Пусть $\dot{x} = k\ x2$ и решение $x[t] = k–1(k–1(1/x0) – t)–1$ $(t < k–1(1/x0))$. Если $k = ε$, то популяция может расти до бесконечного при конечном x0 момента $t = ω(1/x0)$. Заметим, что $T = (ω/2)\ (1/x0)$ ее величина $x[(ω/2)\ (1/x0)] = 2x0$ конечна, а $x[ω(1/x0) – 1) = ω$ уже бесконечно велика. При больших x прирост идет медленнее, а при маленьких – быстрее.

В книге [2] описан пример с функцией влияния возмущения. Модифицируя его, введем дельта функцию $δ[x] = \lim α→0δc[x,α]$, обладающую всеми свойствами классической. Следуя рассуждениям книги и рассматривая пределы интегралов $gc[x – t,α] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta c\ [x – t,α] × g[x]dx$ можно проверить равенство $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\ [x – t] × g[x]dx = g[t]$ для каждой непрерывной функции g. Вместе с определяющим функцию Грина уравнением $dy/dx = f[x]y + δ[x – t]$ естественно рассматривать решения уравнений $dy/dx = f[x]y + δc[x – t,a]$ при $a≈0$ и их связь с решением уравнения $dy/dx = f[x]y + g[x]$.

Замечание. Применение формальных лорановских рядов в теории p-адических чисел описано в книге Л. С. Понтрягина [3], послужившей образцом при использовании таких рядов для секвенциальных чисел.

Библиографический список

1. Савельев Л.Я. Секвенциальные метрические пространства // Сб. материалов конф. ЗОНТ-19. Новосибирск, 2019. С. 348–354.

2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск, 2000.

3. Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. М., 2003.

УДК 517.16

О некоторых применениях неравенства Мюрхеда

Е.В. Саженкова[1], Т.В. Саженкова[2]

[1]*Новосибирский государственный университет экономики и управления, г. Новосибирск;*

[2]*Алтайский государственный университет, г. Барнаул*

В работе рассматривается сочетание применения неравенства Коши (между средним арифметическим и геометрическим) и неравенства Мюрхеда продуктивное в ряде случаев при доказательстве неравенств.

Ключевые слова: *неравенства, среднее арифметическое, среднее геометрическое, неравенство Мюрхеда, симметрический многочлен, упорядоченный набор.*

Разумное сочетание различных доказательных приёмов позволяет успешно решать многие задачи, в том числе задачи на доказательство достаточно сложных неравенств. К таким относятся, например, неравенства, предлагаемые для доказательства на математических соревнованиях различного уровня [1, 2].

Далее рассматривается продуктивное в ряде случаев сочетание неравенства Коши между средним арифметическим и геометрическим и неравенства Мюрхеда, которое позволяет сравнивать значения некоторых симметрических многочленов на одном и том же наборе неотрицательных значений аргументов.

Обозначения. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – упорядоченный набор целых неотрицательных чисел, $T_a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – симметрический многочлен от n переменных, который есть, по определению, сумма всех одночленов вида $x_{\pi(1)}^{a_1} \cdot x_{\pi(2)}^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(n)}^{a_n}$ по всем перестановкам π порядка n. Степени $a_1, a_2, \ldots, a_n$ фиксированы, переменные пробегают все перестановки.

Пусть имеются две последовательности $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ такие, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ и для $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_k$. Тогда говорим, что $\{a_n\}$ мажорирует $\{b_n\}$, обозначаем $\{a_n\} \succ \{b_n\}$.

Пример 1. $T_{(5,1)}(x, y) = x^5y + xy^5$, $T_{(4,2)}(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4$.

Пример 2. $(5, 1) \succ (4, 2)$ так, как $5 > 4$, $5 + 1 = 4 + 2$.

Теорема (Неравенство Мюрхеда). Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ два упорядоченных набора чисел, при этом $\{a_n\}$ *мажорирует* $\{b_n\}$. Тогда для положительных чисел $\{x_k\}$ выполняется неравенство

$$T_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq T_b(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример 3. Поскольку $(5, 0, 0) \succ (3, 1, 1) \succ (2, 2, 1)$, имеем: $a^5 + a^5 + b^5 + b^5 + c^5 + c^5 \geq a^3bc + a^3bc + b^3ca + b^3ca + c^3ab + c^3ab \geq a^2b^2c + a^2b^2c + b^2c^2a + b^2c^2a + c^2a^2b + c^2ab^2$. Кратко:

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^3bc + b^3ca + c^3ab \geq a^2b^2c + b^2c^2a + c^2a^2b.$$

Доказательство теоремы интересно использованием, так называемого, приёма "сбрасывания кирпича" и базируется на лемме с этим названием.

Лемма (сбрасывание кирпича). Пусть в условиях теоремы набор $\{b_n\}$ таков, $b_1 = a_1 - c$, $b_2 = a_2 + c$, $b_k = a_k$ $(k \geq 3)$. В этом случае каждый одночлен вида $x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} x_{i_3}^{a_3} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}^{a_n}$ заменяется на одночлен вида $x_{i_1}^{a_1 - c} x_{i_2}^{a_2 + c} x_{i_3}^{a_3} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}^{a_n}$.

