются: $\partial^2 A^+/\partial \varphi^2 + \lambda^2 A^+=0$; $\partial^2 B^+/\partial p^2 = \lambda^2 B^+$.