УДК 517.947

Асимптотика решения задачи Коши для неоднородной системы Соболева при малых финитных возмущениях

С.И. Янов
АлтГПУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию поведения при t→∞ решения задачи Коши для неоднородной системы Соболева.

Ключевые слова: *асимптотика решения, задача Коши, неоднородная система Соболева.*

Исследуется поведение при t→∞ решения задачи Коши для системы С.Л. Соболева [1, с. 51], описывающей малые колебания вращающейся жидкости:

$$\vec{V}_t - [\vec{V}\times\vec{\omega}] + \text{grad } P = \vec{f}, \quad \overline{x} = (x,y,z) \in R^3, \quad t \geq 0 \qquad (1)$$
$$\text{div } \vec{V} = 0$$
$$\vec{V}|_{t=0} = 0, \quad P|_{|(x,y,z0|=\infty} = 0, \quad \vec{\omega} = (0, 0, 1).$$

Ранее поведение решения задачи Коши исследовалось для уравнения Соболева:

$$\Delta\, u_{tt} + u_{zz} = h \qquad (2)$$
$$u|_{t=0} = \varphi, \qquad u_t|_{t=0} = \psi.$$

В работах С.Л. Соболева [1], В.Н. Масленниковой [2], С.В. Успенского, Г.В. Демиденко [3], С.В. Успенского, Е.Н. Васильевой [4-5], С.И. Янова [5, 6-9] была получена асимптотика в разных случаях для задачи (2), однако не была установлена связь асимптотики решения задачи (1) от воздействия силы $\vec{f}$. В работе [8] было приближенно описана асимптотика решения задачи Коши для системы Соболева (1). Обозначим для $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3)$ $\Omega(\vec{w}) = D_x w_2 - D_y w_1$ – завихренность вектора $\vec{w}$ [10, с. 19].

Настоящая работа уточняет результаты работы [8] для случая финитной функции $\vec{f}(t, \overline{x})$ и колебательного характера $f_3(t, \overline{x})$, $\Omega(\vec{f})$.

Теорема. *Если при каждом* $t \geq 0$ $f_i(t, \overline{x}) \in C_0^\infty(R^3)$, *i=1,2,3, и*

$$supp_x f_i(t, \overline{x}) \subset U_R = \{\overline{x} : |\overline{x}| \leq R\} \ \forall t \geq 0,$$
$$supp_t f_i(t, \overline{x}) \subset (t_1, t_2), \ 0<t_1<t_2,$$

функции f_i $(t, \overline{x})$ непрерывно дифференцируемы и финитны по t, причем $f_3(t, \overline{x})$ имеет «колебательный характер», то есть существует финитная по t непрерывно дифференцируемая функция $g(t, \overline{x})$, такая что $f_3 = g'_t$, тогда функция $D_x^\beta P(t, \overline{x})$ либо осциллирующая по t на [0, ∞), при этом при больших t $D_x^\beta P \approx O(t^{-2/5}), |\beta| \geq 0$, либо суммируема по t на [0,∞) и не меняет своего знака в некоторой окрестности t=∞. Компоненты скорости V_1, V_2 либо осциллирующие по t на [0,∞), либо суммируемы по t на [0,∞) и не меняют своего знака в некоторой окрестности t=∞. Если кроме этого предположить, что функции $g(t, \overline{x})$, $\Omega(\vec{f})$ имеют «колебательный характер», то есть $\forall\ \overline{x}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \ddot{x})dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(\vec{f})dt = 0$$

то компонента скорости V_3 либо осциллирующая по t на [0, ∞), либо V_3 суммируема на [0, ∞) и не меняет своего знака в некоторой окрестности t = ∞.

Библиографический список

1. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – Т. 18. – № 1. – С. 3–50.

2. Масленникова В.Н. Оценки в Lp и асимптотика при t→∞ решения задачи Коши для системы Соболева // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1968. – Т.103. – С. 117–141.

3. Успенский С.В., Демиденко Г.В. О поведении на бесконечности решений одной задачи С.Л. Соболева // Сиб. мат. журн. – 1983. – Т. 24. – № 5. – С. 199–210.

4. Успенский С.В., Васильева Е.Н. Качественное исследование решения одной задачи С.Л. Соболева при t→∞ // Тр. МИАН. – 1995. – Т. 210. – С. 274–283.

5. Успенский С.В., Васильева Е.Н., Янов С.И. О дифференциальных свойствах решения первой смешанной краевой задачи для системы Соболева // Тр. МИАН. – 1999. – Т. 227. – С. 311–319.

6. Янов С.И. Пространства типа Соболева–Винера и асимптотические свойства их функций. – Барнаул: Изд-во БГПУ. 2007. – 113 с.

7. Янов С.И. Приложения пространств типа Соболева–Винера. – Барнаул: Изд-во АлтГПА. – 2012. – 91 с.

8. Янов С.И. Асимптотика решения задачи Коши для системы Соболева // INFO’’17: сборник трудов № 9 (!?). – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ. 2017. – С. 182–184.

9. Янов С.И. Асимптотическое разложение решения первой начально-краевой задачи для системы малых колебаний вращающейся

жидкости // МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике, Барнаул, 1–5 июля 2020 г. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та , 2020. – С. 100–102.

10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1977. – 407 с.