

задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

УДК 519.63+532.5

Двумерная задача фильтрации газа в пороупругой среде

Р.А. Вириц

АлтГУ, г. Барнаул

В статье рассматривается двумерное движение углекислого газа в пороупругой среде. Приводится алгоритм численного исследования полученной начально-краевой задачи.

Ключевые слова: пористость, фильтрация, углекислый газ, обезразмеривание, численное исследование.

В работе изучается система уравнений, описывающая фильтрацию жидкости или газа в пористой среде:

$$\frac{\phi \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{v}_f \rho_f) = 0, \quad \frac{\partial \rho_s(1-\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi) \vec{v}_s \rho_s) = 0, \quad (1)$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -k(\phi)(\nabla p_f - \rho_f \vec{g}), \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla p_e \right), \quad (3)$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot} \vec{g}. \quad (4)$$

Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_f, \vec{v}_s$ – соответственно истинные плотности и скорости жидкой и твердой фаз, ϕ – пористость, p_f, p_s – соответственно давления жидкой и твердой фаз, $p_e = p_{tot} - p_f$ – эффективное давление, $p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s$ – общее давление, $\rho_{tot} = \phi \rho_f + (1-\phi)\rho_s$ – плотность двухфазной среды, $\vec{g} = (0, -g)$ – вектор силы тяжести; $k(\phi) = k\phi^\alpha/\mu$ – коэффициент фильтрации, k – проницаемость пористой среды, μ – динамическая вязкость жидкости; $a_1(\phi) = \phi^m/\eta$ – коэффициент объемной вязкости, η – динамическая вязкость твердой фазы; $a_2(\phi) = \phi^b \beta_\phi$ – коэффициент объемной сжимаемости, β_ϕ – коэффициент сжимаемости пор; $m \in [0, 2], b = 1/2, \alpha = 3$ – параметры

среды. Плотности жидкой и твердой фаз считаются постоянными. Задача записана в эйлеровых координатах $(x, y, t) \in Q_T$.

Особенностью рассматриваемой в данной работе модели является переменный характер пористости. Близкие по структуре системы уравнений рассматривались в работах [1–3].

Рассмотрим полость горной породы (гранит) глубиной H метров и шириной L метров, в которую снизу происходит закачка углекислого газа (CO_2) со скоростью $W(t)$. Область задачи представлена на рисунке 1.

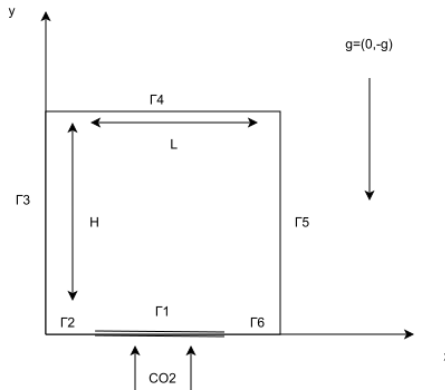


Рисунок 1 – Область решения задачи

На боковых и нижней границах рассматриваемой области ($\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_6$) задаются условия непротекания. В области закачки (Γ_1) задается условие притока CO_2 . На верхней границе (Γ_4) и в качестве начального значения задается гидростатическое давление.

Система (1)–(4) в случае медленных течений твердой фазы ($d/dt \sim \partial/\partial t$) сводится к начально-краевой задаче для нахождения эффективного давления и пористости в безразмерных переменных

$$x' = x/L, \quad y' = y/H, \quad t' = t/T, \quad p'_e = p_e/P, \quad v'_i = v_i/V, \quad i = s, f,$$

и принимает следующий вид (штрихи опущены):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi^\alpha \frac{\partial p_e}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi^\alpha \left(\frac{\partial p_e}{\partial y} + (1 - \phi) \right) \right) = \lambda \phi^m p_e + \omega \phi^b \frac{\partial p_e}{\partial t},$$

(5)

$$\frac{1}{1-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\kappa \phi^m p_e - \sigma \phi^b \frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1: \phi^{\alpha-1} \frac{\partial p_e}{\partial y} + (1-\phi) &= W(t), \quad \Gamma_3, \Gamma_5: \frac{\partial p_e}{\partial x} = 0, \\ \Gamma_2, \Gamma_6: \frac{\partial p_e}{\partial y} + (1-\phi) &= 0, \quad \Gamma_4: p_e = p_{\text{атм}}/P + (1-\phi)(1-y), \\ p_e^0(x, y) &= p_{\text{атм}}/P + (1-\phi)(1-y). \end{aligned}$$

Масштабы давления и скорости принимаются равными $P = Hg\Delta\rho$, $\Delta\rho = \rho_s - \rho_f$ и $V = Pk/H\mu$ соответственно. $\varepsilon = L^2/H^2$, $\lambda = \mu L^2/k\eta$, $\omega = \beta_\phi \mu L^2/kT$, $\kappa = PT/\eta$, $\sigma = P\beta_\phi$ – безразмерные параметры.

