2) Реализация $\xi \in [\mathfrak{g}]$ механического соединения $\mathfrak{g}$ называется жесткой, если каждая вершина $\mathfrak{g}$ является жесткой относительно ξ, т.е. ξ является изолированной точкой $[\mathfrak{g}]$.

Рассматриваемая теорема возникла в трудах Альфреда Кемпе [4], там же было представлено её доказательство. Через несколько лет в доказательстве была найдена ошибка. Её удалось исправить в 2002 году М. Каповичу и Дж. Миллсону [2].

Библиографический список

1. Pak I. Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry – 2010 – 442 с.

2. Kapovich M., Millson J. Universality theorems for configuration spaces of planar linkages // Topology. – 2002. – № 41(6). – P. 1051–1107.

3. Jordan D., Steiner M., Configuration spaces of mechanical linkages // Discrete Comput. Geom. – 1999. – № 22. – P. 297–315.

4. Kempe A.B. How to draw a straight line: a lecture on linkages. — Macmillan & Co., 1877 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://zadachi.mccme.ru/kempe.ver2/.

УДК 531.3

Линейно-замедленное диссипативное движение под действием потенциальной силы в случаях слабого и сильного сопротивления

А.С. Гришков[1], А.М. Ерёмин[1], П.В. Захаров[2]

[1]Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет имени В.М. Шукшина, г. Бийск

[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург

В работе рассматривается линейно-замедленное диссипативное движение под действием потенциальной силы в случаях слабого и сильного сопротивления.

Ключевые слова: *диссипативное движение, слабое и сильное сопротивление, потенциальная сила.*

Как известно, [4, с. 42], задача описания одномерного движения диссипативной системы (ДС), состоящей из материальной точки (частицы) в среде с линейным по скорости сопротивлением в потенциальном поле $U(x)$ сводится к дифференциальному уравнению Абеля второго рода

$$mv(x)\frac{dv(x)}{dx}+\alpha v(x)=-\frac{dU(x)}{dx}, \qquad (1)$$

неинтегрируемому при произвольной правой части [2, с. 37] (m – масса частицы, α – коэффициент сопротивления среды). Метод, представленный в [3], также приводит к уравнению, решение которого неизвестно [3, с. 328]. Таким образом, поставленная задача в общем виде пока не решена.

В [4, с. 44] уравнение (1) было сведено к системе интегрируемых уравнений, результатом решения которой стал набор функций, позволяющих описать диссипативное движение посредством величин, характеризующих связанное консервативное движение и решающих задачу в первом приближении [4, с. 44].

Дальнейшее развитие метода в работах [5, с. 59] и [6, с. 116] позволило заменить уравнение (1) эквивалентным дифференциальным уравнением

$$\frac{dA(x)}{dx}-\gamma\sqrt{K(x)-A(x)}=0;\ \gamma=\alpha\sqrt{\frac{2}{m}}, \qquad (2)$$

где $A(x)$ – абсолютная величина работы, совершаемой над системой диссипативной силой. Было введено понятие т.н. связанной консервативной системы (СКС), т.е. системы, имеющей те же значения массы, начальной скорости и координаты, что и диссипативная, но движущейся так, как если бы сопротивление отсутствовало. Фигурирующая в (2) функция $K(x)=E_0-U(x)$ есть, таким образом, кинетическая энергия СКС, (E_0 – начальное значение полной энергии ДС). Уравнение (2) также не интегрируется в общем виде, однако его структура более удобна для анализа, нежели структура (1). В частности, в [5, с. 60] и [6, с. 116-117] уравнение (2) было применено для описания движения в случае слабого сопротивления, в [6, с. 118-119] были построены соответствующие графики.

В данной работе мы покажем, как (2) может быть применено для описания движения в двух противоположных случаях слабого и сильного сопротивления. Для этого разложим радикал в (2) в ряд Тейлора:

$$\begin{cases} \sqrt{K(x)-A(x)} = \sqrt{K(x)} - \dfrac{1}{2}\dfrac{A(x)}{\sqrt{K(x)}} - \cdots - P(k,n)\dfrac{A(x)^n}{K(x)^{n-\frac{1}{2}}} - \cdots \\ P(k,n) = \left|\dfrac{\prod_{i=1}^{n}(k-i+1)}{n!}\right| \\ k = \dfrac{1}{2}, n = 1,2, \ldots \infty \end{cases},$$

а далее суммируем полученное выражение (суммирование производилось с использованием системы компьютерной алгебры Maple), начиная с первого члена разложения $\left(\frac{1}{2}\frac{A(x)}{\sqrt{K(x)}}\right)$. Получим:

$$\sqrt{K(x)-A(x)} = \sqrt{K(x)} - \frac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{A(x)}{K(x)}}}\frac{A(x)}{\sqrt{K(x)}}.$$

Подставляя полученный результат в (2), будем иметь:

$$\frac{dA(x)}{dx} - \gamma\left(\sqrt{K(x)} - \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{A(x)}{K(x)}}}\frac{A(x)}{\sqrt{K(x)}}\right) = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) удобно тем, что позволяет математически единообразно перейти к рассмотрению обоих крайних случаев слабого и сильного сопротивления.

