УДК 510

Секвенциальные числа, структуры и уравнения

Л.Я. Савельев
Новосибирский государственный университет
Институт математики им. С.Л. Соболева,
г. Новосибирск

Введение бесконечных чисел позволяет рассматривать функции с бесконечно малыми и бесконечно большими значениями на бесконечно малых и бесконечно больших интервалах. Это дает возможность вкладывать разрывные вещественные функции в секвенциальные гладкие, применять к ним дифференциальные методы, переносить результаты на исходные функции и оценивать погрешности с любой точностью простыми алгоритмами. Конечные и бесконечные числа образуют стандартные алгебраические и аналитические структуры. Составляются и решаются алгебраические и дифференциальные уравнения с содержательными бесконечными условиями и результатами.

Ключевые слова: *бесконечно малое, секвенциальное число, формальный ряд, метрика, алгебраическое уравнение, дельта-функция, дифференциальное уравнение.*

1. Определения. Секвенциальным числом называется формальный степенной ряд с вещественными коэффициентами, конечным числом отрицательных степеней и базовой мультипликативной группой: $\{\varepsilon i | i \in Z\}$, $\varepsilon i = (1/ni)$, $n \in N$: $x = \sum_{i=m}^{\infty} a_i \varepsilon^i$, где $a_m \neq 0$ $(x \neq 0)$.

Наименьший индекс $m = \operatorname{ord} x$ ненулевого коэффициента $am \neq 0$ числа $x \neq 0$ называется его порядком. Нуль $(ai = 0,\ -\infty < i < \infty)$ имеет бесконечный порядок. Секвенциальные числа образуют поле Σ. Действия определяются правилами для формальных степенных рядов. Подполе из чисел $r = r\,\varepsilon 0$, $r \in P$ поля Σ отождествляется с полем P вещественных чисел.

В поле Σ выделяются кольцо $\Phi = \{x\colon \operatorname{ord} x \geq 0\}$ конечных, кольцо $O = \{x\colon \operatorname{ord} x > 0\}$ бесконечно малых и множество $\Gamma = \{x\colon \operatorname{ord} x < 0\}$ бесконечно больших чисел. Вместо $\alpha \in O$ будем также писать $\alpha \approx 0$.

Секвенциальным вектором называется формальный степенной ряд с целыми индексами, вещественными коэффициентами и базовой мультипликативной группой $\{\varepsilon i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Выделяются пространства с нормами Чебышева, Коши и Евклида. Эти нормированные пространства изоморфны соответственно $l\infty[\mathbb{Z}]$, $l1[\mathbb{Z}]$ и $l2[\mathbb{Z}]$.

2. Линейный порядок. Определим отношение линейного порядка для поля Σ: $x > 0 \Leftrightarrow \text{aord}\, x > 0$ и $x < y \Leftrightarrow y > x \Leftrightarrow y - x > 0$. В частности, $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow \text{aord}\, x < 0$. Верен степенной принцип Архимеда: для каждого строго положительного секвенциального числа x существует номер n[x] такой, что $\varepsilon n[x] < x < \varepsilon{-}n[x]$. Конечные числа представляются на секвенциальной прямой интервалами $r + O = \{x = r + \alpha, \alpha \in O\}$ (атом с центром $r \in P$). Атомы упорядочены по центрам.

Порядковую структуру Σ можно представлять на координатной плоскости сеткой вертикальных прямых. Секвенциальное число изображается семейством точек (i, ai), $i \in Z$ или ломаной через них.

3. Метрика и топология. Абсолютная величина |x| числа x определяется стандартно. Равенство $\rho[x,y] = |x - y|$ определяет метрику для Σ. Секвенциальная топология для Σ определяется базой окрестностей нуля $\{x\colon |x| < \varepsilon n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Сужения метрики и топологии для Σ на множество $\mathbb{R}$ совпадают со стандартными. В секвенциальной топологии атомы являются открытыми и замкнутыми множествами. Атом $r + O$ открыт: $|(r + \alpha) - (r + \alpha - \beta)| < \varepsilon n$ $(|\beta| < \varepsilon n)$. Его дополнение равно объединению атомов и тоже открыто. Топологическое пространство Σ несвязно. Кроме того, отрезки конечных чисел покрываются бесконечными семействами атомов без конечных подпокрытий и не компактны.

