УДК 517.95

Единственность решения задачи тепломассопереноса в снежном покрове

Э.И. Леонова, А.А. Папин
АлтГУ, Барнаул

В рамках теории многофазной фильтрации рассматривается задача тепломассопереноса в тающем снежном покрове. Доказана единственность решения регулярной одномерной задачи.

Ключевые слова: *двухфазная фильтрация, единственность, тепломассоперенос.*

Следуя [1], [2], рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div(\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^{3} I_{ji}, \quad i = 1,2,3, \quad I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij} = 0; \qquad (1)$$

$$\vec{v}_i = -K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1,2,$$
$$p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \quad \sum_{i=1}^{2} s_i = 1; \qquad (2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \rho_i^0 c_i \alpha_i\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i^0 c_i \vec{v}_i\right) \nabla \theta = div(\lambda_c \nabla \theta) + \nu \frac{\partial \rho_3^0 \alpha_3}{\partial t}. \qquad (3)$$

Здесь $\vec{u}_i$ – скорость i-й фазы; ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ (условие $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$ является следствием определения ρ_i); I_{ji} – интенсивность перехода массы из j-й в i-ю составляющую в единице объема в единицу времени; $\vec{v}_i = \phi s_i(\vec{u}_i - \vec{u}_3)$ – скорости фильтрации воды и воздуха; ϕ – пористость снега ($\phi = \phi(\theta), 0 < \phi < 1$); s_1, s_2 – насыщенности воды и воздуха ($\alpha_1 = \phi s_1$, $\alpha_2 = \phi s_2$, $\alpha_3 = 1 - \phi$); $K_0(\phi)$ – тензор фильтрации; k_{0i} – фазовые проницаемости ($k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0, k_{0i}|_{s_i=0} = 0$); μ_i – динамическая вязкость; p_i – давления фаз; p_c – капиллярное давление, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести; θ – температура среды ($\theta_i = \theta$, $i = 1,2,3$); $c_i = const > 0$ – теплоемкость i-й фазы при постоянном объеме; $\nu = const > 0$ – удельная теплота плавления льда; λ_c – теплопроводность снега ($\lambda_c = a_c + b_c \rho_c^2$, $\rho_c = \sum_{i=1}^{3} \rho_i^0 \alpha_i$, $a_c = const > 0$, $b_c = const > 0$) [3].

Функции $\alpha_3(\theta)$, $I_{31} = I_{31}(\theta)$ – заданы, $\vec{u}_3 = 0$, $I_{12} = I_{23} = 0$.

В одномерном случае система (1)–(3) сводится к трем уравнениям относительно $s \equiv s_1, \theta$ и $p = p_2 + \int_s^1 \frac{\tilde{k}_{01}}{\tilde{k}(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi$:

$$\begin{cases}\frac{\partial \phi s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(s,\phi)\frac{\partial s}{\partial x}+b(s)v+F\right)+\frac{\partial \phi}{\partial t},\\ \sum_{i=1}^{3}\rho_i^0 c_i\alpha_i\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_c\frac{\partial \theta}{\partial x})-\sum_{i=1}^{2}\rho_i^0 c_i\vec{v}_i\frac{\partial \theta}{\partial x}+\nu\frac{\partial \rho_3^0\alpha_3}{\partial t},\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial p}{\partial x}+f\right)=\rho_3^0\frac{\partial \phi}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho_1^0}-\frac{1}{\rho_3^0}\right),\end{cases} \tag{4}$$

при следующих начально-краевых условиях

$$\begin{cases}s(0,t)=s_0(t),\ s(1,t)=s_1(t),\ s(x,0)=s^0(t),\\ \theta(0,t)=\theta_0(t),\ \theta(1,t)=\theta_1(t),\ \theta(x,0)=\theta^0(t),\\ p(0,t)=p_0(t),\ p(1,t)=p_1(t).\end{cases} \tag{5}$$

Система (1)–(3) при заданной пористости рассматривалась в работах [4–8]. Задача при других краевых и начальных условиях численно изучалась в статье [9].

Определение. Функции $s(x,t)$, $\theta(x,t)$, $p(x,t)$ называются классическим решением задачи (4)–(5), если они удовлетворяют системе уравнений (4), граничным и начальным условиям (5) как непрерывные $\overline{Q}_T$ функции, причем $0<s(x,t)<1$, $0<\theta(x,t)<\infty$, $(x,t)\in\bar{Q}_T=\bar{\Omega}\times[0,T]$, $\bar{\Omega}=[0,1]$, $x\in(0,1)$.

Теорема. Пусть выполняется условие $\left|\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right|\le\delta\phi_0(\theta)$, где параметр δ – мал, а $\phi_0(\theta)$ – ограниченная функция. Тогда задача (4)–(5) имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим, что существует два различных решения: $(s^{(1)},\theta^{(1)},p^{(1)})$ и $(s^{(2)},\theta^{(2)},p^{(2)})$. Обозначим $s=s^{(1)}-s^{(2)}$, $\theta=\theta^{(1)}-\theta^{(2)}$, $p=p^{(1)}-p^{(2)}$. Рассмотрим разность уравнений (4). Получим следующую линейную однородную систему:

$$\begin{gathered}B_1(x,t)\theta+B_2(x,t)s_t+B_3(x,t)s+B_4(x,t)\theta_t+\\ +(B_5(x,t)s+B_6(x,t)\theta+B_7(x,t)s_x+B_8(x,t)p_x)_x=0,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}(C_1(x,t)\theta+C_2(x,t)s+C_3(x,t)\theta_x)_x+C_4(x,t)\theta_x+\\ +C_5(x,t)\theta_t+C_6(x,t)s+C_7(x,t)\theta+C_8(x,t)s_x+C_9(x,t)p_x=0,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}(A_1(x,t)s+A_2(x,t)\theta+A_3(x,t)p_x)_x+\\ +A_4(x,t)\theta_t+A_5(x,t)\theta=0,\end{gathered} \tag{8}$$

в которой коэффициенты A_{i}, B_{i}, C_{i} легко вычисляются из системы (4).

