УДК 579.64

О продолжении решений функционального мультипликативного уравнения Синцова.

И.В. Поликанова
Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул

В статье показывается, что продолжение решений уравнения Синцова, вообще говоря, неоднозначно, но единственность продолжения может иметь место при определённом виде области задания решений.

Ключевые слова: *функциональные уравнения, уравнения Синцова.*

Одно и то же функциональное уравнение может иметь как одно, так и много решений в зависимости от класса, в котором ищется решение, а также от множества задания искомых функций. Чем строже условия, налагаемые на функцию, тем множество решений уже. С другой стороны, если области задания A и B искомых функций связаны соотношением $A \subset B$, то всякая функция, являющаяся решением на «большем» множестве B, является решением и на «меньшем» множестве A. Это обстоятельство по незрелом размышлении может породить мысль, что класс решений, определённых на множестве A, обширнее (не меньшей мощности), чем класс решений, определённых на множестве B. Порой это так и есть, как в случае с уравнением Коши

$$g(x+y) = g(x)\cdot g(y),$$

единственным решением которого на множестве R действительных чисел является постоянная функция $g(x) \equiv 0$, а на множестве положительных действительных чисел решениями являются показательные функции a^x, $a > 0$ и $g(x) \equiv 1$. Высказанное предположение было бы справедливо, если бы всякая функция, определённая на «меньшем» множестве, имела единственное продолжение на «большее» множество. Функциональное уравнение Синцова даёт пример ошибочности такого суждения. Как известно [1, 2], решениями уравнения Синцова

$$\varphi(x,y)\cdot\varphi(y,z) = \varphi(x,z) \tag{1}$$

в классе функций, определённых на произвольном декартовом квадрате $S \times S$, со значениями в R являются постоянная функция $\varphi(x,y) \equiv 0$, а также функции вида

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x)}{f(y)}, \tag{2}$$

где $f(x)$: $S \to R$ – произвольная обратимая в S (не обращающаяся в 0 ни в одной точке множества S) функция. Отсюда следует, что $\varphi(x,y)$ самообратима в $S \times S$ и

$$\varphi(x,x) = 1 \text{ для всех } x \in S. \tag{3}$$

Приведём примеры, когда решения функционального уравнения Синцова (1), определённые на подмножествах $S \times S$, имеют много продолжений, и когда – единственное.

Будем говорить, что функция $f(x)$ порождает функцию $\varphi(x,y)$, если выполнено равенство (2).

Замечание 1. Порождающие функции определены с точностью до постоянного ненулевого множителя.

Всюду ниже $\{S_1, S_2\}$ – произвольное разбиение множества S, т.е.

$$S_1 \cup S_2 = S, S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset.$$

Предложение 1. *Продолжениями решения $\varphi_0(x,y) \not\equiv 0$ уравнения (1) с множества $S_1 \times S_1$ на $S \times S$ являются функции, порождаемые функциями вида*

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \varphi_0(x,a), & x \in S_1 \\ g(x), & x \in S_2 \end{cases}, \tag{4}$$

где $g(x)$ – произвольная обратимая функция на S_2, $a \in S_1$, c – постоянная, отличная от 0.

Предложение 2. *Продолжениями решения $\varphi_0(x,y) \not\equiv 0$уравнения (1) с множества $(S_1 \times S_1) \cup (S_2 \times S_2)$ на $S \times S$ являются функции, порождаемые функциями вида*

$$f(x) = \begin{cases} c_1 \cdot \varphi_0(x,a), & x \in S_1 \\ c_2 \cdot \varphi_0(x,b), & x \in S_2 \end{cases}, \tag{5}$$

где $a \in S_1, b \in S_2$, c_1, c_2 – постоянные, не равные 0.

