



**СБОРНИК ТРУДОВ СЕМНАДЦАТОЙ
РЕГИОНАЛЬНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

Барнаул, июнь 2014

АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЛТАЙСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ГОРНО-АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ВОДНЫХ И ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ СО РАН

иоик
|
2014

СБОРНИК ТРУДОВ СЕМНАДЦАТОЙ РЕГИОНАЛЬНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

**посвященной 40-летию факультета
математики и информационных технологий**

Барнаул, июнь 2014

Алгебра и математическая логика

Геометрия и анализ

Дифференциальные уравнения
и математические модели

Информационные и вычислительные технологии

Математическое моделирование производственных, экономических и
экологических систем

Теория и методика профессионального образования



Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2014

ББК 22.1я431
С 232

Главный редактор
профессор Н.М. Оскорбин

Редколлегия:

А.И. Будкин, О.Н. Гончарова, С.И. Жилин, Г.В. Лаврентьев,
С.А. Кантор, А.Г. Петрова, Г.В. Пышноград,
Е.Д. Родионов, А.Н. Саженков, Л.А. Хворова, С.П. Шарый

С 232 **Сборник трудов семнадцатой региональной конференции по математике «МАК-2014», посвященной 40-летию факультета математики и информационных технологий.** – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2014. – 184 с.

Выпуск содержит тексты докладов, представленных на секциях: «Алгебра и математическая логика», «Геометрия и анализ», «Дифференциальные уравнения и математические модели», «Информационные и вычислительные технологии», «Математическое моделирование производственных, экономических и экологических систем», «Теория и методика профессионального образования» семнадцатой региональной конференции по математике «МАК–2014». Тексты воспроизводятся с представленного авторами компьютерного набора.

© Алтайский государственный университет, 2014

Секция 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

УДК 512.54

О новом классе m -групп

Н.В. Баянова

АлтГУ, г. Барнаул

Согласно [1], m -группой называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle G, \bullet, e, ^{-1}, \vee, \wedge, \varphi \rangle$, где $\langle G, \bullet, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является решеточно упорядоченной группой (ℓ -группой) и φ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \bullet, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ выполнены соотношения:

$$\begin{aligned}\varphi(xy) &= \varphi(x)\varphi(y), \quad \varphi^2(x) = x, \\ \varphi(x \wedge y) &= \varphi(x) \vee \varphi(y), \quad \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y).\end{aligned}$$

В дальнейшем φ называем реверсивным автоморфизмом ℓ -группы G второго порядка. Свойства реверсивных автоморфизмов второго порядка были изучены в [2].

Согласно [3], обозначим через $A(n, 2)$, $n \in N$, группу

$$\begin{aligned}A(n, 2) &= \langle a \mid [u_i, u_j] = \\ &= [(u_1^{\sigma_1} \dots u_n^{\sigma_n})^{-1} a u_1^{\sigma_1} \dots u_n^{\sigma_n}, a] = e \rangle,\end{aligned}$$

где $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in M_n = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid \sigma_i \in \{0, 1\}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Решеточный порядок на группе $A(n, 2)$, $n \in N$ определим соотношениями:

- 1) $u_1 \gg u_2 \gg \dots \gg u_n \gg a > e$,
- 2) $a \wedge (u_1^{\sigma_1} \dots u_n^{\sigma_n})^{-1} a u_1^{\sigma_1} \dots u_n^{\sigma_n} = e$,

при $\sum_{i=1}^n \sigma_i \neq 0$, $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in M_n$.

Справедлива следующая

Теорема. *Отображение $\varphi: A(n, 2) \rightarrow A(n, 2)$ определяемое правилом*

$$\varphi(u_i) = u_i^{-1}, \quad \varphi(a) = a^{-1}, \quad \varphi(a^{u_1^{\sigma_1} \dots u_n^{\sigma_n}}) = (a^{u_1^{\sigma_1} \dots u_n^{\sigma_n}})^{-1},$$

где $i = 1, \dots, n$ и $\sum_{i=1}^n \sigma_i \neq 0$, $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in M_n$ является реверсивным автоморфизмом второго порядка ℓ -группы $A(n, 2)$.

Библиографический список

1. Giraudet M., Rachunek J. Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. – 1999. – V. 49, № 124. – P. 743–766.
2. Баянова Н.В., Никонова О.В. Реверсивные автоморфизмы решечно упорядоченных групп // Сиб. мат. ж. – 1995. – Т. 36, № 4. – С. 765–768.
3. Гурченков С.А. Многообразия ℓ -групп с тождеством $[x^p, y^p] = e$ конечно-базируемы // Алгебра и логика. – 1984. – Т. 23, №1. – С. 27–47.

УДК 512.57

Об абсолютно замкнутых группах в квазимногообразиях групп

А.И. Будкин

АлтГУ, г. Барнаул

Квазимногообразие групп – это класс групп, определяемый специальными формулами, называемыми квазитожествами.