Тогда начально-краевые условия примут вид:

$$s(0,t)=s(1,t)=s(x,0)=0,\ \theta(0,t)=\theta(1,t)=\theta(x,0)=0,$$
$$p(0,t)=p(1,t)=0.$$

Из уравнения (8) после умножения на функцию $p(x,t)$, интегрирования и применения неравенства Коши с ε выводим:

$$\int_0^1 p_x^2 dx \le D_1(\delta) \int_0^1 (s^2 + \theta^2) dx + \\ + D_2 \delta^2 \int_0^1 \theta_x^2 dx + D_3 \delta^2 \int_0^1 s_x^2 dx. \tag{9}$$

Из уравнения (7) после умножения на функцию $\theta(x,t)$ и последующего интегрирования получим:

$$\int_0^1 \theta^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \theta_x^2 dx dt \le \\ \le D_4(\delta) \int_0^T \int_0^1 (s^2 + \theta^2) dx dt + D_5(\delta) \int_0^T \int_0^1 s_x^2 dx dt. \tag{10}$$

Из уравнения (6) аналогично получаем:

$$\int_0^1 s^2 dx + \int_0^T \int_0^1 s_x^2 dx dt \le \\ \le D_6(\delta) \int_0^T \int_0^1 (s^2 + \theta^2) dx dt + D_7 \delta^2 \int_0^T \int_0^1 \theta_x^2 dx dt. \tag{11}$$

Сложим оценки (10) и (11). Тогда

$$\int_0^1 (s^2 + \theta^2) dx + \int_0^T \int_0^1 (s_x^2 + \theta_x^2) dx dt \le \\ \le D_8(\delta) \int_0^T \int_0^1 (s_x^2 + \theta_x^2) dx dt + D_9(\delta) \int_0^T \int_0^1 (s^2 + \theta^2) dx dt.$$

Подбирая параметр δ из условия $D_8(\delta) < \frac{1}{2}$, получим:

$$\int_0^1 (s^2 + \theta^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (s_x^2 + \theta_x^2) dx dt \le \\ \le D_9(\delta) \int_0^T \int_0^1 (s^2 + \theta^2) dx dt. \tag{12}$$

Из (12) выводим неравенство Гронуолла:

$$\int_0^1 (s^2 + \theta^2) dx \le D_9(\delta) \int_0^T \int_0^1 (s^2 + \theta^2) dx dt, \tag{13}$$

причем $|D_9| \le C$. Из (13) следует, что $s = s^{(1)} - s^{(2)} = 0$, $\theta = \theta^{(1)} - \theta^{(2)} = 0$. Подставляя s и θ в оценку для p (9), получим, что $p^{(1)} - p^{(2)} = 0$. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке совместного проекта TUBITAK и РФФИ 20-58-46009 CT_a "Нагрузки на инженерные сооружения в морском льду".

Библиографический список

1. Коробкин А.А., Папин А.А., Хабахпашева Т.И. Математические модели снежно-ледового покрова. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013. – 116 с.

2. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико-математические модели. – М.: Изд-во Наука, 1983. − 216 с.

3. Папин А.А. Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. − Новосибирск, 2008. − Т. 49, № 4. − С. 13–23.

4. Антонцев С.Н., Папин А.А. Приближенные методы решения задач двухфазной фильтрации // Доклады Академии наук СССР. − 1979. − Т. 247, № 3. − С. 521–525.

5. Gray J.M.N.T. Water movement in wet snow // Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. − 1996. − V. 354, N. 1707. − P. 465–500.

6. Colbeck S.C. A theory of water percolation in snow // Journal Glaciol. − 1972. − V. 11, N. 63. − P. 369–385.

7. Папин А.А. Разрешимость "в малом" по времени системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. − 1999. − № 114. − С. 64–70.

8. Sellers S. Theory of water transport in melting snow with a moving surface // Cold Regions Science and Technology. − 2000. − V. 2000, N 31. − P.47-57.

9. Сибин А.Н., Папин А.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. − 2021. − Т. 62, № 1 (365). − С. 109–118.

УДК 532.5

Об одной модели динамики жидкого слоя в следе за ударом упругим телом

***К.Е. Найденова*[1]*, К.А. Шишмарев*[1]*, А.А. Коробкин*[2]**

[1]АлтГУ, г. Барнаул

[2]Университет Восточной Англии, Великобритания

Статья посвящена математическому моделированию жидкости в результате удара упругим телом по свободной поверхности. Основной упор сделан на описании поведения жидкости в следе за ударом. В состоянии покоя жидкость имеет заданную конечную глубину. С использованием асимптотических методов выводится модель поведения жидкости в следе за ударом в случае большой начальной скорости удара и малой глубины жидкого слоя.