УДК 532.3 + 534.12

Вычисление дисперсионных соотношений в задачах о гидроупругих волнах в ледовых пластинах

Т.А. Сибирякова, К.А. Шишмарев
АлтГУ, г. Барнаул;

В работе рассматриваются уравнения для дисперсионных соотношений, возникающие при решении задач о колебаниях ледовых пластин. Рассмотрены колебания в форме периодических гидроупругих волн в случаях упругой и пористой ледовой пластины. Колебания вызваны приложенной периодической нагрузкой. Предложены алгоритмы вычисления комплексных корней дисперсионных соотношений.

Ключевые слова: *дисперсионные соотношения, гидроупругие волны, пористость, ледовая пластина*.

Известно, что при решении задач о колебаниях ледового покрова, вызванных внешними нагрузками, в ледовом покрове образуются гидроупругие волны, распространяющиеся от источника возмущений [1]. Если ледовый покров неограничен в любом из направлений, то всегда будет только одна такая волна. Ее форма определяется дисперсионным соотношением, связывающим частоту волны и волновое число. Для определения дисперсионного соотношения необходимо рассмотреть исходную постановку задачи с нулевым приложенным давлением и искать решение в виде периодических волн, бегущих вдоль оси, параллельно ледовому покрову. При распространении гидроупругих волн вдоль канала их число, а также количество дисперсионных соотношений, становится бесконечным [2, 3]. Все дисперсионные соотношения являются вещественными. Однако, если задача решается разложением прогибов льда на специальную систему функций, например, на вертикальные моды [4], то для определения полного решения необходимо вычислять комплексные решения уравнений, описывающие дисперсионные соотношения.

Рассматривается двумерная задача о колебаниях упругой ледовой пластины, вызванных внешней нагрузкой. Жидкость под пластиной невязкая, несжимаемая и имеет конечную глубину H, $(-H < y < 0)$. Вдоль оси x пластина неограниченная, (x, y) – декартовы координаты. Течение, вызванное прогибом пластины, считается потенциальным. В классической постановке вертикальное перемещение (прогибы) пластины из положения равновесия $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению колебаний тонкой упругой балки:

$$Mw_{tt} + Dw_{xxxx} = p(x,0,t) - P(x,t), \quad (1)$$

где M – масса льда на единицу площади, D – изгибная жесткость ледовой пластины, $p(x,0,t)$ – давление жидкости на границе лед-вода, $P(x,t)$ – функция, описывающая внешнюю нагрузку. Заметим, что уравнение (1) не учитывает вязкость льда. Как правило, дисперсионные соотношения определяются для гидроупругих волн в пластинах с нулевой вязкостью. Потенциал скорости течения жидкости $\varphi(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Полученная система уравнений замыкается кинематическим и динамическим условиями на границе лед-вода и условиями непротекания на дне и стенках водоема, если последние учитываются в рассматриваемой задаче. Решение полученной задачи ищется в виде $w(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ при условии $P(x,t) = 0$. Подставляя это представление в (1), после несложных математических преобразований получим:

$$(\kappa^4 + \delta_0)\,\kappa\, tanh(\kappa) = \gamma, \quad (2)$$

где δ_0 и γ – вещественные параметры, вычисляемые через физические параметры задачи и характеризующие ледовый покров и жидкость. Нетрудно показать, что уравнение (2) имеет одно положительное вещественное решение. Рассмотрим комплексные корни уравнения (2). Таких корней будет два типа: чисто мнимые и комплексные с вещественной частью. Для чисто мнимой части получим:

$$(\theta^4 + \delta_0)\,\theta\, tg(\theta) = -\gamma, \quad (3)$$

где $\kappa = i\,\theta$. Уравнение (3) имеет счетное число решений. Дополнительно уравнение (2) имеет 4 комплексных корня: $\pm a \pm ib$. Вычисление последних корней является затруднительным. Уравнение (2), после подстановки этих корней, разбивается на 2 неявных уравнения относительно a и b. Полученные неявные уравнения являются соответственно действительной и мнимой частью. График этих уравнений показан на рисунке 1. Алгоритм вычисления корней следующий: сначала область вычисления урезается до небольших размеров, затем методом итераций определяются значения b, удовлетворяющие неявным уравнениям, для каждого значения a из расчетной области. Затем определяется точка пересечения полученных кривых.