В случае слабого сопротивления из физических соображений понятно, что диссипативная среда совершает над системой малую работу $A_w(x)$, следовательно, значения функции $A_w(x)$ будут малы по сравнению с $K(x)$: $A_w(x) \ll K(x)$. Поэтому мы можем приближенно положить под радикалом в знаменателе (3) $\frac{A_w(x)}{K(x)} \approx 0$, соответственно, (3) переходит в линейное по $A_w(x)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dA_w(x)}{dx} + \frac{\gamma}{2\sqrt{K(x)}}A_w(x) - \gamma\sqrt{K(x)} = 0. \qquad (4)$$

Решением уравнения (4) является функция

$$A_w(x) = \gamma exp\left(-\frac{\gamma}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right)\left(\int_{x_0}^{x}\sqrt{K(x)}\,exp\left(\frac{\gamma}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right)dx\right). \quad (5)$$

И уравнение (4), и функция (5) аналогичны уравнению и его решению, полученным нами ранее в работах [5, 6].

При сильном сопротивлении, напротив, диссипативная среда будет быстро рассеивать кинетическую энергию ДС, совершая над ней большую работу, пропорциональную значениям функции $K(x)$: $A_s(x) \approx K(x)$, кинетическая же энергия ДС будет, соответственно, малой. Поэтому, полагая в знаменателе под радикалом (3) $\frac{A_s(x)}{K(x)} \approx 1$, получим уравнение

$$\frac{dA_s(x)}{dx} + \frac{\gamma}{\sqrt{K(x)}}A_s(x) - \gamma\sqrt{K(x)} = 0, \quad (6)$$

отличающееся от (4) только числовым множителем в линейном по $A_s(x)$ слагаемом. Решением его будет функция

$$A_s(x) = \gamma exp\left(-\gamma\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right)\left(\int_{x_0}^{x}\sqrt{K(x)}\,exp\left(\gamma\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right)dx\right), \quad (7)$$

также отличающаяся от (5) лишь числовым множителем в аргументах экспонент.

В [5, с. 60; 6, с. 117] было показано, что фигурирующее в аргументах экспонент выражение $\frac{\gamma}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}$ может быть представлено как произведение $\frac{\alpha}{m}\tau(x)$, где

$$\tau(x) = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}}$$

есть время, за которое проходит расстояние $|x - x_0|$ консервативная система, движущаяся в поле с потенциалом $U(x)$ [1, с. 39], т.е. СКС. Если же мы распишем подобным образом фигурирующее в (7) выражение $\gamma \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{K(x)}}$, то, очевидно, получим: $\gamma \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{K(x)}} = 2\frac{\alpha}{m}\tau(x)$. Таким образом, в случае слабого сопротивления ДС затрачивает на прохождение расстояния $|x - x_0|$ такое же время, как и СКС, что вполне понятно из физических соображений. В случае же сильного сопротивления ДС тратит на преодоление того же расстояния вдвое большее время, нежели СКС.

Заметим, что величина работы $A(x)$, определяющая диссипативное движение, в обоих случаях оказалась выражена посредством функций $K(x)$ и $\tau(x)$, определяющих связанное консервативное движение, как и в работах [4], [5] и [6].

Библиографический список

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1988. – 216 с.

2. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.

3. Denman H.H, Buch L.H: Solution of the Hamilton-Jacobi equation for certain dissipative classical mechanical systems // J. Math. Phys. – 1973. – V.14, no 3. – P. 326-329.

4. Гришков А.С., Ерёмин А.М. Одномерное движение под действием потенциальной силы в однородной диссипативной среде с линейным по скорости сопротивлением // «МАК: Математики – Алтайскому краю»: сб. трудов всеросс. конф. по математике с междунар. участием. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2019. – С. 42-45.

5. Гришков А.С. Линейно-замедленное диссипативное движение в потенциальном поле при слабом сопротивлении среды / А.С. Гришков, Р.С. Вдовин, А.М. Ерёмин, П.В. Захаров // «Математическое и компьютерное моделирование»: сборник материалов VIII Международной научной конференции, посвященной памяти А.Л. Иозефера. – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2020. – С. 59-61.

6. Гришков А.С. Линейно-замедленное диссипативное движение под действием потенциальной силы в случае слабого сопротивления. / А.С. Гришков, Р.С. Вдовин, А.М. Ерёмин, П.В. Захаров // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: сборник трудов международной научной конференции. – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2021. – С. 114-120.