Сгруппируем все одночлены парами: $x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} x_{i_3}^{a_3} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}^{a_n}$, $x_{i_2}^{a_1} x_{i_1}^{a_2} x_{i_3}^{a_3} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}^{a_n}$ и $x_{i_1}^{a_1 - c} x_{i_2}^{a_2 + c} x_{i_3}^{a_3} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}^{a_n}$, $x_{i_2}^{a_1 - c} x_{i_1}^{a_2 + c} x_{i_3}^{a_3} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}^{a_n}$. Ясно, что надо посмотреть разность:

$$x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}-x^{a_1-c}y^{a_2+c}-x^{a_1+c}y^{a_2-c}=x^{a_1-c}y^{a_2}(x^c-y^c)-x^{a_2-c}y^{a_1}(x^c-y^c)==y^cx^{a_2-c}y^{a_1}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^c-1\right)\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{a_1-c-a_2}-1\right).$$

Поскольку $c>0$ и $a_1-(a_2+c)\geq 0$ числа $\left(\frac{x}{y}\right)^c-1$ и $\left(\frac{x}{y}\right)^{a_1-c-a_2}-1$ одного знака, $T_a(x_1, x_2, \ldots, x_n)\geq T_b(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при «сбрасывании одного кирпича».

Для завершения доказательства исходного неравенства достаточно заметить, что если $\{a_n\}\succ\{b_n\}$, то от $\{a_n\}$ можно перейти к $\{b_n\}$, последовательно изменяя по одной координате.

Задача 1. Докажем, что если $abc = 1$, то $a^2 + b^2 + c^2\geq a + b + c$.

Решение. Изначально надежды на применение неравенства между средним арифметическим и геометрическим или неравенства Мюрхеда даже не возникает, поскольку они требуют одинаковую степень.

Но учтем условие $abc = 1$ и попробуем доказать неравенство:

$$a^2 + b^2 + c^2\geq a^{1/3}b^{1/3}c^{1/3}(a + b + c).$$

Теперь имеем два симметрических многочлена второй степени:

$$T_{(2,\,0,\,0)}(a, b, c) \text{ и } T_{(4/3,\,1/3,\,1/3)}(a, b, c).$$

Легко проверить, что $(2, 0, 0) \succ (4/3, 1/3, 1/3)$. Значит $a^2 + b^2 + c^2\geq a^{1/3}b^{1/3}c^{1/3}(a + b + c)$.

Задача 2. Докажем, что если $a+b+c=1$, то

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq 3+2\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}.$$

Решение. Умножаем на abc и получаем эквивалентное неравенство $ab+bc+ca\leq 3abc+2\cdot(a^3+b^3+c^3)$, а умножением на единицу левой части этого неравенства приходим к следующему виду исходного неравенства:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\leq 3abc+2\cdot(a^3+b^3+c^3).$$

Раскрываем скобки и после преобразований получаем эквивалентное неравенство:

$$2\cdot(a^3+b^3+c^3)\geq a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b.$$

Применяя неравенство Мюрхеда, получаем, что это $T_{(3,\,0,\,0)}\geq T_{(2,\,1,\,0)}$. Далее неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим говорит, что можно двигаться так:

$$\frac{2a^3+b^3}{3}\geq\sqrt[3]{a^3a^3b^3}=a^2b,\ \frac{2a^3+c^3}{3}\geq a^2c$$

и затем еще 4 раза. Таким образом, устанавливается справедливость требуемого неравенства.

Практикум

Докажите неравенства:

1. $a^7 + b^7 + c^7\geq a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3$.

2. $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$.

3. Если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, то $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 64$.

4. Если $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$, то

$$\frac{ab + 1}{(a + b)^2} + \frac{bc + 1}{(b + c)^2} + \frac{ca + 1}{(c + a)^2} \geq 3$$

5. Если $abcd = 1$, то $a^4b + b^4c + c^4d + d^4a \geq a + b + c + d$.

6. Докажите, что для неотрицательных a, b, c выполнено неравенство $(ab+ac+bc)^3 \geq 27a^2b^2c^2$.

Библиографический список

1. Прасолов В.В. Многочлены. – М.: МЦНМО, 2003. – 336 с.
2. Саженков А.Н. Классические олимпиадные темы. Часть 2. Практикум. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2006. – 44 с.

ПОДСЕКЦИЯ МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.63

Численное решение уравнения колебания-диффузии с дробной производной Капуто

Н.Б. Алимбекова[1,2], Д.Р. Байгереев[1], Р.М. Салыков[1]

[1]Восточно-Казахстанский университет им. С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан;

[2]Казахский национальный педагогический университет им. Абая,г. Алматы, Казахстан

В настоящей работе рассматривается уравнение колебания-диффузии с дробной производной Капуто по времени. Предлагается вычислительно эффективный неявный численный метод для этого уравнения. Приводятся некоторые результаты, демонстрирующие эффективность численного метода.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто, численное решение.*