2. $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$.

3. Если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, то $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 64$.

4. Если $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$, то

$$\frac{ab + 1}{(a + b)^2} + \frac{bc + 1}{(b + c)^2} + \frac{ca + 1}{(c + a)^2} \geq 3$$

5. Если $abcd = 1$, то $a^4b + b^4c + c^4d + d^4a \geq a + b + c + d$.

6. Докажите, что для неотрицательных a, b, c выполнено неравенство $(ab+ac+bc)^3 \geq 27a^2b^2c^2$.

Библиографический список

1. Прасолов В.В. Многочлены. – М.: МЦНМО, 2003. – 336 с.
2. Саженков А.Н. Классические олимпиадные темы. Часть 2. Практикум. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2006. – 44 с.

ПОДСЕКЦИЯ МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.63

Численное решение уравнения колебания-диффузии с дробной производной Капуто

Н.Б. Алимбекова[1,2], Д.Р. Байгереев[1], Р.М. Салыков[1]

[1]Восточно-Казахстанский университет им. С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан;

[2]Казахский национальный педагогический университет им. Абая,г. Алматы, Казахстан

В настоящей работе рассматривается уравнение колебания-диффузии с дробной производной Капуто по времени. Предлагается вычислительно эффективный неявный численный метод для этого уравнения. Приводятся некоторые результаты, демонстрирующие эффективность численного метода.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто, численное решение*.

В последние десятилетия дифференциальные уравнения, содержащие дробные производные, стали представлять повышенный интерес во многих областях физики, механики, прикладной математики, математической биологии [1–2]. Это связано с тем, что интегро-дифференциальные операторы по времени и пространственным переменным описывают степенную долгосрочную память и пространственную нелокальность сложных сред и процессов. Одним из важных примеров применения уравнений данного типа являются уравнения, описывающие течение многофазной жидкости в сильнопористых трещиноватых пластах с фрактальной геометрией скважин [3]. Несмотря на большое количество научных публикаций в области дробных дифференциальных уравнений и на достаточно высокий уровень развития численных методов решения дифференциальных уравнений, теория численного решения уравнений с дробными производными еще далека от полноты [4–5]. Поэтому работы, направленные на разработку эффективных методов численного решения дробных дифференциальных уравнений и построение вычислительных схем высокого порядка с их теоретическим обоснованием, несомненно внесут вклад на развитие данного направления.

В области $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ изменения аргументов (x, t) рассмотрим следующию задачу:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),\ \ 0 < \alpha \leq 1 \qquad (1)$$

где $0 \leq c_1 \leq k(x,t)$, $|r(x,t)| \leq c_2$, с начальными и граничными условиями:

$$u(x,0) = \phi_1(t),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \phi_2(t), \qquad (2)$$

$$u(0,t) = \ u(1,t) = 0. \qquad (3)$$

Для решения задачи (1)–(3) применим метод конечных разностей. Построим монотонную схему второго порядка точности, содержащую односторонние производные, учитывающие знак $r(x,t)$. Для этого рассмотрим вместо уравнения (1) следующее уравнение с возмущенными коэффициентами:

$$\partial_{0t}^\alpha u = -ru_x + \chi(ku_x)_x + f(x,t), \qquad (4)$$

где $\chi = \frac{1}{1+R}$, $R = \frac{0.5h|r|}{k}$ – разностное число Рейнольдса.

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$, $0 < h < 1$:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = b_i^{-j} a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x},i} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y^{(\sigma)}_{x,i} + \chi_i^j \left(a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right)_{x,i} + \phi_i^j, \quad (x,t) \in \omega_{h,t} \tag{5}$$

$$y_0^{(\sigma)} = 0, x = 0, x = 1, \tag{6}$$

где

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$$

– дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α, где $0 < \alpha \le 1$ [6].

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha}, a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha}, l \ge 1,$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}] - \frac{1}{2}[(l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha}], l \ge 1,$$

$$j = 0, c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)}$$

$$j > 0, c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)}, & s = 0 \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)}, & 1 \le s \le j-1 \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)}, & s = j \end{cases}$$

$$a_i^j = k(x_{i-0.5}, t^{j+\sigma}), b_i^j = \frac{r(x, t^{j+\sigma})}{k(x_i, t^{j+\sigma})}, \phi_i^j = f(x_i, t^{j+\sigma}), \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0,$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j, d_i^j = d(x_i, t^{j+\sigma}).$$

Заметим, что $c_3 = \frac{1}{1+\frac{0,5c_1}{c_2}} < \chi < 1$.