Пусть H – подгруппа группы G , S – свободное произведение в данном квазимногообразии M группы G на G с объединенной подгруппой H . Группа H называется замкнутой в G (относительно M), если пересечение свободных сомножителей группы S совпадает с H . Группа H называется абсолютно замкнутой в классе M , если она замкнута в каждой группе из M , содержащей H . Группа H называется n -замкнутой в классе M , если она замкнута в каждой группе G из M , порожденной по модулю H n элементами.

Теорема. *Если для каждого натурального числа n группа H n -замкнута в квазимногообразии M , то H абсолютно замкнута в этом квазимногообразии.*

УДК 514.765

О классификации конечных локальных колец**Е.В. Журавлев***АлтГУ, г. Барнаул*

Пусть R – конечное коммутативное локальное кольцо характеристики $p = 2$, $J = J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R , $R/J(R) = GF(p^2) = F$ – конечное поле и

$$J^4 = 0, \dim_F J/J^2 = 2, \dim_F J^2/J^3 = 2, \dim_F J^3 = 1.$$

Тогда

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw$$

и

$$J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw,$$

где $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$ – отмеченный базис идеала J над полем F (подробнее см. [1, 2]), причем $u_1, u_2 \in J \setminus J^2$, $v_1, v_2 \in J^2 \setminus J^3$, $w \in J^3$.

Так как $u_i u_j \in J^2$ и $u_i v_j, u_i w \in J^3$, то

$$u_i u_j = a_{ij}^1 v_1 + a_{ij}^2 v_2 + b_j w \text{ и } u_i v_j = c_{ij} w, v_j u_i = d_{ij} w$$

для некоторых $a_{ij}^1, a_{ij}^2, b_j, c_{ij}, d_{ij} \in F, i = \overline{1, 2}$.

Рассмотрим матрицы умножения:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как R – коммутативное кольцо, то $C = D$, а матрицы A_1, A_2, B являются симметрическими.

Если $R(A'_1, A'_2, B', C', D')$ и $R(A''_1, A''_2, B'', C'', D'')$ – изоморфные кольца, то пары матриц $\langle A'_1, A'_2 \rangle, \langle A''_1, A''_2 \rangle$ конгруэнтны, то есть существуют невырожденные матрицы $P, R \in M_2(F)$ такие, что

$$\begin{cases} A'_1 = P^T (r_{11} A''_1 + r_{12} A''_2) P, \\ A'_2 = P^T (r_{21} A''_1 + r_{22} A''_2) P. \end{cases}$$

Конгруэнтность является отношением эквивалентности и существует всего два различных класса такой эквивалентности с представителями

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ и } \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где $\delta = 0$, $\varepsilon, \varepsilon \notin \Gamma = \{x^2 + x \mid x \in F\}$ [3, с. 240].

Все попарно неизоморфные кольца, матрицы A_1, A_2 которых принадлежат первому классу, определяются следующими четверками матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Библиографический список

1. Журавлев Е.В. Конечные локальные кольца порядка p^6 и характеристики p , радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре // Известия АлтГУ. – 2006. – №1(49). – С. 17–32.

2. Журавлев Е.В. О классификации конечных локальных колец характеристики p^2 , радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре // Известия АлтГУ. – 2008. – № 1(57). – С. 18–28.

3. Corbas B., Williams G.D. Congruence of two-dimensional subspaces in $M_2(K)$ (characteristic 2) // Pacific Journal of mathematics. – 1999. – V. 188, № 2. – P. 237–249.

УДК 512.57

Квазимногообразия 2-степенно нильпотентных групп простой экспоненты

Д.В. Ильина

АлтГУ, г. Барнаул

В работе изучаются формулы специального вида $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)(t_1(x_1, \dots, x_n) = 1) \& (t_2(x_1, \dots, x_n) = 1) \rightarrow (t_3(x_1, \dots, x_n) = 1)$, называемые *2-квазитожествами*.

Пусть M – класс групп, заданный тождествами $(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, y, z] = 1)$, $(\forall x)(x^3 = 1)$. Квазитожество называется *тривиальным*, если оно истинно в любой группе из квазимногообразия M , либо ложно в любой неабелевой группе из M .

Теорема 1. *Квазитожество*

$(x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [x_i, x_j]^{v_{ij}} = 1 \& x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [x_i, x_j]^{u_{ij}} = 1 \rightarrow x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [x_i, x_j]^{w_{ij}} = 1)$, где $s_k, t_k, p_k, v_{ij}, u_{ij}, w_{ij} \in \{0, 1, 2\}$, *тривиальное, если хотя бы один из s_k не равен нулю.*

Теорема 2. *Всякое 2-квазитожество от четырех переменных является тривиальным.*

УДК 512.54.01

Об одном классе Леви экспоненты 2р

В.В. Лодейщикова

АлтГТУ, г. Барнаул

Покрытием группы G называется всякая такая система подгрупп этой группы, что теоретико-множественное объединение этих подгрупп совпадает с G . Исследование влияния свойств покрытия на строение самой группы – одно из актуальных направлений теории групп. Особый интерес представляет изучение свойств группы G , которые следуют из свойств групп некоторого покрытия группы G .

