**УДК 517.956.2:517.955.8**

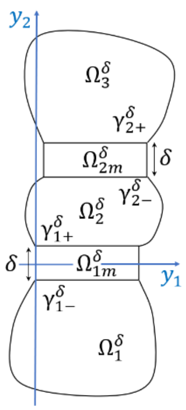
# Многомасштабный анализ антиплоского деформирования термоупругого композита

***С.А. Саженков[1,2], П.В. Гилёв[2], Э.И. Леонова[2]***
*[1]ИГиЛ СО РАН, г. Новосибирск; [2]АлтГУ, г. Барнаул*

Доклад посвящён исследованию статической модели антиплоского сдвига термоупругого композита – тела, представляющего собой термоупругую связующую матрицу, прошитую тонкими армирующими нитями. Постановка содержит два малых положительных параметра δ и ε, характеризующих толщину каждой отдельной нити и расстояние между двумя соседними нитями, соответственно. Исследуется асимптотическое поведение решений при стремлении малых параметров к нулю. В результате конструируются две модели, описывающие предельные режимы. Основные результаты настоящего исследования подробно изложены в статье [S.A. Sazhenkov, I.V. Fankina, A.I. Furtsev, P.V. Gilev, A.G. Gorynin, O.G. Gorynina, V.M. Karnaev, and E.I. Leonova, Siberian Electronic Mathematical Reports, 2021, 18(1), 282-318].

**Ключевые слова**: *линейная термоупругость, композитный материал, тонкое включение, гомогенизация, численный эксперимент.*

**1. Равновесие термоупругого тела с широкими включениями.** Рассматривается статическая задача об антиплоском сдвиге термоупругого тела (пластины), содержащего термоупругие включения конечной ширины δ. Напомним, что антиплоским сдвигом называется смещение частиц плоского тела строго перпендикулярно плоскости тела. Такие задачи являются модельными с точки зрения общей теории деформации твёрдых тел, однако они хорошо описывают ряд реальных термомеханических систем.




Краткое геометрическое описание тела состоит в следующем. Несколько подобластей (на рисунке это подобласти $\Omega_k^\delta$, $k=1,2,3$), занятых «основным» термоупругим материалом – связующей матрицей, разделены прямоугольными включениями $\Omega_{km}^\delta$, моделирующими армирующий материал с количественно другими термомеханическими свойствами, чем у основного. Всё тело в целом занимает область $\Omega^\delta$. Через $\gamma_{k+}^\delta$ и $\gamma_{k-}^\delta$ обозначаем соответственно верхние и нижние стороны включений $\Omega_{km}^\delta$, а через $\Gamma^\delta$ – внешнюю границу связующей матрицы, то есть $\Gamma^\delta = \partial\Omega^\delta \cap \left(\cup\, \partial\Omega_k^\delta\right)$.

Полагаем, что модуль упругости $a_\delta = a$, коэффициент теплового расширения $\beta_\delta = \beta$ и коэффициент теплопроводности $\lambda_\delta = \lambda$ в подобластях $\Omega_k^\delta$ одинаковы, положительны и постоянны. В прямоугольных подобластях $\Omega_{km}^\delta$ эти коэффициенты также одинаковы, положительны, постоянны и равны $a_\delta = \delta^{-1} a_m$, $\beta_\delta = \beta_m$ и $\lambda_\delta = \delta^{-1}\lambda_m$. Считаем, что к телу приложены распределённая массовая сила $\tilde{f}$ и внешние распределённые источники тепла $\tilde{g}$. Они заданы и обращаются в нуль на армирующих включениях. Теперь можем сформулировать постановку, которая является исходной в нашем исследовании.

