

6. Першин И.В., Титов В.А., Шишкин Г.И. Экспериментальное определение порядка равномерной сходимости специальных разностных схем // Математическое моделирование. – 1995. – Т. 7. – №. 6. – С. 85–94.

УДК 514.174

## Шарнирные механизмы

*М.Е. Гнедко*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Шарнирные механизмы распространены повсеместно. Обычно они служат для преобразования одного вида движения в другой. В работе приведены математические модели шарнирных механизмов, а также приведен обзор классических и современных результатов, связанных с изучением шарнирных механизмов.

**Ключевые слова:** *связный взвешенный граф, шарнирный механизм, конфигурационное пространство, алгебраическая кривая.*

Достаточно большое количество математиков занималось задачами, связанными с шарнирными механизмами. Одна из таких задач – создание механизма, переводящего движение по окружности в прямолинейное движение. В этом направлении существенными результатами были работы Джеймса Ватта (параллелограмм Ватта), Пафнутия Львовича Чебышева (стопходящая машина Чебышева), Жан-Виктор Понселе (его работу рассмотрим далее в качестве примера) и труды других ученых.

Рассмотрим некоторую конфигурацию стержней и соединений (шарниров) на плоскости, где некоторые соединения прикреплены к плоскости. Такая конфигурация является механическим соединением или шарнирным механизмом. Если соединение не является жестким, то в него можно поместить «карандаш» и позволить конфигурации двигаться. В результате будет получена некоторая кривая, которая является конфигурационным пространством рассматриваемого шарнира [1]. Например, рассмотрим на плоскости  $\mathbb{R}^2$  ромб  $ABCD$ , и пусть  $O$  – точка на луче  $CA$ , лежащая вне ромба. Соединим точку  $O$  с точками  $B$  и  $D$ . Выберем на плоскости еще одну точку  $R$  и соединим ее отрезком с точкой  $A$ . Точки  $O$  и  $R$  будем считать неподвижными шарнирами, а все остальные концы проведенных отрезков – подвижными. Сами отрезки будем считать жесткими стержнями.

Полученная конструкция и называется инверсором Понселе (рис. 1). Это название объясняется тем, что при движении точки  $A$  по окружности  $S^1$  с центром в точке  $R$  точка  $C$  двигается по образу этой окружности при инверсии относительно некоторой окружности с центром в точке  $O$ . В частности, если  $|RA| = |RO|$ , то окружность  $S^1$  проходит через центр инверсии и, поэтому ее образ – прямая.

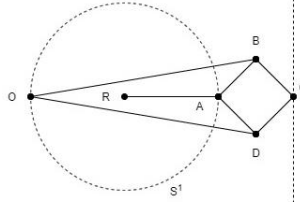


Рисунок 1 – Инверсор Понселе

Пусть, дана алгебраическая кривая  $C \subset \mathbb{R}^2$ , определяемая формулой:

$$F(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} x^i y^j = 0, \text{ где } c_{ij} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда соединение  $\mathcal{L}$  рисует кривую  $C$  в конфигурационном пространстве некоторого соединения  $v \in V$ , определенного как  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(v) = \{f(v) \mid f \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}\}$  лежит на  $C$ , т.е.  $F(x, y) = 0 \forall (x, y) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(v)$ . Кривая  $C$  является механической, если каждое компактное подмножество  $X \subset C$  лежит в конфигурационном пространстве шарнира  $C: X \subset \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(v) \subset C$ .

**Теорема.** Каждая алгебраическая кривая  $C \subset \mathbb{R}^2$  механическая [1, 2].

**Схема доказательства:** нужно построить связь с двумя степенями свободы по осям  $x$  и  $y$ . Поместить «карандаш» в место, которое всегда будет находиться в точке  $(x, y)$ . Эта связь также будет иметь шарнир  $z$ , расположенный в  $(F(x, y), 0)$  на оси  $x$ . Как только точка  $z$  будет зафиксирована в начале координат, тогда будет получен искомый шарнирный механизм [1].

Заменим интуитивную идею определения шарнирного механизма и определения конфигурационного пространства на более точные математические определения [3].

**Определение 1.** Тройка  $g = (V, E, d)$  состоит из:

- 1) Набора вершин  $V = V_{fix} \cup V_{free}$ , с  $V_{fix} = \{V_1, \dots, V_m\}$  и  $V_{free} = \{V_{m+1}, \dots, V_n\}$ ;
- 2) Набора ребер  $E = \{\{V_{i_1}, V_{j_1}\}, \{V_{i_2}, V_{j_2}\}, \dots, \{V_{i_k}, V_{j_k}\}\}$  с  $i_l, j_l \in \{1, \dots, n\}, i_l \neq j_l$ , таких, что любые две вершины в  $V$  соединены последовательностью элементов  $E$ ;
- 3) Весовая функция  $d: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , которая прикрепляет к некоторому ребру  $\{V_{i_l}, V_{j_l}\}$  в  $E$  длину (вес)  $d(V_{i_l}, V_{j_l}) \in \mathbb{R}_+$ ,

называется связным взвешенным графом.