Для произвольного класса групп M обозначим через $L(M)$ класс всех групп G , в которых нормальное замыкание любого элемента из G принадлежит M . Класс $L(M)$ групп называется *классом Леви*, порождённым M . Изучение классов Леви следует рассматривать как шаг в

направлении исследования строения групп, покрываемых системой нормальных подгрупп.

Зафиксируем простое число p , $p \neq 2$. Будем рассматривать группу

$$A = gr(a, b \mid a^2 = 1, b^p = 1, a^{-1}ba = b^{-1}).$$

Пусть N – многообразии групп, заданное тождествами:

$$(\forall x)(x^{2p} = 1), (\forall x)(\forall y)([x^2, y^2] = 1), (\forall x)(\forall y)([x, y]^p = 1).$$

Через M обозначим многообразии, задаваемое формулами:

$$\begin{aligned} &(\forall x)(x^{2p} = 1), \\ &(\forall x)(\forall y)([x, y, x]^p = 1), \\ &(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\left[(x^y)^2, (x^z)^2 \right] = 1), \\ &(\forall x)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\left[x^u, x^v, (x^z)^2 \right] = 1), \\ &(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\left[x^u, x^v, [x^y, x^z] \right] = 1). \end{aligned}$$

Лемма. Многообразии, порожденное группой A , совпадает с многообразием N .

Теорема. Класс Леви, порожденный многообразием N , совпадает с многообразием M .

УДК 512.57

О квазимногообразиях групп аксиоматического ранга 2

Д.С. Отмахов

АлтГУ, г. Барнаул

Аксиоматический ранг квазимногообразия – это наименьшее число n такое, что данное квазимногообразие можно задать системой квазитожеств от n переменных. Множество квазимногообразий аксиоматического ранга не выше n образуют решетку.

В работе найдено описание квазимногообразий групп аксиоматического ранга не выше двух, содержащихся в многообразии N 2-ступенно нильпотентных групп экспоненты p^2 , с коммутантом экспо-

ненты p , где p – фиксированное простое число, $p \neq 2$. Построена решетка, состоящая из этих квазимногообразий, которая оказалась недистрибутивной.

Рассматриваются группы, имеющие в N следующие представления: $A = gr(x, y \mid y^p = 1)$, $B = gr(x, y \mid \emptyset)$, $C = gr(x, y \mid x^p = y^p = 1)$, $D = gr(x, y \mid x^p[x, y] = y^p = 1)$, $F = gr(x, y \mid x^p[x, y] = 1)$.

Теорема 1. Всякая 2-порожденная группа из N изоморфна одной из этих групп.

Теорема 2. Решетка квазимногообразий, содержащихся в N , аксиоматического ранга не выше 2 состоит из десяти элементов.

УДК 511-33

Замечательная таблица степеней четных чисел

М.И. Стальная, С.Ю. Еремочкин, Д.А. Королев
АлтГТУ им. И.И. Ползунова, Барнаул

Часто при решении каких-либо задач возникает проблема извлечения корня высокой степени из целого действительного числа, когда под рукой нет соответствующего вычислительного электронного устройства (калькулятор, компьютер и др.), или данное устройство не вмещает необходимого количества символов. Тогда возникает вопрос: «Можно ли без помощи электроники, определить, извлекается ли корень n -ой степени из данного числа?». Для того чтобы ответить на данный вопрос был проведен ряд исследований [1, 2].

На основании проведенных исследований, разработана таблица 1, выявленных закономерностей при возведении четных чисел в « n » степень. Из таблицы видно, что при возведении четных чисел ряда 2, 12, 22 ... в степени 2, 6, 10 ... окончание чисел будет всегда иметь цифру 4. И, например, при возведении числа 6, 16, 26... в « n » степень - окончание числа всегда будет иметь цифру 6. Тогда как, например, возведение чисел 8, 18, 28... в 3, 7, 11 степень, будет всегда иметь окончание 2. Выявленные закономерности были сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Степени	2, 6, 10, 14, 18,...	3, 7, 11, 15, 19...	4, 8, 12, 16, 20,...	5, 9, 13, 17, 21...
Числа	Конечная цифра у извлекаемого числа			
2, 12, 22...	4	8	6	2
4, 14, 24...	6	4	6	4
6, 16, 26...	6	6	6	6
8, 18, 28...	4	2	6	8
10, 20, 30...	0	0	0	0

Таким образом, с помощью данной таблицы, мы можем определить возможность извлечения рационального числа из радикала « n » степени. Для этого можно использовать следующий алгоритм:

1. Имеется некое число под корнем степени « n ».
2. Определяем цифру «А» последнего младшего разряда подкоренного числа.
3. Используя таблицу 1, в столбцах со значениями степеней находим данную степень « n ».
4. В найденном столбце ищем цифру «А» младшего разряда подкоренного числа.
5. Если данной цифры нет, то число, извлекаемое из данного числа, будет иррациональным.
- Если данная цифра «А» есть, то делаем проверку:
6. Выбираются простые числа строки, для столбца « n -ой» степени в которых находится число «А» младшего разряда подкоренного числа.
7. Каждое из соответствующих простых чисел возводится в степень корня, и подкоренное выражение делится на это число, начиная с младшего.
8. Если подкоренное число делится на это простое число, возведенное в « n -ую» степень без остатка, то корень из числа извлекается.
9. Если делится, но с целым сомножителем, то производится проверка сомножителя по вышеизложенному алгоритму аналогичным образом.