4. Распределения масс и вероятностей. Вещественные числа не позволяют непосредственно рассматривать бесконечно длинные отрезки и бесконечно малые плотности. Секвенциальные числа позволяют это сделать. Отрезок $[-\omega, \omega]$ содержит всю вещественную прямую P. На нем можно равномерно распределить единицу массы с постоянной плотностью $\alpha = 2{-}1\varepsilon = 2{-}1\omega{-}1 \approx 0$. Это распределение можно использовать для описания вероятности выбора точки из интервалов в $[-\omega, \omega]$ с помощью случайного механизма: $\Pr[a,b] = 2{-}1\varepsilon(b - a)$. Вероятность выбрать точку из отрезка конечной длины бесконечно мала.

5. Алгебраические уравнения. Бесконечно малые изменения коэффициентов и правых частей позволяют получать содержательные решения не имеющих вещественных решений систем линейных уравнений, мало изменяя адекватность модели.

В некоторых стохастических моделях метеорологии осадков можно использовать двоичную неоднородную марковскую цепь с начальным вектором $A = \{a, 1 - a\}$, матрицами перехода $Q = \{\{p, 1 - p\}, \{1 - q, q\}\}$ и $R = \{\{p + \alpha, 1 - p - \alpha\}, \{1 - q - \alpha, q + \alpha\}\}$, $\alpha \approx 0$ из четного момента в нечетный и нечетного в четный (начиная с нулевого). По степеням определителей Q, R можно оценить влияние изменения $\alpha \approx 0$.

6. Дельта функция. Классическая дельта функция Дирака определяется некорректно: $\delta[0] = \infty$, $\delta[x] = 0$ $(x \neq 0)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$. Ступенька Хевисайда описывает распределенной слева от данной точки массы: $h[x] = 0$ $(x \leq 0)$, $1 (x > 0)$. Функции Дирака и Хевисайда корректно определяются в сложной теории обобщенных функций. Их секвенциальные модификации имеют простые корректные определения.

Треугольной дельта функцией с секвенциальным параметром $\alpha > 0$ назовем функцию $\delta t[x,\alpha] = \{0\ (x < -\alpha), \alpha{-}2(\alpha + x)\ (-\alpha \leq x < 0),\ \alpha{-}2(\alpha - x)\ (0 \leq x \leq \alpha),\ 0\ (x > \alpha)\}$. Если $\alpha \approx 0$, то функция равна нулю вне интервала $(-\alpha, \alpha)$ бесконечно малой длины и бесконечно велика в точке ноль: $\delta t[0, \varepsilon] = \alpha - 1$. Ее интеграл равен единице.

Квадратично сглаженной ступенькой с секвенциальным параметром $\alpha > 0$ назовем функцию $hq[x, \alpha] = \{0\ (x < -\alpha),\ (1 + x/\alpha)2/2\ (-\alpha \leq x < 0),\ (1 + x/\alpha)2/2 - (x/\alpha)2\ (0 \leq x \leq \alpha),\ 1\ (x > \alpha)\}$. Производная квадратично сглаженной ступеньки равна треугольной дельта-функции.

Гладкой дельта-функцией с секвенциальным параметром $\alpha > 0$ назовем функцию $\delta c[\alpha,x] = \{(\alpha\,\gamma){-}1 e{-}\ x^2/\ (\alpha^2 - x^2)\ (|x| < \alpha), 0(|x| \geq \alpha)\}$, где $\gamma = \int_{-1}^{-1}\ e{-}t^2/(1 - t^2)\ dt$. Если $\alpha \approx 0$, то функция равна нулю вне интервала $(-\alpha, \alpha)$ бесконечно малой длины и бесконечно велика в точке ноль: $\delta c[\alpha, 0] = (\alpha\gamma){-}1$. Ее интеграл равен единице, она бесконечно дифференцируема, обладает всеми свойствами классической дельта-функции Дирака и корректно определена.