Замечание 2. Ввиду замечания 1 функцию (4) в предложении 1 можно заменить на

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_0(x,a), & x \in S_1 \\ g(x), & x \in S_2 \end{cases}, \tag{6}$$

а функцию (5) в предложении 2 на функцию

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \varphi_0(x,a), & x \in S_1 \\ \varphi_0(x,b), & x \in S_2 \end{cases}, c \neq 0. \tag{7}$$

Предложение 3. *Единственным продолжением решения*

$$\varphi_0(x,y) \not\equiv 0$$

уравнения (1) с множества $Q = (S_1 \times S_1) \cup (S_2 \times S_2) \cup \{(a,b)\}$, *где* $(a,b) \in S_1 \times S_2$, *на* $S \times S$ *являются функции, порождаемые функциями вида*

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_0(x,a) \cdot \varphi_0(a,b), & x \in S_1 \\ \varphi_0(x,b), & x \in S_2 \end{cases}. \tag{6}$$

Доказательство. Проверим, что функция (6) порождает решение $\varphi(x,y)$ уравнения Синцова, совпадающее на множестве Q с $\varphi_0(x,y)$. В самом деле, для $(x,y) \in S_1 \times S_1$

$$\varphi(x,y) = \frac{\varphi_0(x,a) \cdot \varphi_0(a,b)}{\varphi_0(y,a) \cdot \varphi_0(a,b)} = \frac{\varphi_0(x,a)}{\varphi_0(y,a)} = \varphi_0(x,y),$$

для $(x,y) \in S_2 \times S_2$

$$\varphi(x,y) = \frac{\varphi_0(x,b)}{\varphi_0(y,b)} = \varphi_0(x,y),$$

и для $(a,b) \in S_1 \times S_2$ ввиду (3) можем записать:

$$\varphi(a,b) = \frac{f(a)}{f(b)} = \frac{\varphi_0(a,a) \cdot \varphi_0(a,b)}{\varphi_0(b,b)} = \varphi_0(a,b).$$

Значит, функция $\varphi(x,y)$ – продолжение решения $\varphi_0(x,y)$ на $S \times S$. Докажем, её единственность. Пусть $\psi(x,y)$ – какое-либо продолжение решения $\varphi_0(x,y)$ на $S \times S$. Достаточно убедиться, что для любого $(x,y) \in (S_1 \times S_2) \cup (S_2 \times S_1)$ справедливо: $\psi(x,y) = \varphi(x,y)$. Пусть $(x,y) \in S_1 \times S_2$. Тогда $(x,a) \in S_1 \times S_1, (y,b) \in S_2 \times S_2$, а, поскольку $\psi(x,y)$ – продолжение решения $\varphi_0(x,y)$ на $S \times S$, то $\psi(x,a) = \varphi_0(x,a), \psi(y,b) = \varphi_0(y,b), \psi(a,b) = \varphi_0(a,b)$. Тогда

$$\varphi(x,y)=\frac{f(x)}{f(y)}=\frac{\varphi_0(x,a)\cdot\varphi_0(a,b)}{\varphi_0(y,b)}=\frac{\psi(x,a)\cdot\psi(a,b)}{\psi(y,b)}=$$

$$=\psi(x,a)\cdot\psi(a,y)=\psi(x,y).$$

Аналогично проверяется случай, когда $(x,y)\in S_2\times S_1$. Доказано.

Итак, мы показали множественность продолжений решений уравнения Синцова с подмножеств $S_1\times S_1$ и $(S_1\times S_1)\cup(S_2\times S_2)$ на $S\times S$ и единственность с подмножества $Q=(S_1\times S_1)\cup(S_2\times S_2)\cup\{(a,b)\}$.

В последнем случае можно утверждать, что мощность множества решений уравнений Синцова на Q не меньше мощности решений этих уравнений, определённых на$S\times S$.

Полная характеризация подмножеств множества $S\times S$, определяющих единственность продолжений решений уравнения Синцова, нами пока не получена.

В статьях Д. Гронау [1, 2] даётся экскурс в историю уравнений, носящих имя российско-советского математика Дмитрия Матвеевича Синцова (1867-1946), приводятся некоторые обобщения и применения. Хотя этими уравнениями занимались и другие учёные, например Мориц Кантор и Готлиб Фреге, однако Синцову принадлежит наиболее элегантное решение и в более широком классе функций [1].

Библиографический список

1. Д.М. Синцов. Заметки по функциональному исчислению // Казань: типо-лит. Имп.ун-та. – 1903. – 27 с.

2. Detlef Gronaw. Aremarkon Sincov's functional equation // Notices of the South African Mathematical Society. –2000.–№1 (31). – P. 1–8.

3. Detlef Gronaw. Translation equation and sincov's equation –a historical remark //Proceedings and surveys. – 2014. – v. 46. – P. 43 – 46.