Пример 1.1

- 1) Дано число $\sqrt[5]{1048576}$.
- 2) Степень корня – 5, окончание подкоренного числа – 6.
- 3) Используя таблицу, определяем нужный столбец. В этом случае искомым будет последний столбец, т. е. столбец с показателями степени 5, 9, 13, 17...
- 4) В найденном столбце определяем все возможные окончания. Среди них имеется окончание 6, следовательно, можно сказать, что

данное число возможно является рациональным и находится в ряду чисел 6, 16, 26, 36...

Пример 1.2

- 1) Дано число $\sqrt[12]{634534}$.
- 2) Степень корня – 12, окончание подкоренного числа – 4.
- 3) Используя таблицу, определяем нужный столбец. В этом случае искомым будет столбец с показателями степени 4, 8, 12, 16, 20...

4) В найденном столбце определяем все возможные окончания. Среди них нет окончания 4, следовательно, можно сказать, что извлеченное число определённо будет иррациональным.

Таким образом, с помощью предлагаемой, замечательной таблицы степеней четных чисел можно определять возможность извлечения корня «n» степени из какого-либо числа с большим количеством знаков.

Библиографический список

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.
2. Бронштейн, И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

УДК 511-33

Замечательная таблица степеней нечетных чисел

М.И. Стальная, С.Ю. Еремочкин, А.А. Титова

АлтГТУ им. И.И. Ползунова, Барнаул

Зачастую при решении различных задач, возникает проблема нахождения корня высокой степени из целого действительного числа [1, 2]. Данная задача может быть решена с помощью различных электронно-вычислительных устройств. Однако, в случае отсутствия вычислительных устройств, для решения вопроса о возможности извлечения корня «n» степени из данного числа без остатка можно воспользоваться таблицей.

Таблица составлена на основании проведенных исследований и выявленных закономерностей при возведении нечетных чисел в «n» степень.

Например, при возведении нечетных чисел ряда 1, 11, 21 ... в степени 2, 4, 5, 6, 7 6..... окончание возведенных чисел будет всегда иметь цифру 1. А, например, при возведении чисел 5, 15, 25... в «n» степень - окончание результирующего числа всегда будет иметь цифру 5. Тогда как при возведении чисел 9, 19, 29... в 3, 7, 11, 15 ... степень, окончание числа всегда будет иметь цифру 9, а при возведении в степень 2, 6, 10, 14... окончание результирующего числа всегда будет иметь цифру 1, и т.д.

Таблица

Степени	2, 6, 10, 14, 18, ... (2n+4)	3, 7, 11, 15, 19, ... (3n+4)	4, 8, 12, 16, 20, ... (4n+4)	5, 9, 13, 17, 21, ... (5n+4)
Числа	Конечная цифра у извлекаемого числа			
1, 11, 21, 31, 41...	1	1	1	1
3, 13, 23, 33, 43...	9	7	1	3
5, 15, 25, 35, 45...	5	5	5	5
7, 17, 27, 37, 47...	9	3	1	7
9, 19, 29, 39, 49...	1	9	1	9

Используя данную таблицу, можно определить возможность извлечения рационального числа из радикала «n» степени по следующему алгоритму:

1. Дано какие-либо число под корнем степени «n».
2. Определяется последняя цифра младшего разряда этого подкоренного числа.

3. Используя таблицу 1, в столбцах со значениями степеней находим данную степень «n».

4. В найденном столбце ищем цифру «А» младшего разряда данного подкоренного числа.

5. Если этой цифры в столбце, соответствующем «n» степени нет, то вычисленное (извлеченное из корня «n-ой» степени) число будет определено иррациональное.

Если данная цифра «А» есть, то необходимо сделать следующую проверку:

– Выбираются простые числа строки, в которых находится число «А» младшего разряда подкоренного числа.

– Каждое из соответствующих простых чисел возводится в «n» степень корня и подкоренное выражение делится на это число.

– Если подкоренное число делится на это простое число, возведенное в « n » степень без остатка, то корень из числа извлекается.

– Если подкоренное число делится, но с целым сомножителем, то производится проверка сомножителя по вышеизложенному алгоритму аналогичным образом.

К пример, дан корень $\sqrt[19]{11398895185373143}$. Изучая таблицу 1 можно увидеть, что корень из данного числа может быть извлечён, так как в столбце со степенью 19 имеется последняя цифра 3. Тогда методом подбора можно определить, что это будет число 7.

Таким образом, с помощью данной таблицы, можно определить, извлекается ли корень из заданного числа данной степени или извлеченное число будет иррациональным.

Библиографический список

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.

2. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

УДК 512.54.01

Специальные амальгамированные базисы в квазимногообразиях абелевых групп

С.А. Шахова

АлтГУ, г. Барнаул

Доминионом подгруппы H группы G в квазимногообразии групп \mathcal{M} , обозначаемым $\text{dom}_G^{\mathcal{M}}(H)$, называется множество элементов $g \in G$ таких, что для любых двух гомоморфизмов $\varphi, \psi : G \rightarrow M \in \mathcal{M}$, совпадающих на H , верно $\varphi(g) = \psi(g)$. Понятие доминиона возникло в [1], а в квазимногообразиях универсальных алгебр впервые исследовалось в [2].

Группа H из квазимногообразия \mathcal{M} называется специальным амальгамированным базисом или абсолютно замкнутой в \mathcal{M} , если

$H = \text{dom}_G^{\mathcal{M}}(H)$ для любой группы G из \mathcal{M} , содержащей H в качестве подгруппы.

Данная работа посвящена исследованию групп, абсолютно замкнутых в квазимногообразиях абелевых групп.

Обозначим \mathbf{N} – множество натуральных чисел, \mathbf{P} – множество простых чисел, Z_n – циклическая группа порядка n .

Каждому квазимногообразию \mathcal{M} абелевых групп поставим в соответствие множество $\xi(\mathcal{M}) = \{p \in \mathbf{P} \mid (\exists k \in \mathbf{N})(Z_{p^{k-1}} \in \mathcal{M} \& Z_{p^k} \notin \mathcal{M})\}$ и для $p \in \xi \mathcal{M}$ зафиксируем $k = k(p)$ из определения $\xi \mathcal{M}$.

Известно [3], что произвольная абелева группа разлагается в прямую сумму полной и редуцированной подгрупп. Обозначим через H_r редуцированную подгруппу группы H . Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть \mathcal{M} – произвольное квазимногообразие абелевых групп, $H \in \mathcal{M}$. Группа абсолютно замкнута в \mathcal{M} тогда и только тогда, когда для любого элемента g бесконечного порядка из H_r , любого $p \in \xi(\mathcal{M})$ и соответствующего ему $k = k(p)$ выполнено: $g^{p^{k-1}} \in H_r^{p^k}$, где $H_r^{p^k}$ – группа, порождённая p^k -ми степенями элементов группы H_r .

Библиографический список

1. Isbell J.R. Epimorphisms and dominions // Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965. – Springer-Verlag, New York, 1966. – P. 232–246.
2. Budkin A.I. Dominions in quasivarieties of universal algebras // Studia Logica, 78, № 1-2 (2004), 107–127.
3. Будкин А.И. Доминионы универсальных алгебр и проективные свойства // Алгебра и логика, 47, №5 (2008), 541–557.

УДК 512.57

О 2-квазитождествах в группах

М.В. Шефер

АлтГУ, г. Барнаул

Квазимногообразие групп, которое можно задать системой квазитождеств вида

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_n)(t_1(x_1, \dots, x_n) = 1 \rightarrow t_2(x_1, \dots, x_n) = 1),$$

называется полумногообразием. В [1] (см. также 2.5.1 – 2.5.6 [2]) была выявлена тесная связь между полумногообразиями и группами с одним определяющим соотношением, что позволило использовать глубокие результаты теории групп при исследовании полумногообразий. В данной работе делается следующий шаг изучения квазитожеств, а именно, исследуются 2-квазитожества, т.е. квазитожества вида

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_n)(t_1(x_1, \dots, x_n) = 1 \& t_2(x_1, \dots, x_n) = 1 \rightarrow t(x_1, \dots, x_n) = 1).$$

Далее всюду через M обозначается квазимногообразие, заданное тождествами

$$(\forall x)(x^4 = 1), (\forall x)(\forall y)([x, y]^2 = 1), (\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, y, z] = 1).$$

При написании квазитожеств кванторы всеобщности будем опускать.

Напомним, что квазитожество называется тривиальным, если оно истинно в любой группе из квазимногообразия M , либо ложно в любой неабелевой группе из M .

Теорема. Следующие 2-квазитожества

$$\Phi = ([x, y]^{m_1}[x, z]^{s_1}[y, z]^{t_1} = 1 \& [x, y]^{m_2}[x, z]^{s_2}[y, z]^{t_2} = 1 \rightarrow [x, y]^{m_3}[x, z]^{s_3}[y, z]^{t_3} = 1),$$

$$\Theta = ([x, y]^{m_1}[x, z]^{s_1}[y, z]^{t_1} = 1 \& [x, y]^{m_2}[x, z]^{s_2}[y, z]^{t_2} = 1 \rightarrow x^{k_3}y^{l_3}z^{u_3}[x, y]^{m_3}[x, z]^{s_3}[y, z]^{t_3} = 1), \text{ где } k_3 \neq 0, 0 \leq l_3, u_3 < 4,$$

$$\Sigma = ([x, y]^{m_1}[x, z]^{s_1}[y, z]^{t_1} = 1 \& x^{k_2}y^{l_2}z^{u_2}[x, y]^{m_2}[x, z]^{s_2}[y, z]^{t_2} = 1 \rightarrow [x, y]^{m_3}[x, z]^{s_3}[y, z]^{t_3} = 1), \text{ где } k_2 \neq 0, 2, 0 \leq l_2, u_2 < 4,$$

