УДК 517.95

Разрешимость задачи протекания для уравнений движения двух взаимопроникающих жидкостей

И.Г. Ахмерова
АлтГУ, г. Барнаул

В статье излагается результат о разрешимости «в малом» по времени задачи о нестационарном неизотермическом одномерном движении двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей при неоднородных граничных условиях.

Ключевые слова: *разрешимость, взаимопроникающее движение, неоднородные граничные условия.*

Рассматривается одномерное неизотермическое движение двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей с неоднородными граничными условиями (гипотеза Х.А. Рахматулина [1], [2]). Уравнения неразрывности и импульса для каждой из фаз (i=1,2) имеют вид [1], [2]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial x}=0, \qquad \rho_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)=\frac{\partial \sigma_i}{\partial x}+F_i,$$
$$\sum_{i=1}^{2} c_i\rho_i^0 s_i\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+v_i\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial\theta}{\partial x}\right).$$

Здесь v_i – скорость соответствующей фазы; ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией s_i соотношением $\rho_i=\rho_i^0 s_i$; θ – абсолютная температура среды ($\theta_1=\theta_2=\theta$). Условие $s_1+s_2=1$ является следствием определения ρ_i. Для тензора напряжений фазы σ_i принимается аналог гипотезы Стокса [3]: $\sigma_i=-s_i p_i+s_i\mu_i\frac{\partial v_i}{\partial x}$, где p_i – давление i-ой фазы, μ_i – коэффициент динамической вязкости фазы, c_i – теплоемкость i-ой фазы при постоянном объеме. Постулируется, что силы F_i имеют вид [2], [3]: $F_i=p_i\frac{\partial s_i}{\partial x}+\varphi_i+\rho_i g$, где $\varphi_i=K(v_2-v_1)$, $\varphi_2=-\varphi_1$, K – коэффициент взаимодействия фаз, g – ускорение силы тяжести, χ – коэффициент теплопроводности смеси. Условие $\rho_i^0=const$ приводит к замкнутой системе уравнений для $s_i(x,t)$, $v_i(x,t)$, $\theta(x,t)$ и $p_i(x,t)$ в области $Q_T=\{x|0<x<1\}\times(0,T)$.

$$\frac{\partial s_i}{\partial t}+\frac{\partial(s_i v_i)}{\partial x}=0,\quad i=1,2, \tag{1}$$

$$\rho_i^0 s_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_i s_i\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)=-s_i\frac{\partial p_i}{\partial x}+\varphi_i+\rho_i^0 s_i g, \qquad (2)$$

$$s_1+s_2=1,\ \varphi_i=K(v_2-v_1),\ \varphi_2=-\varphi_1,\ p_1-p_2=(s_1,\theta), \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{2} c_i\rho_i^0 s_i\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+v_i\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial\theta}{\partial x}\right). \qquad (4)$$

Здесь ρ_i^0, μ_i, c_i – заданные положительные постоянные, $K(s_1)$, $\chi(s_1)$, $p_c(s_1,\theta)$ – заданные функции [2].

Система (1)–(4) дополняется начально-краевыми условиями:

$$v_i|_{x=0}=a_i(t),\ v_i|_{x=1}=b_i(t),\ v_i|_{t=0}=v_i^0(x),\ s_1|_{t=0}=s_1^0(x),$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial x}|_{x=0}=\theta_1(t),\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x}|_{x=1}=\theta_2(t),\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x}|_{t=0}=\theta^0(x). \qquad (5)$$

Для данной системы рассматривается два варианта граничных условий: $a_i(t)=b_i(t)=a(t)$ и $v_1|_{x=0}=a_1(t)$, $v_1|_{x=1}=b_1(t)$, $v_2|_{x=0,x=1}=0$. Заметим, что из уравнений (1) с учетом равенства $s_1+s_2=1$ вытекает соотношение $s_1v_1+s_2v_2=h(t)$, справедливое для произвольной функции $h(t)$, $t\in[0,T]$. В первом варианте граничных условий функция $h(t)=a(t)$, т.е. предполагается известной, а во втором варианте $h(t)=s(0,t)a_1(t)$ и является неизвестной функцией.

Дополнительное условие для однозначного определения $p_1(x,t)$:

$$\int_0^1 p_1(x,t)=0. \qquad (6)$$

Относительно функций $s^0(x)$, $\theta^0(x)$ предполагается выполнение неравенств следующего вида:

$$0<m_0\le s^0(x)\le M_0<1, 0<k_1^{-1}\le\theta^0(x)\le k_1<\infty \qquad (7)$$

для всех $x\in[0,1]$ и при фиксированных постоянных m_0, M_0, k_1.

