$$(\kappa^4 + \delta_0)\,\kappa\, tanh(\kappa) = \frac{B}{A}\kappa^4 + \frac{\gamma + \delta_0 B}{A},$$

где A и B – комплексные параметры, характеризующие пористость льда. В этом случае решением уравнения будут только комплексные корни $a + ib$ (рис. 2). Заметим, что если $a + ib$ – корень, то $-a - ib$ тоже является корнем. Вычислять эти корни предлагается с использованием периодичности b: $b_n = \pi n + \delta_n$, $|\delta_n| < \pi$. Дальнейший алгоритм вычисления повторяет действия для случая упругой пластины.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008)

Библиографический список

1. V. Squire, R. Hosking, A. Kerr, P. Langhorne, Moving Loads on Ice Plates, Kluwer Academic Publishers, 1996.

2. A.A. Korobkin, T.I. Khabakhpasheva, A.A. Papin, Waves propagating along achannel with ice cover, Eur. J. Mech. B/Fluids 47 (2014), 166–175.

3. E.A. Batyaev, T.I. Khabakhpasheva. Hydroelastic waves in a channel covered with a free ice sheet // Fluid Dynamics 50 (6), 775–788.

4. A.A. Korobkin, S. Malenica, T. Khabakhpasheva. The vertical mode method in the problems of flexural-gravity waves diffracted by a vertical cylinder // Applied Ocean Research, 84(2019), 111–121.

УДК 532.3 + 534.12

Метод вертикальных мод в задачах о колебании упругого ледового покрова под действием периодической нагрузки

Т.А. Сибирякова[1], К.А. Шишмарев[1], А.А. Коробкин[2]

[1]АлтГУ, г. Барнаул;

[2]Университет Восточной Англии, Великобритания.

Статья посвящена решению задачи о колебаниях упругой ледовой пластины с нулевой пористостью. Колебания льда вызваны внешней нагрузкой с амплитудой, осциллирующей по времени. В отдалении от нагрузки колебания льда принимают форму стоячих волн. С помощью функции Грина исходная задача сводится к определению профилей колебаний льда по вертикальной координате, которая решается методом вертикальных мод.

Ключевые слова: *идеальная жидкость, гидроупругие волны, пористость, ледовая пластина, потенциальное течение.*

Взаимодействие гравитационных волн с тонкими пористыми структурами представляет значительный интерес [1], [2]. Существует множество примеров математических моделей океанских волн, взаимодействующих с пористыми структурами. Например, с развитием строительства в морях и океанах инженерных сооружений важными являются исследования по снижению нагрузки на океанские сооружения специальными пористыми волнорезами. В этом случае теоретические исследования часто используют приближение тонких пластин и фокусируются на анализе характеристик этих структур при ослаблении волн путем их рассеяния [3].

В работе [4] исследованы нестационарные колебания пороупругого ледового покрова под действием приложенного периодического давления. Было получено, что увеличение параметра пористости увеличивает прогибы пороупругой пластины в области приложенного давления, уменьшает прогибы в отдалении от него, уменьшает наблюдаемую область колебаний. Также было показано, что пористость увеличивает длину гидроупругой волны, распространяющейся от области приложенного давления.

Рассматриваются колебания упругой ледовой пластины, вызванные внешним давлением. Жидкость под пластиной невязкая, несжимаемая и имеет конечную глубину H, $(-H < y < 0)$. Вдоль оси x пластина неограниченная, (x, y) – декартовы координаты. Течение, вызванное прогибом пластины, считается потенциальным. Вертикальное перемещение (прогибы) пластины из положения равновесия $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению колебаний тонкой упругой балки, потенциал скорости течения жидкости $\varphi(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Колебания пластины вызваны приложенным внешним давлением с амплитудой, осциллирующей с постоянной частотой.

Рассмотрим случай, когда прогибы льда в отдалении от нагрузки примут форму стоячих волн, периодически осциллирующих с частотой колебания амплитуды внешней нагрузки. В этом случае система уравнений, описывающая рассматриваемую задачу, имеет вид:

$$Mw_{tt} + EJw_{xxxx} = p(x,0,t) - P_{ext}(x)cos(\omega t), \tag{1}$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \ (-H < y < 0), \tag{2}$$

$$\varphi_y = 0 \ \ (y = -H), \ \ \varphi_y = w_t(y = 0), \tag{3}$$

$$p(x, 0, t) = -\rho\varphi_t(x, 0, t) - \rho g\omega \ \ (y = 0). \tag{4}$$

где $p(x, 0, t)$ – гидродинамическое давление на границе лед–жидкость, определяемое из линеаризованного интеграла Коши-Лагранжа, $M = \rho_i h_i$ – масса льда на единицу площади, ρ_i – плотность льда, h_i – толщина пластины, $P_{ext}(x)$ – функция, описывающая форму внешней нагрузки, $EJ = Eh_i^3/(12(1 - \nu^2))$ – изгибная жесткость пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $w_{xxxx} = \partial^4 w/\partial x^4$, ω – частота осцилляций амплитуды внешней нагрузки. Внешняя нагрузка имеет заданную форму в виде функции локализованного пятна давления $P_{ext}(x)$.

