

International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, 26-29 April, 2020, Seoul, Korea, (2020).

2. D. Mondal, S. Banerjea, Scattering of water waves by an inclined porous plate submerged in ocean with ice cover, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 69(2016), no. 2, 195–213.

3. M.H. Meylan, L.G. Bennetts, M.A. Peter, Water-wave scattering and energy dissipation by a floating porous elastic plate in three dimensions, Wave Motion 70 (2017), 240–250.

4. Kristina N. Zavyalova, Konstantin A. Shishmarev, Alexander A. Korobkin, The Response of a Poroelastic Ice Plate to an External Pressure, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2021, 14(1), 87–97.

УДК 517.95

## Автомодельная задача фильтрации вязкой жидкости в вязкоупругом пористом скелете

*М.А. Токарева<sup>1</sup>, Р.А. Вириц<sup>1</sup>, В.Н. Ларионова<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена численному исследованию автомодельной задачи фильтрации вязкой жидкости в вязкоупругом пористом скелете.

**Ключевые слова:** *фильтрация, пористость, вязкоупругая среда, закон Дарси.*

Рассмотрим следующую квазилинейную систему составного типа, описывающую пространственное нестационарное изотермическое движение сжимаемой жидкости в вязкоупругой пористой среде [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \operatorname{div}((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f\phi\vec{v}_f) &= 0, \\ \phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) &= -\frac{k\phi^n}{\mu}(\nabla p_f - \rho_f\vec{g}), \\ \nabla \cdot \vec{v}_s &= -\frac{\phi^m}{\eta}p_e - \phi^b\beta_\phi\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla p_e\right), \\ \nabla \cdot \sigma + \rho_{tot}\vec{g} &= 0, \rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s, \\ p_{tot} &= \phi p_f + (1-\phi)p_s, p_e = (1-\phi)(p_s - p_f). \end{aligned}$$

Здесь  $\phi$  – пористость;  $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_s, \vec{v}_f$  – соответственно истинные плотности и скорости фаз;  $p_e$  – эффективное давление,  $p_{tot}$  – общее

давление,  $\rho_{tot}$  – общая плотность;  $\vec{g}$  – плотность массовых сил;  $\beta_\phi$  – коэффициент сжимаемости твердого скелета,  $\eta$  – динамическая вязкость твердой фазы,  $k$  – проницаемость,  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости,  $\sigma$  – общий тензор напряжений. Истинная плотность твердой фазы  $\rho_s$  принимается постоянной. Система является замкнутой, если  $p_f = p_f(\rho_f)$  или  $\rho_f = const$ . В случае неполного уравнения баланса сил  $\frac{dp_{tot}}{dx_i} = -\rho_{tot}g$  и  $g = 0$  разрешимость автомодельной задачи для исходной системы уравнений установлена в работе [3].

В одномерном случае при условии  $\rho_s, \rho_f = const$  приходим к замкнутой системе уравнений для  $\phi, v_s, v_f, p_s, p_f$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_f \phi) &= 0, \\ \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(v_s(1-\phi)) &= 0, \\ \phi(v_f - v_s) &= -\frac{k\phi^n}{\mu} \left( \frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f g \right), \\ \frac{\partial v_s}{\partial x} &= -\frac{\phi^m}{\eta} p_e - \phi^b \beta_\phi \left( \frac{\partial p_e}{\partial t} + v_s \frac{\partial p_e}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial p_{tot}}{\partial x} &= -\rho_{tot}g + 2\eta \frac{\partial}{\partial x} \left( (1-\phi) \frac{\partial v_s}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Перейдём в этой системе к безразмерным переменным:

$t = t_1 t', x = x_1 x', v_f = v_1 v'_f, v_s = v_1 v'_s, p_f = p_1 p'_f, p_{tot} = p_1 p'_{tot}$  (далее штрихи опускаются), также положим:  $t_1 = \frac{x_1}{v_1}, \alpha = \frac{k p_1}{\mu v_1 t_1}, \lambda = \beta_\phi p_1, \beta = \frac{k \rho_1 g}{\mu v_1}, \gamma = \frac{p_1 t_1}{\eta}, \zeta = \frac{2\eta}{x_1 t_1 g \rho_f}, \rho = \frac{\rho_s}{\rho_f}$  и будем рассматривать автомодельное решение типа "бегущей волны". Полагая, что все искомые функции зависят лишь от переменной  $\xi = x - ct (> 0)$  ( $c$  – постоянный параметр), после некоторых преобразований, приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \phi(-c + v_f) \right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( (1-\phi)(v_s - c) \right) = 0, \quad (2)$$

$$\phi(v_f - v_s) = -\alpha \phi^n \frac{dp_f}{d\xi} - \beta \phi^n, \quad (3)$$

$$\frac{dv_s}{d\xi} = -\gamma \phi^m p_e - \lambda \phi^b (v_s - c) \frac{d(p_{tot} - p_f)}{d\xi}, \quad (4)$$

$$\kappa \frac{dp_{tot}}{d\xi} = \zeta \frac{d}{d\xi} \left( (1 - \phi) \frac{dv_s}{d\xi} \right) + \rho(1 - \phi) - \phi. \quad (5)$$