В области $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ построим равномерную сетку $\bar{\omega}_{h_x h_y \tau} = \bar{\omega}_{h_x} \times \bar{\omega}_{h_y} \times \bar{\omega}_\tau$: $\bar{\omega}_{h_x} = \{x_i = ih_x, i = 0, 1, \dots, N_x, N_x h_x = 1\}$, $\bar{\omega}_{h_y} = \{y_j = jh_y, j = 0, 1, \dots, N_y, N_y h_y = 1\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, M, M\tau = 1\}$, h_x, h_y – шаги по пространственным координатам, τ – шаг по времени. Численные решения в узлах сетки (x_i, y_j, t_n) обозначаются через $\phi_{ij}^n = \phi(x_i, y_j, t_n)$, $p_{ij}^n = p_e(x_i, y_j, t_n)$. Следуя [4, 5], уравнения (5), (6) приближаются схемой переменных направлений и схемой Рунге–Кутты второго порядка точности. В результате получаем систему разностных уравнений:

$$\omega(\phi_{ij}^n)^b \frac{p_{ij}^{n+1/2} - p_{ij}^n}{0.5\tau} = \Lambda_{xx} p_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_{yy} p_{ij}^n + f_{ij}^n, \quad (7)$$

$$\omega(\phi_{ij}^n)^b \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^{n+1/2}}{0.5\tau} = \Lambda_{xx} p_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_{yy} p_{ij}^{n+1} + f_{ij}^n, \quad (8)$$

$$\frac{\phi_{ij}^{n+1} - \phi_{ij}^n}{\tau} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1: (\phi_{i,0}^n)^{\alpha-1} \left(\frac{p_{i,1}^{n+1} - p_{i,0}^{n+1}}{h_y} \right) + (1 - \phi_{i,0}^n) &= W(t^n), \\ \Gamma_3, \Gamma_5: \frac{p_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{0,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} &= \frac{p_{N_x,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{N_x-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} = 0, \end{aligned}$$

$$\Gamma_2, \Gamma_6: \frac{p_{i,1}^{n+1} - p_{i,0}^{n+1}}{h_y} + (1 - \phi_{i,0}^n) = 0,$$

$$\Gamma_4: p_{i,N_y} = \frac{p_{\text{атм}}}{P} + (1 - \phi_{i,N_y}^n)(1 - y_{N_y}),$$

где $k_1 = \left(-\kappa (\phi_{ij}^n)^m p_{ij}^n - \sigma (\phi_{ij}^n)^b \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^n}{\tau} \right) (1 - \phi_{ij}^n) = F(\phi)$, $k_2 = F(\phi_{ij}^n + \tau k_1)$.

Алгоритм счета следующий: используя начальные значения для эффективного давления и пористости (p_{ij}^0 , ϕ_{ij}^0), из (7), (8) находим значение эффективного давления на следующем временном слое (p_{ij}^1), далее из (9) находим ϕ_{ij}^1 . Повторяем алгоритм для следующих шагов по времени. Для определения порядка равномерной сходимости разностного метода, воспользуемся алгоритмом, предложенным в [6], в данном случае порядок скорости сходимости равен $a = 1.3637$.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме "Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики" (номер темы: FZMW-2020-0008).

Библиографический список

1. Virts R.A, Papin A.A, Tokareva M.A Non-isothermal filtration of a viscous compressible fluid in a viscoelastic porous medium //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2020. – Vol. 1666. – No. 1. – С. 012041.
2. Вирц Р.А., Папин А.А., Вайгант В.А. Численное решение одномерной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде // Известия АлтГУ. – 2018. – №. 4 (102). – С. 62–67.
3. Антонцев С.Н., Папин А.А. Приближенные методы решения задач двухфазной фильтрации // Доклады Академии наук. – 1979. – Т. 247. – №. 3. – С. 521–525.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем: Учебное пособие. – М.: Наука. – 1983. – 656 с.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука. – 1989. – 432 с.

6. Першин И.В., Титов В.А., Шишкин Г.И. Экспериментальное определение порядка равномерной сходимости специальных разностных схем // Математическое моделирование. – 1995. – Т. 7. – №. 6. – С. 85–94.

УДК 514.174

Шарнирные механизмы

М.Е. Гнедко

АлтГУ, г. Барнаул

Шарнирные механизмы распространены повсеместно. Обычно они служат для преобразования одного вида движения в другой. В работе приведены математические модели шарнирных механизмов, а также приведен обзор классических и современных результатов, связанных с изучением шарнирных механизмов.

Ключевые слова: *связный взвешенный граф, шарнирный механизм, конфигурационное пространство, алгебраическая кривая.*

Достаточно большое количество математиков занималось задачами, связанными с шарнирными механизмами. Одна из таких задач – создание механизма, переводящего движение по окружности в прямолинейное движение. В этом направлении существенными результатами были работы Джеймса Ватта (параллелограмм Ватта), Пафнутия Львовича Чебышева (стопходящая машина Чебышева), Жан-Виктор Понселе (его работу рассмотрим далее в качестве примера) и труды других ученых.

Рассмотрим некоторую конфигурацию стержней и соединений (шарниров) на плоскости, где некоторые соединения прикреплены к плоскости. Такая конфигурация является механическим соединением или шарнирным механизмом. Если соединение не является жестким, то в него можно поместить «карандаш» и позволить конфигурации двигаться. В результате будет получена некоторая кривая, которая является конфигурационным пространством рассматриваемого шарнира [1]. Например, рассмотрим на плоскости \mathbb{R}^2 ромб $ABCD$, и пусть O – точка на луче CA , лежащая вне ромба. Соединим точку O с точками B и D . Выберем на плоскости еще одну точку R и соединим ее отрезком с точкой A . Точки O и R будем считать неподвижными шарнирами, а все остальные концы проведенных отрезков – подвижными. Сами отрезки будем считать жесткими стержнями.