Отсутствие пористости, вязкости и других демпфирующих эффектов приводит к необходимости постановки условий на прогибы в отдалении от нагрузки:

$$W \sim W_\infty e^{-ik|x|}(|x| \to \infty), \tag{5}$$

Решение задачи (1)–(4) ищется в виде

$$w(x, t) = Re[W(x)e^{i\omega t}], \quad \varphi(x, y, t) = Re[i\omega\Phi(x, y)e^{i\omega t}],$$

где k – волновое число и W_∞ – амплитуда гидроупругих волн в отдалении от нагрузки.

После подстановки прогибов и потенциала в указанном виде в систему уравнений, краевая задача (1)–(5) решается с помощью функции Грина:

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{ext}(x_0)\, G(x, x_0) dx_0,$$

$$\Phi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{ext}(x_0)\, \Psi(x, x_0, y) dx_0.$$

Уравнение для поиска G и Ψ следует из уравнения (1). Соответствующий дифференциальный оператор имеет постоянные коэффициенты, поэтому можем записать

$$G(x, x_0) = G_1(x - x_0), \text{ где } G_1(-x) = G_1(x),$$
$$\Psi(x, x_0, y) = \Psi_1(x - x_0, y), \text{ где } \Psi_1(-x, y) = \Psi_1(x, y).$$

Путем несложных математических преобразований можно получить краевые условия для $G_1(x)$, описывающие уходящие волны: $G_1{}'(0) = 0$, $G_1{}'''(0) = -\frac{1}{2}$ и $\Psi_1{}'(0, y) = 0$ – условие симметрии для $\Psi_1(x, y)$.

Пользуясь связью G_1 и Ψ_1, исходная краевая задача сводится к задаче относительно Ψ_1:

$$\Psi_1{}^V + \delta_0\Psi_1{}' = \gamma\Psi_1 \ (y = 0)\,,$$

$$\Psi_{1,xx} + \Psi_{1,yy} = 0 \ (-1 < y < 0),$$

$$\Psi_{1,y} = 0 \ \ (y = -1),$$

$$\Psi_1 \sim \Psi_{1\infty} e^{-ik|x|}(|x| \to \infty).$$

Решение последней задачи можно найти методом вертикальных мод:

$$\Psi_1(x,y) = \sum_{\substack{n=-2 \\ n\neq 0}}^{\infty} C_n e^{-i\kappa_n x} f_n + C_0 e^{i\kappa_0 x} f_0,$$

где κ_n – волновое число в безразмерном виде.

Функции $f = \frac{\cosh(\kappa_n(1+y))}{\kappa_n \sinh(\kappa_n)}$ называются вертикальными модами, которые нормированы и ортогональны в специальном смысле:

$$< F, G >= \int_{-1}^{0} F(z)G(z)dz + \frac{1}{\gamma}(F'''(z)G'(z) + F'(z)G'''(z)).$$

Коэффициенты этих функций находятся из краевых условий для G_1 и определения ортогонального произведения. Для полного решения задачи необходимо вычислить κ_n, которые являются корнями соответствующего дисперсионного соотношения

$$(\kappa^4 + \delta_0)\,\kappa\, tanh(\kappa) = \gamma,$$

δ_0 и γ – параметры, характеризующие ледовый покров и жидкость.

После определения корней дисперсионного соотношения, прогибы льда могут быть восстановлены через интеграл от функции Грина. Ожидается, что полученное решение будет являться предельным решением задачи о колебаниях пористой пластины при стремлении пористости к 0.

Работа выполнена по проекту МК-204.2020.1 "Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей в пороупругих средах и их приложения в динамике снежно-ледового покрова" при поддержке гранта Президента РФ.

Библиографический список

1. S. Zhenga, M. Meylan, G. Zhua, D. Greavesa, G. Iglesiasc, Wave scattering from multiple circular floating porous elastic plates, The 35th

International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, 26-29 April, 2020, Seoul, Korea, (2020).

2. D. Mondal, S. Banerjea, Scattering of water waves by an inclined porous plate submerged in ocean with ice cover, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 69(2016), no. 2, 195–213.

3. M.H. Meylan, L.G. Bennetts, M.A. Peter, Water-wave scattering and energy dissipation by a floating porous elastic plate in three dimensions, Wave Motion 70 (2017), 240–250.

4.Kristina N. Zavyalova, Konstantin A. Shishmarev, Alexander A. Korobkin, The Response of a Poroelastic Ice Plate to an External Pressure, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2021, 14(1), 87–97.

УДК 517.95

Автомодельная задача фильтрации вязкой жидкости в вязкоупругом пористом скелете

М.А. Токарева[1], Р.А. Вирц[1], В.Н. Ларионова[1]

[1]АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена численному исследованию автомодельной задачи фильтрации вязкой жидкости в вязкоупругом пористом скелете.

Ключевые слова: *фильтрация, пористость, вязкоупругая среда, закон Дарси.*

Рассмотрим следующую квазилинейную систему составного типа, описывающую пространственное нестационарное изотермическое движение сжимаемой жидкости в вязкоупругой пористой среде [1, 2]:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + div((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s) = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + div(\rho_f\phi\vec{v}_f) = 0,$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{k\phi^n}{\mu}(\nabla p_f - \rho_f\vec{g}),$$

$$\nabla\cdot\vec{v}_s = -\frac{\phi^m}{\eta}p_e - \phi^b\beta_\phi(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s\cdot\nabla p_e),$$

$$\nabla\cdot\sigma + \rho_{tot}\vec{g} = 0, \rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s,$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, p_e = (1-\phi)(p_s - p_f).$$

Здесь ϕ – пористость; $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_s, \vec{v}_f$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз; p_e – эффективное давление, p_{tot} – общее