3. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion //Differential Geometry and its Applications. 2016. Vol. 46.

4. Muniraja G. Manifolds Admitting a Semi-Symmetric Metric

Connection and a Generalization of Schur's Theorem // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2008.Vol. 3, No 25.

5. Barua B., Ray A. Kr. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. pure appl. Math. 1985. Vol. 16, № 7.

6. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. Vol. 21.

7. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных метрических группах Ли с векторным

кручением // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 181. №. 3

8. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально симметрических (псевдо)римановых многообразиях с векторным кручением // Математические заметки СВФУ. 2019. Т. 26. №. 4.

УДК 517.16

Плотникова Е.А., Саженков А.Н.

Некоторые геометрические приемы доказательства неравенств

Е.А. Плотникова[1], А.Н. Саженков[2]

[1]Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск; [2]АлтГУ, г. Барнаул

В работе рассматривается два приема доказательства неравенств основанные на соображении выпуклости функций.

Ключевые слова: *неравенства, неравенство Караматы, неравенство Йенсена, выпуклые и вогнутые функции,мажорирующий набор.*

Достаточно сложные неравенства, например предлагаемые для доказательства на математических соревнованиях различного уровня, решаются при помощи сочетания нескольких разных идей, в том числе и геометрических [1-2].

Далее рассматриваются два приема доказательства неравенств, основанные на соображении выпуклости функций.

Пусть f – функция, числа a_1, a_2, …, a_n лежат на интервале (u, v). Предположим мы зафиксировали число $a = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ (если неравенство однородное, то это стандартный прием) и мы хотим доказать неравенство: $f(a_1) + f(a_2) + \dots f(a_n)$ больше либо равно (или меньше либо равно) чем $n \cdot f(a)$. Сейчас будет предложено два метода решения такой задачи.

Фиксируем $a = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$. Даже если f не является выпуклой, то будем делать попытку использовать касательную, доказывая неравенство: $f(x) \ge f(a) + f'(a)(x - a)$.

Если это неравенство удастся сохранить для всех x, то простое суммирование неравенства даст нам желаемый вывод. Этот метод называется трюком с касательной линией.

Например**,** если a, b, c – положительные и $a + b + c = 3$, докажите, что $18\sum\limits_{cyc} \dfrac{1}{(3-c)(4-c)} + 2(ab + bc + ca) \ge 15$.

Во-первых, неравенство сводится к $\sum\limits_{cyc}\left(\dfrac{18}{(3-c)(4-c)} - c^2\right) \ge 6$.

Используем идею касательной в точке $c = 1$. $\dfrac{18}{(3-c)(4-c)} - c^2 \ge \dfrac{c+3}{2}$

это неравенство равносильно неравенству $c(c - 1)^2(2c - 9) \le 0$ и суммируем.

Рассмотрим еще один прием.

($n - 1$ EV). Пусть f: $R \to R$ имеет ровно одну точку перегиба, $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ – действительные числа и их сумма фиксированная. Тогда, если $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)$ принимает экстремальное значение, то $n - 1$ из a_k равны между собой.

Для определенности рассмотрим задачу минимизации. Идея доказательства состоит в следующем. Пусть q – точка перегиба функции f. Можно считать, что в этой точке вогнутость меняется на выпуклость. Пусть $a_1 + a_2 + \dots + a_n = s$, функция имеет минимум.

Если $q \le a_1$, то в силу выпуклости функции:

$$f(a_1) + ... + f(a_n) \ge nf\left(\frac{a_1 + ... + a_n}{n}\right)$$

иными словами, минимум приводит к равенству всех a_k между собой. Очевидно, что если $a_1 < q \le a_2$, теорема также остается справедливой. Пусть теперь $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_m < q \le a_{m+1} \le \dots \le a_n$.

Набор $\{q, q, \ldots, q, a^* = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) - (m-1)q\}$, содержащий в себе q в количестве $m - 1$ штук, мажорирует набор $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, то есть, во-первых, $kq \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, во-вторых, суммы наборов равны. Поскольку f вогнутая слева от q, имеет место неравенство: $f(a_1)+\ldots+f(a_m) \geq f(a^*)+(m-1)f(q)$ (неравенство Караматы). Итак, в точке перегиба собрались, кроме быть может одной, точки, лежавшие слева от неё. Таким образом, все оставшиеся точки и попавшие в точку перегиба находятся в зоне выпуклости функции. Следовательно, применив неравенство Йенсена, получим требуемый результат.

Приведем пример применения этого приёма.

Пусть a, b, c – положительные числа. Необходимо доказать, что выполняется неравенство: $1 \leq \sum\limits_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} < 2$.

Сделаем подстановки $e^x = \frac{bc}{a^2}$, $e^y = \frac{ca}{b^2}$, $e^z = \frac{ab}{c^2}$. Ясно, $x + y + z = 0$ и требуется заметить, что $1 \leq f(x) + f(y) + f(z) < 2$, где $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+8e^x}}$.

Вторая производная $f''(x) = \frac{4e^x\left(4e^x - 1\right)}{\left(1+8e^x\right)^{\frac{5}{2}}}$ меняет знак один раз. В силу (n – 1 EV) можно рассматривать случай, когда $x = y$. Положив $t = e^x$, получаем, неравенство, равносильное исходному неравенству $1 \leq \frac{2}{\sqrt{1+8t}} + \frac{1}{\sqrt{1+8/t^2}} < 2$. Его справедливость устанавливается традиционными методами дифференциального исчисления.

Библиографический список

1. Chen Evan. A Brief Introduction to Olympiad Inequalities.2014. – 10 p.

2. Саженков А.Н. Классические олимпиадные темы. Часть 2. Практикум. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2006. – 44 с.