Вопросы разрешимости задач с однородными граничными условиями для близких по структуре моделей рассматривались в [4–7]. Результат данной статьи частично изложен в [8].

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1)–(6) называется совокупность функций $(s_i(x,t),\ v_i(x,t),\ \theta(x,t),\ p_i(x,t)), i=1,2,$ из пространств:

$$(s_i(x,t)\in L_\infty\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big),\ (v_i,\theta)\in L_\infty\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big)\cap L_2\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big),\ p_i\in L_\infty\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big),$$
$$\left(\frac{\partial s_i}{\partial t},\frac{\partial v_i}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial p_i}{\partial x}\right)\in L_2(Q_T),\Omega=(0,1),Q_T=\Omega\times(0,\mathrm{T}),$$

удовлетворяющих уравнениям (1)–(4) и неравенствам $0 < s(x,t) < 1$, $0 < \theta(x,t) < \infty$ почти всюду в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Определение 2. Классическим решением задачи (1)–(6) называется совокупность функций $(s_i(x,t),\ v_i(x,t),\ \theta(x,t),\ p_i(x,t)), i = 1,2$, если они обладают непрерывными производными, входящими в уравнения (1)–(4), и удовлетворяют уравнениям, начальным и граничным условиям и неравенствам $0 < s(x,t) < 1$, $0 < \theta(x,t) < \infty$ как непрерывные в $\overline{Q_T}$ функции.

Теорема. Пусть данные задачи (1)–(6) удовлетворяют условиям (7), а также следующим условиям гладкости: $(v_i^0, \theta^0) \in W_2^1(\Omega)$, $s^0 \in$ $\in W_2^2(\Omega), (\theta_i, a_i, b_i) \in W_2^1(0,T), g \in L_2\big(0,T; W_2^1(\Omega)\big)$ и условиям согласования:

$$v_i^0(0) = a_i(0), v_i^0(1) = b_i(1), i = 1,2,$$
$$\left.\frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \theta_1(0),\ \left.\frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\right|_{x=1} = \theta_2(1).$$

Пусть $K(s_1)$, $\chi(s_1)$, $p_c(s_1, \theta)$ – достаточно гладкие функции своих аргументов, удовлетворяющие следующим условиям:

$$K(s_1) = K_0(s_1)(s_1 s_2)^q, \qquad 0 < k_0^{-1} \le K_0(s_1) \le k_0 = cosnt,$$
$$k_1^{-1}(s_1 s_2)^{q_1} \le \chi(s_1) \le k_1 (s_1 s_2)^{q_1},$$
$$k_1^{-1}(s_1 s_2)^{q_1 - 1} \le \frac{d\chi(s_1)}{ds_1} \le k_1 (s_1 s_2)^{q_1 - 1},$$
$$\left|\frac{\partial p_c(s_1,\theta)}{\partial s_1}\right| \le k_1 (s_1 s_2)^{q_2} |\theta|^{q_3}, \left|\frac{\partial p_c(s_1,\theta)}{\partial \theta}\right| \le k_1 (s_1 s_2)^{q_4} |\theta|^{q_5},$$
$$\left|\frac{\partial^2 p_c(s_1,\theta)}{\partial s_1^2}\right| \le k_1 (s_1 s_2)^{q_6} |\theta|^{q_7}, \left|\frac{\partial^2 p_c(s_1,\theta)}{\partial \theta^2}\right| \le k_1 (s_1 s_2)^{q_8} |\theta|^{q_9},$$
$$\left|\frac{\partial^2 p_c(s_1,\theta)}{\partial s_1 \partial \theta}\right| \le k_1 (s_1 s_2)^{q_{10}} |\theta|^{q_{11}},$$

где $k_1 = const > 0, q, q_1, \dots, q_{11}$ – фиксированные вещественные параметры, причем $q_3 \ge 0, q_5 \ge 0, q_7 \ge 0, q_9 \ge 0, q_{11} \ge 0$.

Если выполнены условия (7), то существует достаточно малое значение $t_0 > 0, t_0 \in (0,T)$ такое, что для всех $t \in (0, t_0)$ существует единственное обобщенное решение $(s_i,\ v_i,\ \theta, p_i)$ задачи (1)–(6).