$$\Omega = ([x, y]^{m_1}[x, z]^{s_1}[y, z]^{t_1} = 1 \& x^{k_2}y^{l_2}z^{u_2}[x, y]^{m_2}[x, z]^{s_2}[y, z]^{t_2} = 1 \rightarrow x^{k_3}y^{l_3}z^{u_3}[x, y]^{m_3}[x, z]^{s_3}[y, z]^{t_3} = 1), \text{ где } k_2 \neq 0, 2, 0 \leq k_3, l_2, u_2 < 4, i = 2, 3,$$

в которых $0 \leq m_j, s_j, t_j < 2, j = 1, 2, 3$, тривиальны в M .

Библиографический список

1. Будкин А.И., Горбунов В.А. К теории квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. 14, №2 (1975), 123-142.
2. Будкин А.И. Квазимногообразия групп. – Барнаул, Изд-во Алт. ун-та, 2002.

Секция 2. ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ

УДК 519.25

Визуализация иерархических кластерных алгоритмов

В.Н. Андреева, С.В. Дронов

АлтГУ, Барнаул

Иерархией \mathcal{F} на множестве $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ называется система подмножеств $\{S : S \subset X\}$, такая что:

1. $X \in \mathcal{F}$;
2. $\{X_i\} \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, n$;
3. Если S и S' из \mathcal{F} имеют непустое пересечение, то $S' \subset S$ либо $S \subset S'$.

Из третьего свойства следует, что каждый элемент иерархии, кроме $\{X_i\}$, получается объединением каких-то других («более простых») ее элементов.

Иерархии, которые рассматриваются в работе, предполагаются порожденными некоторым алгоритмом слияния подмножеств X . Он начинается с ситуации, когда каждый элемент X образует отдельное множество. Как правило, алгоритм этот является бинарным, то есть, на каждом его шаге сливаются (объединяются) два каких-то множества, превращаясь в одно. Тем самым, на каждом шаге алгоритма число рассматриваемых подмножеств уменьшается (для бинарного алгоритма на 1).

Этот алгоритм будем далее называть агломерацией. Его действие можно себе представить следующим образом: сначала мы «различаем» каждый из элементов X . Затем «порог различимости» понемногу уменьшается. При этом некоторые, наиболее близкие друг к другу элементы, перестают различаться и сливаются в один объект. Процесс продолжается до момента, когда все элементы X сольются в один объект и полностью прекратят различаться.

Уровень иерархии \mathcal{F} – очередной этап слияния двух ее элементов в новый. Более точно: агломерация начинается с ситуации, когда каждый элемент X находится в собственном подмножестве (нулевой уровень иерархии). После совершения k -го шага агломерации мы получим набор подмножеств, образующих ее k -й уровень. Этот уровень

обязательно будет кластерным разбиением исходного множества. Таким образом, каждый уровень иерархии получает свой естественный номер. При этом, если k -й уровень обозначить через \mathcal{F}_k , то, очевидно, \mathcal{F} представляет собой объединение всех \mathcal{F}_k .

Индексация агломерации – это отображение $\mathcal{G}: \mathcal{F} \rightarrow R$ ставящее в соответствие множеству $S \in \mathcal{F}$ неотрицательное число $\mathcal{G}(S)$ таким образом, что:

- 1) $\mathcal{G}(S) = 0$ тогда и только тогда, когда S состоит из одного элемента;
- 2) $\mathcal{G}(S') \leq \mathcal{G}(S)$ для каждой пары (S, S') из \mathcal{F} такой, что $S' \subset S$

Неформально можно воспринимать значение индексации на множестве S как время, прошедшее до возникновения S с момента начала действия агломерации. Еще не более двух десятилетий назад считалось, что достаточно полагать время, затрачиваемое на каждый шаг алгоритма, равным одной и той же величине, например, единице. Получаемую таким образом индексацию назовем традиционной пошаговой. Но такая индексация не может нас устроить, поскольку ясно, что степень понижения порога различимости, приводящая к образованию нового уровня иерархии, на разных шагах может различаться очень сильно.

Ранее в работах [1–2] рассматривались некоторые способы построения индексаций, реализующие подобные идеи. Но даже самый удачный из них (см. [2, с. 261]) на наш взгляд является неестественным, поскольку при его использовании иногда алгоритм объединяет не те множества, которые интуитивно кажутся наиболее близкими.

Новый метод индексации I

Пусть \mathcal{F}_0 – нулевой уровень иерархии, то есть кластерное разбиение, в котором каждый элемент X образует собственный кластер. В работах [3–4] предложен коэффициент кластерных различий K , который оценивает степень различия двух кластерных разбиений одного и того же множества из n элементов. Он оказывается тем больше, чем меньше это разбиение похоже на \mathcal{F}_0 . Почти очевидно, что если два кластера сливаются в один, а остальные не меняются, то вновь образующийся уровень иерархии будет сильнее предыдущего отличаться от \mathcal{F}_0 с точки зрения величины этого коэффициента. Строго это обосновывается с помощью приведенной ниже теоремы 1.