**Задача А.** *Найти распределения смещения* $u = u(\boldsymbol{y})$ *и температуры* $\theta = \theta(\boldsymbol{y})$, *удовлетворяющие в* $\Omega^\delta$ *уравнениям равновесия и баланса тепла*

$$-\nabla_y \cdot \left(a_\delta\left(\nabla_y u - \beta_\delta \theta \mathbf{1}\right)\right) = \tilde{f}, \qquad -\nabla_y \cdot \left(\lambda_\delta \nabla_y \theta\right) = \tilde{g},$$

*на внешней границе* $\Gamma^\delta$ *связующей матрицы* $(\cup\, \Omega_k^\delta)$ *условиям* $u = 0$ *и* $\theta = 0$ *и на боковых границах* $\partial\Omega^\delta \setminus \Gamma^\delta$ *армирующих включений* $(\cup\, \Omega_{km}^\delta)$ *однородным условиям на нормальные компоненты напряжения и потока тепла:* $a_\delta\left(\nabla_y u - \beta_\delta \theta \mathbf{1}\right) \cdot \boldsymbol{n}^\delta = 0$ *и* $\left(\lambda_\delta \nabla_y \theta\right) \cdot \boldsymbol{n}^\delta = 0$.

В постановке задачи А через $\boldsymbol{n}^\delta$ обозначается вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega^\delta$, $\mathbf{1} = (1,1)^T$ – это вектор-столбец в $\mathbb{R}^2$. Заметим, что коэффициенты уравнений в задаче А являются разрывными. Соответственно, уравнения и краевые условия понимаются в слабом смысле.

С помощью хорошо известных положений теории обобщённых решений эллиптических уравнений доказывается, что при фиксированных значениях $\delta > 0$ задача А имеет единственное слабое обобщённое решение $\left(u^\delta, \theta^\delta\right)$.

**2. Переход к задаче с тонкими включениями.** Совершим предельный переход в задаче А при $\delta \to 0$. Отправной точкой в этой процедуре является подходящая замена координат $(y_1, y_2)$ на координаты $(x_1, x_2)$ в подобластях $\Omega_k^\delta$ и на координаты $(z_1, z_2)$ в подобластях $\Omega_{mk}^\delta$. Замена координат состоит в параллельном переносе подобластей $\Omega_k^\delta$ вдоль вертикальной оси при одновременном переносе вдоль вертикальной оси включений $\Omega_{mk}^\delta$ и их дополнительном «сжатии» в 1/δ раз. Целью этой замены является переход от исходных уравнений к эквивалентным, но определённым в областях, задание которых от $\delta$ не зависит.

Затем переходим к пределу при $\delta \to 0$, применяя методологию из [1, 2]. При этом, включения $\Omega_{mk}^{\delta}$ «сжимаются» в отрезки, как показано на рисунке ниже. В результате выводим, что семейство слабых решений $(u^{\delta}, \theta^{\delta})$ задачи A при $\delta \to 0$ имеет предельную точку $(u, \theta)$, которая служит слабым обобщённым решением следующей модели композитного тела с тонкими включениями.

**Задача B.** *В области* $\Omega \subset \mathbb{R}_x^2$ *требуется найти распределения смещения* $u = u(\boldsymbol{x})$ *и температуры* $\theta = \theta(\boldsymbol{x})$, *удовлетворяющих в связующей матрице* $(\Omega \setminus \gamma)$ *уравнениям равновесия и баланса тепла*

$$-\nabla_x \cdot \big(a(\nabla_x u - \beta\theta\mathbf{1})\big) = f, \qquad -\lambda \triangle_x \theta = g,$$

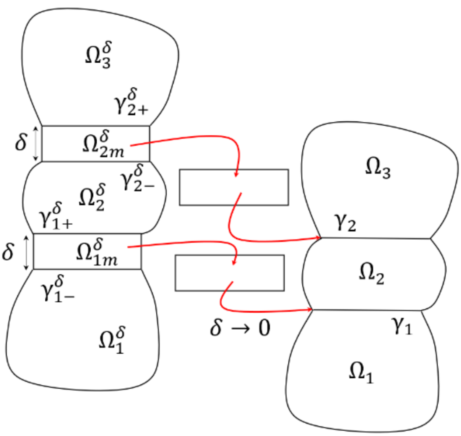
*на множестве* $\gamma$ *тонких включений уравнениям равновесия и баланса тепла*

$$[a(\nabla_x u - \beta\theta\mathbf{1})] \cdot \boldsymbol{n} = a_m \partial_{x_1}\big(\partial_{x_1} u - \beta_m \theta\big), \qquad [\lambda \partial_n \theta] = \lambda_m \partial_{x_1}^2 \theta$$

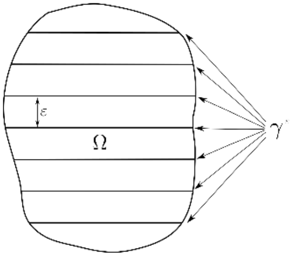
*и на границе* $\partial\Omega \setminus \gamma$ *связующей матрицы и на множестве* $\partial\gamma$ *концов тонких включений однородным условиям* $u = 0$ *и* $\theta = 0$.