Система дополняется граничными условиями:

$$v_s(0) = v_s^0, v_f(0) = v_f^0, \phi(0) = \phi^0, \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} v_s(\xi) = u^+, \lim_{\xi \rightarrow \infty} v_f(\xi) = u^+, \lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi(\xi) = \phi^+,$$

где  $v_s^0, v_f^0, \phi^0, \phi^+$  – заданные постоянные, удовлетворяющие условиям  $v_s^0 \neq v_f^0, \phi^0 \neq \phi^+$ .

Из уравнений (1), (2) системы получим:

$$c = \frac{\phi^+(1 - \phi^0)v_s^0 - \phi^0(1 - \phi^+)v_f^0}{\phi^+ - \phi^0}, \\ u^+ = \phi^0 v_f^0 + (1 - \phi^0)v_s^0, \\ A_2 = \frac{(1 - \phi^+)\phi^0(1 - \phi^0)(v_f^0 - v_s^0)}{\phi^+ - \phi^0}, A_1 = \frac{\phi^+}{1 - \phi^+} A_2.$$

Таким образом, система преобразуется к следующему виду:

$$\phi \left( \frac{A_1}{\phi} - \frac{A_2}{1 - \phi} \right) = -\alpha \phi^n \frac{dp_f}{d\xi} - \beta \phi^n, \quad (6)$$

$$A_2 \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{1 - \phi} \right) = -\gamma \phi^m (p_{tot} - p_f) - \phi^b \frac{\lambda A_2}{1 - \phi} \frac{dp_e}{d\xi}, \quad (7)$$

$$\kappa \frac{p_{tot}}{d\xi} = \zeta A_2 \frac{d}{d\xi} \left( (1 - \phi) \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{1 - \phi} \right) \right) + \rho(1 - \phi) - \phi. \quad (8)$$

Предположим, что скелет обладает более вязкими свойствами, нежели упругими, тогда во втором уравнении данной системы останется только первое слагаемое в правой части.

Выразим из уравнений (6) и (8) полученной системы  $\frac{dp_f}{d\xi}$  и  $\frac{dp_{tot}}{d\xi}$  соответственно. Поделим (7) на  $\phi^m$ , продифференцируем его и подставим выраженные производные. Таким образом, получим уравнение для нахождения функции  $\phi$ :

$$\left( \frac{\phi^{-m}}{(1 - \phi)^2} + \frac{\zeta}{\kappa(1 - \phi)} \right) \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} + \left( \frac{2\phi^{-m}}{\gamma(1 - \phi)^3} - \frac{m\phi^{-m-1}}{\gamma(1 - \phi)^2} + \frac{\zeta}{\kappa(1 - \phi)} \right) \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 + \\ + \frac{A_1 \phi^n}{\alpha A_2} - \frac{\phi^{1-n}}{\alpha(1 - \phi)} - \frac{\phi + (1 - \phi)\rho}{\kappa A_2} + \frac{\beta}{\alpha A_2} = 0.$$

Поиск решения данного уравнения выполнен методом установления. Результаты приведены на рисунках 1-2. Линии разного цвета отвечают за значение функции на каждом временном слое.

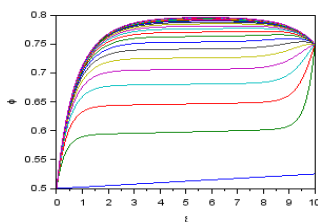


Рисунок 1 – Зависимость функции пористости от автомодельной переменной в случае значений параметров  $(t_1, \alpha, \beta, \lambda, \gamma, k, \zeta, \rho)$ , взятых из [4]

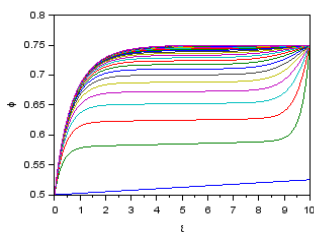


Рисунок 2 – Зависимость функции пористости от автомодельной переменной в случае равенства единице параметров  $(t_1, \alpha, \beta, \lambda, \gamma, k, \zeta, \rho)$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ в рамках научного проекта МК-204.2020.1 "Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей в пороупругих средах и их приложения в динамике снежно-ледового покрова".*

### Библиографический список

1. Morency S. atal. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Research. – 2007.
2. Fowler A. Mathematical Geoscience. – Springer-Verlag London Limited, 2011.
3. Токарева М.А. Вирц Р.А. Аналитическое и численное исследование задачи фильтрации в пороупругой среде // МАК 2016.
4. J.A.D. Connolly and Yu.Yu.Podladchikov. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock//Geodinamira Acta (Paris), 1998.