УДК 512.112.3

О некоторых соотношениях в неравнобедренном треугольнике

И.М. Исаев, А.В. Кислицин
Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул

В статье доказывается, что для произвольного неравнобедренного треугольника ABC треугольник HIG является тупоугольным.

Ключевые слова: *треугольник, инцентр, ортоцентр центр тяжести, центр описанной окружности.*

Пусть I – инцентр, O – центр описанной окружности, G – центр тяжести некоторого треугольника ABC. В работе [1] показано, что $\angle IGO > \frac{\pi}{2}$ в произвольном треугольнике ABC, т.е. $\triangle OIG$ – тупоугольный.

В настоящей работе показано, что треугольник HIG также тупоугольный. В качестве следствия из равенства $\angle IGO = \angle HIG + \angle IGH$ вытекает, что $\triangle OIG$ – тупоугольный.

Теорема. Пусть ABC – неравнобедренный треугольник, I – инцентр, O – центр описанной окружности, G – центр тяжести, H – ортоцентр треугольника ABC, a, b, c – длины его сторон. Тогда $\angle HIG > \frac{\pi}{2}$.

Доказательство.

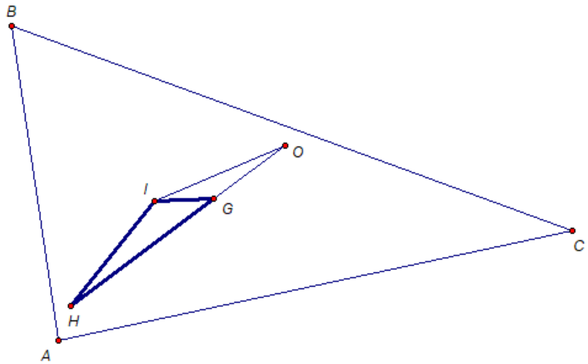

Рисунок 1 – Треугольники, фигурирующие в теореме

Проверим, что $HI^2 + IG^2 < HG^2$. Заметим, что:

$$HI^2 = 2(2R^2 + r^2) - \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2 + c^2) = 4R^2 + 2r^2 - (p^2 - r^2 - 4Rr),$$

$$IG^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr),$$

$$HG^2 = 4OG^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}\,(a^2 + b^2 + c^2) = 4R^2 - \frac{8}{9}\,(p^2 - r^2 - 4Rr).$$

Подставим полученные выражения в неравенство $HI^2 + IG^2 < HG^2$. Получим цепочку равносильных неравенств, каждое из которых равносильно неравенству $HI^2 + IG^2 < HG^2$:

$$4R^2 + 2r^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr) <$$

$$4R^2 - \frac{8}{9}\,(p^2 - r^2 - 4Rr);$$

$$2r + r + 4R + \frac{1}{9}(5r - 16R) < \frac{8}{9}r + \frac{32}{9}R;$$

$$3r - \frac{r}{3} < \frac{4}{3}R; \qquad 2r < R.$$

Окончательно получаем, что неравенство $HI^2 + IG^2 < HG^2$ равносильно неравенству Эйлера: $2r < R$, справедливому во всяком неравнобедренном треугольнике.

Теорема доказана.

Отметим также, что, используя результаты работы [1], можно показать справедливость следующей формулы для нахождения площади треугольника IOG:

$$S_{\triangle IOG} = \frac{|(a-b)||(b-c)||(c-a)|}{24r},$$

доказанной ранее в [2]. Впрочем, используя эту формулу, можно получить формулу площади треугольника IOG, полученную в работе [1], используя задачу 10.36 из книги [3].

Библиографический список

1. Maltsev Y.N., Monastyreva A.S. On some properties of triangle OIG // The teaching of mathematics. – 2020. – Vol. XXIII. – № 2, – pp. 102–108.

2. Кузнецова М.С., Рукшин С.Е. О расстояниях между замечательными точками треугольника // Некоторые актуальные проблемы математики и математического образования. Материалы научной конференции «Герценовские чтения» (Санкт-Петербург, 9–13 апреля, 2018). С. 217–233.

3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. – М.: МЦНМО, 2019. – 640 с.