В постановке задачи B совокупность $\gamma$ всех тонких армирующих включений имеет вид множества прямолинейных горизонтальных отрезков, пронизывающих связующую матрицу $\Omega \setminus \gamma$ насквозь (на рисунке имеет место $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$), $\partial\gamma$ – совокупность концов этих отрезков, $\mathbf{n} = (0,1)$ – единичная внешняя нормаль к $\gamma$, через $[\ldots]$ обозначается разность значений величин из $\Omega \setminus \gamma$, взятых на верхних и нижних берегах компонент $\gamma$ (то есть отдельных отрезков), $\partial_n = \boldsymbol{n} \cdot \nabla_x$ – производная по направлению $\boldsymbol{n}$.

Существование решений задачи B (в слабом обобщённом смысле) сразу вытекает из предельного перехода при $\delta \to 0$. Единственность слабых решений задачи B доказывается стандартным способом посредством построения энергетических оценок. Таким образом, полученная предельная постановка корректна.




**3. Гомогенизация задачи с тонкими включениями.** Далее




считаем, что тонкие включения расположены периодическим образом, расстояние между двумя соседними включениями равно малой положительной величине $\varepsilon$ характеристики включений также зависят от $\varepsilon$: $a_m \coloneqq \varepsilon a_m$, $\lambda_m \coloneqq \varepsilon \lambda_m$, где $a_m, \lambda_m = const > 0$.

При этих условиях, с помощью инструментария метода двухмасштабной сходимости на периодически расположенных кривых и поверхностях [3] совершаем предельный переход в задаче B и выводим, что семейство $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ решений задачи B имеет при $\varepsilon \to 0$ единственный предел $(u^*, \theta^*)$, который служит решением следующей предельной гомогенной модели эффективного поведения термоупругого композита на макроскопическом масштабе, то есть на масштабе, на котором нет необходимости учитывать каждое отдельное включение.

**Задача H.** *В области* $\Omega \subset \mathbb{R}_x^2$ *требуется найти распределения смещения* $u^* = u^*(\boldsymbol{x})$ *и температуры* $\theta^* = \theta^*(\boldsymbol{x})$, *удовлетворяющих усреднённым уравнениям равновесия и баланса тепла*

$$-\nabla_x \cdot \left(\mathbb{A}^*\left(\nabla_x u^* - \boldsymbol{a}_\beta^* \theta^*\right)\right) = f, \qquad -\nabla_x \cdot (\mathbb{L}^* \nabla_x \theta^*) = g,$$

*и однородным граничным условиям на границе* $\partial\Omega$*:* $u = 0$ *и* $\theta = 0$.

Здесь $\mathbb{A}^* = diag(a + a_m, a)$ – это матрица эффективных модулей упругости, $\mathbb{L}^* = diag(\lambda + \lambda_m, \lambda)$ – матрица эффективных коэффициентов теплопроводности и $\boldsymbol{a}_\beta^* = \left(\frac{a\beta + a_m\beta_m}{a + a_m}, \beta\right)^T$ – вектор эффективных коэффициентов линейного теплового расширения.

Завершая изложение, заметим, что в силу известной теории эллиптических уравнений задача H имеет единственное решение при любых заданных $f, g \in L^2(\Omega)$.

**Библиографический список**

1. Furtsev A., Rudoy E. Variational approach to modeling soft and stiff interfaces in the Kirchhoff-Love theory of plates // Int. J. Solids Struct. – 2020. – Vol. 202. – P. 562-574.

2. Rudoy E.M. Asymptotic modelling of bonding plates by a soft thin adhesive layer // Sib. Electron. Mat. Izv. – Vol. 17. – P. 615-625.

3. Allaire G., Damlamian A., Hornung U. Two-scale convergence on periodic surfaces and applications // Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow through Porous Media (May 1995) – Singapore, World Scientific Pub., 1996. – P. 15-25.