Задача 1. В области $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ изменения аргументов (x,t) рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \ 0 < \alpha \le 1 \tag{7}$$

где $r(x,t) = k(x,t) = 1$, с начальным и граничными условиями

$$u(x,0) = 0, \tag{8}$$

$$u(0,t) = \ u(1,t) = 0, \tag{9}$$

и правой частью

$$f(x,t) = \frac{2x^2 t^{2-\alpha}(1-x)}{\Gamma(1-\alpha)(\alpha-2)(\alpha-1)} - t^2(2 - 4x - 3x^2).$$

Точное решение задачи (7)–(9) имеет вид:

$$u(x,t) = t^2 x^2 (1-x). \tag{10}$$

Определим следующую неявную разностную схему для приближенного решения задачи (7)–(9):

$$\frac{1}{\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=0}^{n} b_j^{\alpha}\left(u_i^{n+1-j}-u_i^{n-j}\right)-r_i^n\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{2h}$$
$$-\frac{k_{i+\frac{1}{2}}^n\left(u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}\right)-k_{i-\frac{1}{2}}^n\left(u_i^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}\right)}{h^2}=f_i^n$$

В итоге получим:

$$u_{i-1}^{n+1}\left[\frac{k_{i-\frac{1}{2}}^n}{h^2}-\frac{r_i^n}{2h}\right]-u_i^{n+1}\left[\frac{b_0^{\alpha}}{\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)}+\frac{k_{i+\frac{1}{2}}^n+k_{i-\frac{1}{2}}^n}{h^2}\right]+u_{i+1}^{n+1}\left[\frac{k_{i+\frac{1}{2}}^n}{h^2}+\frac{r_i^n}{2h}\right]=$$
$$-\frac{b_0^{\alpha}}{\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)}u_i^n-\frac{1}{\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}\left(u_i^{n+1-j}-u_i^{n-j}\right)+f_i^n.$$

Вычисления проводились для показателя дробной производной $\alpha = 1{,}85$. Шаг по пространственной переменной варьировался в диапазоне от 0,01 до 0,0001. Шаг по времени выбран фиксированным, $h_t = 1 \cdot 10^{-4}$. Вычисления проводились до достижения временного слоя $n = 3000$, что соответствует значению времени $T = 1$. На рисунке 1 приведено численное решение задачи 1, для различных значений временного слоя n.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерства науки и образования Республики Казахстан, ИРН AP08053189, 2020–2022 годы.

Таблица 1 – Погрешность решения задачи 1

Временной слой n	Погрешность
1	1.48148037e-9
100	2.41794745e-7
1000	2.78090645e-6
3000	8.66918254e-6

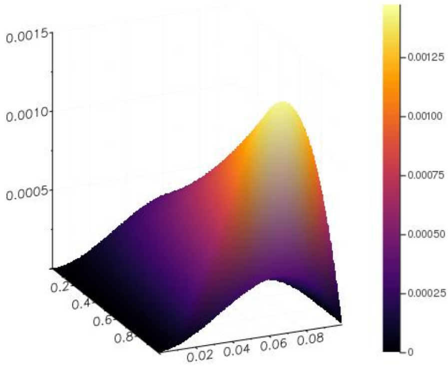

Рисунок 1 – Решение задачи 1

Библиографический список

1. Caputo M. Models of flux in porous media with memory // Water Resources Research. 2000. – V. 36, No. 3. – P. 693–705.

2. Di Giuseppe E., Moroni M., Caputo M. Flux in porous media with memory: models and experiments // Transport in Porous Media. 2010. – V. 83, No. 3. – P. 479–500.

3. Газизов Р.К., Лукащук С.Ю. Дробно-дифференциальный подход к моделированию процессов фильтрации в сложных неоднородных пористых средах // Вестник УГАТУ. 2017. – V. 21, No. 4. – P. 104–112.

4. Zhong W., Li C., Kou J. Numerical Fractional-Calculus Model for Two-phase Flow in fractured media // Advances in Mathematical Physics. 2013. – V. 2013, No. 429835. – P. 1–7.

5. Бештоков М.Х. Нелокальные краевые задачи для уравнения соболевского типа с дробной производной и сеточные методы их решения // Матем. тр., 2018, т. 21. № 2. С. 72–101.

6. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. Comput. Phys. 2015. V. 280. P. 424–438.