Перейдем к деталям. Пусть есть кластерные разбиения одного и того же множества X , которые мы обозначим \mathcal{A} и \mathcal{B} .

Для $x \in X$ через A_x мы обозначаем тот кластер в \mathcal{A} , в который входит x , а через B_x – соответствующий кластер в \mathcal{B} . Положим

$$Q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sum_{x \in X} |A_x \Delta B_x|, \quad Q_k = Q(\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_0),$$

где $|A_x \Delta B_x|$ – число элементов симметрической разности множеств A_x и B_x .

Теорема 1. *Для произвольного k справедливо неравенство $Q_k < Q_{k+1}$, а следовательно, отображение, которое каждому из множеств \mathcal{F}_k ставит в соответствие число Q_k , является индексацией.*

Отметим, что $Q_k = n(n-1)K(\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_0)$, где K – коэффициент кластерных различий. Ясно также, что все числа Q_k являются целыми. А это значит, что такая индексация близка к традиционной пошаговой.

Новый метод индексации 2

Второй метод индексации, предлагаемый нами, похож на метод Айвазяна – Жамбю [2], но представляется более естественным.

Полагая для одноэлементных множеств S $V^*(S) = 0$, введем для множеств следующих за нулевым уровнем иерархии

$$V^*(S_1 \cup S_2) = \sum_S \|X - Z\|^2,$$

если $S = S_1 \cup S_2$, а Z – центр множества S . Индукцией по уровню индексации несложно доказывается.

Теорема 2. *$V^*(S_1 \cup S_2) > V^*(S_1) + V^*(S_2)$, то есть V^* является индексацией.*

В полном тексте работы представлены также простые формулы, позволяющие находить значения обеих предложенных индексаций. Они имеют итеративный характер.

Библиографический список

1. Жамбю М. Иерархический кластер-анализ и соответствия. – М.: Финансы и статистика, 1988.
2. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. – М.: Финансы и статистика, 1989.
3. Дронов С.В. Одна кластерная метрика и устойчивость кластерных алгоритмов // Известия АлтГУ. – 2011. – Вып. 1. – С. 32–35.

4. Dronov S.V., Dementjeva E.A. A new approach to post-hoc problem in cluster analysis // Model Assisted Statistics and Applications. – 2012. – Vol. 7, № 1. – P. 49–55.

УДК 510.223

Единственность сегмента класса \mathbf{N} , исчерпываемого всеми своими подсегментами

С.В. Дронов

АлтГУ, г. Барнаул

Работа выполнена в аксиоматике альтернативной теории множеств (AST), подробное изложение основных положений которой можно найти в [1]. В этой теории вслед за множествами, образующими нулевой уровень сложности объектов и теоретико-множественными классами (*Sd*-классы, первый уровень) следуют так называемые σ - и π -классы. Приведем два этих определения. Пусть, как обычно, через \mathbf{FN} обозначен класс всех конечных натуральных чисел. Если $X_n, n \in \mathbf{FN}$ – какая-то цепочка теоретико-множественных классов, то класс $X = \bigcup \{X_n, n \in \mathbf{FN}\}$ называют σ -классом, а $Y = \bigcap \{X_n, n \in \mathbf{FN}\}$, соответственно, π -классом. Такие классы подробно изучены в [1] и на них основаны многие фундаментальные конструкции AST.

Будем пользоваться также понятием сегмента (начального отрезка) класса натуральных чисел \mathbf{N} . Это понятие неоднократно вводилось и обсуждалось в работах автора. Известно, что если сегмент теоретико-множественно определим (*Sd*-сегмент), то он, либо совпадает со всем классом \mathbf{N} , либо является натуральным числом.

В настоящей работе делается попытка заменить класс \mathbf{FN} в определениях σ - и π -классов на некоторый более широкий сегмент C , который, таким образом, играет роль более далекого горизонта, чем ближайший, ограничиваемый в AST конечными натуральными числами. Конечно же, любой разумный горизонт не может быть четким, поэтому для всех рассматриваемых ниже сегментов C мы потребуем, чтобы они являлись последовательными, то есть

$$(\forall n \in \mathbf{N}) (n \in C) \Rightarrow (n+1 \in C).$$

Следуя [2], сегмент A класса натуральных чисел \mathbf{N} далее будем называть *C*-исчерпываемым, если найдется неубывающая последова-

тельность натуральных чисел, заданная на C и не являющаяся стабилизирующей, для которой $A = \bigcup \{n_k, k \in C\}$.

Такую последовательность $n_k, k \in C$ будем далее называть исчерпывающей для A . Ясно, что если мы разрешим исчерпывающей последовательности стабилизироваться, то к семейству C -исчерпываемых сегментов добавятся все натуральные числа. Данное же нами определение, очевидно, обеспечивает, что любой C -исчерпываемый сегмент является последовательным. Дополнительно исключим из нашего рассмотрения и случай $C = \mathbf{N}$. Тем самым, мы рассматриваем только те сегменты, которые не являются Sd -классами.