Если дополнительно:

$$g \in C^{1+\alpha,\alpha/2}\big(\overline{Q_T}\big), (s^0, v_i^0, \theta^0) \in C^{2+\alpha}\big(\overline{\Omega}\big), v_i^0(0) = a_i(0), v_i^0(1) = b_i(1),$$
$$\left.\frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \theta_1(0),\ \left.\frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\right|_{x=1} = \theta_2(1), i = 1,2,$$

коэффициенты $K(s_1)$ и $\chi(s_1)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, то в Q_{t_0} существует единственное классическое решение задачи, удовлетворяющее условиям:

$$s_i \in C^{1+\alpha,\alpha/2}\left(\overline{Q_{t_0}}\right), (v_i^0, \theta^0) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{Q_{t_0}}\right), \frac{\partial p_i}{\partial x} \in C^{\alpha,\alpha/2}\left(\overline{Q_{t_0}}\right),$$

причем найдутся числа $0 < m^{(2)} < M^{(2)} < 1, 0 < m^{(3)} < M^{(3)} < \infty$, такие, что

$$0 < m^{(2)} \leq s_1(x,t) \leq M^{(2)} < 1{,}0 < m^{(3)} \leq \theta(x,t) \leq M^{(3)} < \infty,$$
$$(x,t) \in \left(\overline{Q_{t_0}}\right).$$

Существование сильного решения и классического решения на достаточно малом промежутке времени в случае, когда $\rho_i^0 = const$ доказывается с помощью метода Галёркина и в идейном плане следует доказательству аналогичного результата для вязкого теплопроводного газа.

Библиографический список

1. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. Математика и механика. – 1956. – Т.20. – Вып. 2. – С. 183–195.
2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Часть 1. – М.: Наука. – 1987. – 464с.
3. Файзуллаев Д.Ф., Умаров А.И., Шакиров А.А. Гидродинамика одно- и двухфазных сред и ее практическое приложение. – Ташкент: Фан. – 1980. – 167с.
4. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по времени системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. – 1999. – №114. – С. 64–70.
5. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по начальным данным системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. – 2000. – №116. – С. 73–80.
6. Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture // Mathematical Notes. – 2010. – Vol. 87(№2). – P. 230–243.
7. Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the Boundary-Value Problem for Equations of One-Dimensional Motion of a Two-Phase Mixture // Mathematical Notes. – 2014. – Vol. 96(№2). – P. 8–21.
8. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Задача протекания для уравнений движения двух взаимопроникающих вязких жидкостей // Ред. Сиб. мат. журн. Сиб.отд. АН РФ. – Новосибирск. – 2004. –Деп. ВИНИТИ. – №37. – 34с.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

УДК 519.63+532.5

Двумерная задача фильтрации газа в пороупругой среде

Р.А. Вирц
АлтГУ, г. Барнаул

В статье рассматривается двумерное движение углекислого газа в пороупругой среде. Приводится алгоритм численного исследования полученной начально-краевой задачи.

Ключевые слова: *пористость, фильтрация, углекислый газ, обезразмеривание, численное исследование.*

В работе изучается система уравнений, описывающая фильтрацию жидкости или газа в пористой среде:

$$\frac{\phi\rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\phi\vec{v}_f\rho_f\right) = 0, \quad \frac{\partial\rho_s(1-\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\vec{v}_s\rho_s) = 0, \qquad (1)$$

$$\phi\left(\vec{v}_f - \vec{v}_s\right) = -k(\phi)\left(\nabla p_f - \rho_f\vec{g}\right), \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla p_e\right), \qquad (3)$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot}\vec{g}. \qquad (4)$$

Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_f, \vec{v}_s$ – соответственно истинные плотности и скорости жидкой и твердой фаз, ϕ – пористость, p_f, p_s – соответственно давления жидкой и твердой фаз, $p_e = p_{tot} - p_f$ – эффективное давление, $p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s$ – общее давление, $\rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s$ – плотность двухфазной среды, $\vec{g} = (0, -g)$ – вектор силы тяжести; $k(\phi) = k\phi^\alpha/\mu$ – коэффициент фильтрации, k – проницаемость пористой среды, μ – динамическая вязкость жидкости; $a_1(\phi) = \phi^m/\eta$ – коэффициент объемной вязкости, η – динамическая вязкость твердой фазы; $a_2(\phi) = \phi^b\beta_\phi$ – коэффициент объемной сжимаемости, β_ϕ – коэффициент сжимаемости пор; $m \in [0,2], b = 1/2, \alpha = 3$ – параметры