Используется  $V_j$  в  $p \in \mathbb{R}^2$  вместо  $\varphi(V_j) = p \in \mathbb{R}^2$ , т.е. рассматривается  $V_j$  как  $\varphi(V_j)$ . Также нужно учитывать, что существуют связные взвешенные графы только с тремя вершинами, которые нереализуемы на евклидовой плоскости и реализация механического соединения в общем случае неуникальна. Конфигурационное пространство механического соединения определяется как подмножество  $\mathbb{R}^{2n}$ , которое естественным образом получает топологическую структуру.

**Определение 2.** Пусть  $g = (V, E, d)$  связный взвешенный граф.

- 1) Граф  $g$  называется механическим соединением (шарнирным механизмом), если  $g$  реализуем в  $\mathbb{R}^2$ , т.е. Если существует отображение  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^2$  такое, что  $d_{\mathbb{R}}(\varphi(V_i), \varphi(V_j)) = d(V_i, V_j) \forall \{V_i, V_j\} \in E$ , где  $d_{\mathbb{R}}$  – евклидова метрика в  $\mathbb{R}^2$ .
- 2) Реализация  $\xi$  графа  $g = (V, E, d)$  – это множество  $\{\varphi_{\xi}(V_1), \dots, \varphi_{\xi}(V_n)\}$  точек в  $\mathbb{R}^2$  таких, что  $d_{\mathbb{R}}(\varphi_{\xi}(V_i), \varphi_{\xi}(V_j)) = d(V_i, V_j) \forall \{V_i, V_j\} \in E$ .

**Определение 3.** Пусть  $g = (V, E, d)$  – механическое соединение и пусть  $\{p_1, \dots, p_m\}$  фиксированные точки в  $\mathbb{R}^2$  с  $m \geq 2$ , такие, что  $d_{\mathbb{R}}(p_i, p_j) = d(V_i, V_j) \forall \{V_i, V_j\} \in E$  с  $V_i, V_j \in \{V_1, \dots, V_m\} = V_{fix}$ . Тогда конфигурационное пространство  $g$  определяется формулами  $[g] = \{\xi \text{ реализация } g; \varphi_{\xi}(V_j) = p_j, \forall V_j \in V_{fix}\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n; x_j = p_j, \forall j \in \{1, \dots, m\} \text{ и } d_{\mathbb{R}}(x_i, x_j) = d(V_i, V_j), \forall \{V_i, V_j\} \in E\}$  с топологией индуцированной метрикой  $\mathbb{R}^{2n}$ .

В большинстве случаев рассматриваются подпространства в  $[g]$  для шарнирного механизма.

Каждую реализацию механического соединения можно представить в виде плоского рисунка, состоящего из набора точек  $V$  и набора прямых линий  $E$  заданной длины  $d$  таких, что пустой маленький кружок – это вершина, закрепленная на плоскости, т.е. элемент  $V_{fix}$ , а закрепленная окружность есть элемент  $V_{free}$ . Это говорит о том, что вершины двигаются и механические соединения бывают жесткими.

**Определение 4.** Пусть  $g = (V, E, d)$  – механическое соединение.

- 1) Вершина  $V_j$  называется жесткой по отношению к реализации  $\xi \in [g]$  с  $\varphi_{\xi}(V_j) = p$ , если существует открытая окрестность  $U \subseteq [g]$  точки  $\xi$  такая, что  $\forall \xi \in U$  следует, что  $\varphi_{\xi}(V_j) = p$ .

- 2) Реализация  $\xi \in [g]$  механического соединения  $g$  называется жесткой, если каждая вершина  $g$  является жесткой относительно  $\xi$ , т.е.  $\xi$  является изолированной точкой  $[g]$ .

Рассматриваемая теорема возникла в трудах Альфреда Кемпе [4], там же было представлено её доказательство. Через несколько лет в доказательстве была найдена ошибка. Её удалось исправить в 2002 году М. Каповичу и Дж. Миллсону [2].

### Библиографический список

1. Pak I. Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry – 2010 – 442 с.
2. Kapovich M., Millson J. Universality theorems for configuration spaces of planar linkages // Topology. – 2002. – № 41(6). – P. 1051–1107.
3. Jordan D., Steiner M., Configuration spaces of mechanical linkages // Discrete Comput. Geom. – 1999. – № 22. – P. 297–315.
4. Kempe A.V. How to draw a straight line: a lecture on linkages. — Macmillan & Co., 1877 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://zadachi.mccme.ru/kempe.ver2/>.

УДК 531.3

## Линейно-замедленное диссипативное движение под действием потенциальной силы в случаях слабого и сильного сопротивления

*А.С. Гришков<sup>1</sup>, А.М. Ерёмин<sup>1</sup>, П.В. Захаров<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет имени В.М. Шукшина,  
г. Бийск*

*<sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет  
Петра Великого, г. Санкт-Петербург*

В работе рассматривается линейно-замедленное диссипативное движение под действием потенциальной силы в случаях слабого и сильного сопротивления.

**Ключевые слова:** *диссипативное движение, слабое и сильное сопротивление, потенциальная сила.*

Как известно, [4, с. 42], задача описания одномерного движения диссипативной системы (ДС), состоящей из материальной точки (частицы) в среде с линейным по скорости сопротивлением в