Гладкой ступенькой с секвенциальным параметром $\alpha > 0$ назовем функцию $hc[\alpha, u] = \int_{-\infty}^{u} \delta c\ [\alpha, x]\, dx$. Производная гладкой ступеньки равна гладкой дельта-функции.

7. Дифференциальные уравнения. В вещественной переменной уравнение $\partial x\ f = \delta$ при $\delta[x] = 0$ $(x \neq 0)$ не имеет не обобщенного решения. В секвенциальной переменной уравнение $\partial x\ f = \delta t$, $\partial x\ f = \delta c$ имеют решения $f = hq$, $f = hc$.

Простейший вариант процесса размножения описывается встречающимся во многих задачах дифференциальным уравнением $\dot{x} = kx$ с решением $x[t] = x0 e kt$. Если коэффициент $k = \varepsilon$ бесконечно мал, а момент $T = \omega = \varepsilon{-}1$ бесконечно велик, то популяция за время T возрастет меньше чем в три раза: $x[T] = x0\ e\varepsilon\omega = x0 e$. Если величину популяции $e kt$ заменить на $e kt + hc[\alpha, t]$, то $\dot{x}[t] = k\ e kt + \delta c[\alpha,t]$. Здесь всюду $k > 0$, при $k < 0$ то же самое уравнение описывает радиоактивный распад.

Пусть $\dot{x} = k\ x2$ и решение $x[t] = k–1(k–1(1/x0) – t)–1$ $(t < k–1(1/x0))$. Если $k = \varepsilon$, то популяция может расти до бесконечного при конечном $x0$ момента $t = \omega(1/x0)$. Заметим, что $T = (\omega/2)\ (1/x0)$ ее величина $x[(\omega/2)\ (1/x0)] = 2x0$ конечна, а $x[\omega(1/x0) – 1) = \omega$ уже бесконечно велика. При больших x прирост идет медленнее, а при маленьких – быстрее.

В книге [2] описан пример с функцией влияния возмущения. Модифицируя его, введем дельта функцию $\delta[x] = \lim\alpha\to0\delta c[x,\alpha]$, обладающую всеми свойствами классической. Следуя рассуждениям книги и рассматривая пределы интегралов $gc[x – t,\alpha] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta c\ [x – t,\alpha] \times g[x]dx$ можно проверить равенство $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\ [x – t] \times g[x]dx = g[t]$ для каждой непрерывной функции g. Вместе с определяющим функцию Грина уравнением $dy/dx = f[x]y + \delta[x – t]$ естественно рассматривать решения уравнений $dy/dx = f[x]y + \delta c[x – t,a]$ при $a\approx0$ и их связь с решением уравнения $dy/dx = f[x]y + g[x]$.

Замечание. Применение формальных лорановских рядов в теории р-адических чисел описано в книге Л. С. Понтрягина [3], послужившей образцом при использовании таких рядов для секвенциальных чисел.

Библиографический список

1. Савельев Л.Я. Секвенциальные метрические пространства // Сб. материалов конф. ЗОНТ-19. Новосибирск, 2019. С. 348–354.

2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск, 2000.

3. Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. М., 2003.

УДК 517.16

О некоторых применениях неравенства Мюрхеда

Е.В. Саженкова[1], Т.В. Саженкова[2]

[1]Новосибирский государственный университет экономики и управления, г. Новосибирск;

[2]Алтайский государственный университет, г. Барнаул

В работе рассматривается сочетание применения неравенства Коши (между средним арифметическим и геометрическим) и неравенства Мюрхеда продуктивное в ряде случаев при доказательстве неравенств.

Ключевые слова: *неравенства, среднее арифметическое, среднее геометрическое, неравенство Мюрхеда, симметрический многочлен, упорядоченный набор.*