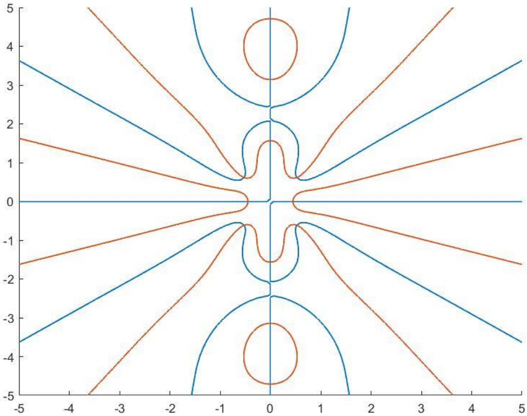

Рисунок 1. Графики неявных функций, являющихся вещественной и мнимой частями уравнения (2), синяя линяя – мнимая часть, красная – вещественная

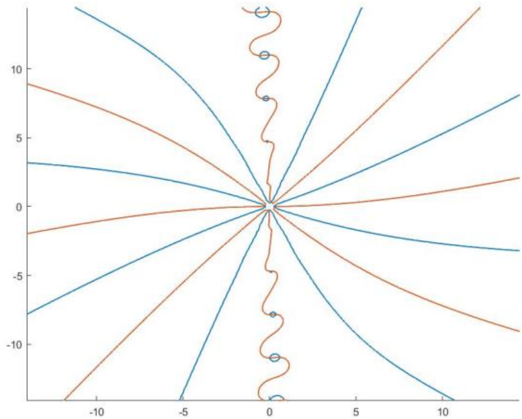

Рисунок 2. Графики неявных функций, являющихся вещественной и мнимой частями уравнения (4), синяя линяя – мнимая часть, красная – вещественная

В случае если ледовый покров является пористым, то уравнение (2) перепишется в виде:

$$(\kappa^4 + \delta_0)\,\kappa\, tanh(\kappa) = \frac{B}{A}\kappa^4 + \frac{\gamma + \delta_0 B}{A},$$

где A и B – комплексные параметры, характеризующие пористость льда. В этом случае решением уравнения будут только комплексные корни $a + ib$ (рис. 2). Заметим, что если $a + ib$ – корень, то $-a - ib$ тоже является корнем. Вычислять эти корни предлагается с использованием периодичности b: $b_n = \pi n + \delta_n$, $|\delta_n| < \pi$. Дальнейший алгоритм вычисления повторяет действия для случая упругой пластины.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008)

Библиографический список

1. V. Squire, R. Hosking, A. Kerr, P. Langhorne, Moving Loads on Ice Plates, Kluwer Academic Publishers, 1996.

2. A.A. Korobkin, T.I. Khabakhpasheva, A.A. Papin, Waves propagating along achannel with ice cover, Eur. J. Mech. B/Fluids 47 (2014), 166–175.

3. E.A. Batyaev, T.I. Khabakhpasheva. Hydroelastic waves in a channel covered with a free ice sheet // Fluid Dynamics 50 (6), 775–788.

4. A.A. Korobkin, S. Malenica, T. Khabakhpasheva. The vertical mode method in the problems of flexural-gravity waves diffracted by a vertical cylinder // Applied Ocean Research, 84(2019), 111–121.

УДК 532.3 + 534.12

Метод вертикальных мод в задачах о колебании упругого ледового покрова под действием периодической нагрузки

Т.А. Сибирякова[1], К.А. Шишмарев[1], А.А. Коробкин[2]

[1]АлтГУ, г. Барнаул;

[2]Университет Восточной Англии, Великобритания.

Статья посвящена решению задачи о колебаниях упругой ледовой пластины с нулевой пористостью. Колебания льда вызваны внешней нагрузкой с амплитудой, осциллирующей по времени. В отдалении от нагрузки колебания льда принимают форму стоячих волн. С помощью функции Грина исходная задача сводится к определению профилей