В работе доказаны следующие несложные свойства семейства исчерпываемых сегментов.

Лемма 1. Пусть A, B, C – сегменты, $C \subset B \subset A$. Если оба сегмента A, B являются C -исчерпываемыми, то $A \setminus B$ исчерпываем.

Лемма 2. Пусть A, B, C – сегменты, $C \subset B \subset A$. Если A является C -исчерпываемым, и B исчерпываемым, то сегмент B также C -исчерпываем.

Основным результатом работы является следующее утверждение, показывающее, что в определенном смысле «самоисчерпываемый» сегмент существует ровно один. Вопрос о наличии подобных сегментов и их строении возник в процессе распространения понятия σ -алгебры измеримых классов за горизонт \mathbf{FN} в [2].

Теорема. Если сегмент A исчерпывается каждым своим последовательным подсегментом, то $A = \mathbf{FN}$.

Основная идея доказательства этой теоремы состоит в обосновании того, что каждый подсегмент A в этом случае должен являться σ -сегментом, а у любого сегмента, большего \mathbf{FN} , обязательно есть подсегменты, не являющиеся таковыми. Последний факт обоснован в [3].

Библиографический список

1. Вopenка П. Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность. – Новосибирск, 2004.
2. Дронов С.В. Неполные пределы и структура семейства измеримых классов в AST // Известия АлтГУ. – 2013. – № 1/1 (77).
3. Дронов С.В., Козлов С.Д. О строении изотонного группоида на классе натуральных чисел в AST // Сиб. матем. журн. – 1994. – №35, вып. 3.

УДК 514.765

О левоинвариантных римановых метриках четырехмерных групп Ли с гармоническим тензором конциркулярной кривизны

П.Н. Клепиков, О.П. Хромова

АлтГУ, г. Барнаул

Конциркулярные преобразования (т.е. нетривиальные конформные преобразования, сохраняющие геодезические окружности) и один из их инвариантов – тензор конциркулярной кривизны были введены К. Яно в [1]. Позднее была установлена их важность в геометрии некоторых F-структур: комплексных, почти комплексных, кэлеровых, почти кэлеровых, контактных, почти контактных, а также в теории относительности.

В данной работе получена полная классификация вещественных четырехмерных алгебр Ли, группы Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой с гармоническим тензором конциркулярной кривизны. Среди полученных в результате классификации алгебр Ли выделены те метрические алгебры Ли, которые не являются конциркулярно-плоскими, т.е. имеют нетривиальный тензор конциркулярной кривизны.

Пусть (M, g) – риманово многообразие размерности n ; X, Y, Z, V – векторные поля на M . Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну ρ определим соответственно как $r(X, Y) = \text{tr}(V \rightarrow R(X, V)Y)$ и $\rho = \text{tr}(r)$. Рассмотрим тензор конциркулярной кривизны, определяемый равенством [1]

$$Z = R - \frac{\rho}{2n(n-1)} g \circ g,$$

где \circ обозначает произведение Кулкарни-Номидзу (см. [2]), или в координатах

$$Z_{hijk} = R_{hijk} - \frac{\rho}{n(n-1)} (g_{ij}g_{hk} - g_{ik}g_{hj}).$$

Дивергенцию тензора конциркулярной кривизны будем определять формулой

$$\text{div } Z_{ijk} = g^{st} Z_{ijkt;s},$$

где $Z_{ijkt;s} = \frac{\partial Z_{ijkt}}{\partial x^s} - \Gamma_{si}^l Z_{ljkt} - \Gamma_{sj}^l Z_{ilkt} - \Gamma_{sk}^l Z_{ijlt} - \Gamma_{st}^l Z_{ijkl} -$ ковариантные производные тензора Z .

Определение 1. Назовем тензор конциркулярной кривизны *гармоническим*, если $\operatorname{div} Z = 0$.

Пусть далее G – группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\{\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]\}$ – соответствующая алгебра Ли. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством скалярных произведений в \mathfrak{g} и множеством левоинвариантных римановых метрик в G (см. [2]). Будем обозначать соответствующее скалярное произведение через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и называть пару $\{\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ *метрической алгеброй Ли*.

Фиксируем базис $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ в \mathfrak{g} . Положим $[E_i, E_j] = C_{ij}^k E_k$, $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$, $\langle E_i, E_j \rangle = g_{ij}$, где C_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли, g_{ij} – метрический тензор.

Пусть $C_{ijs} = C_{ij}^k g_{ks}$, тогда символы Кристоффеля первого и второго родов вычисляются соответственно по формулам

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(C_{ijk} - C_{jki} + C_{kij}), \Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks},$$

где $\|g^{ks}\|$ есть матрица обратная к $\|g_{ks}\|$.

Из вышеприведенных формул следует, что тензоры Римана R_{ijkt} , Риччи r_{ik} , скалярная кривизна ρ , тензор конциркулярной кривизны Z_{ijkt} являются функциями структурных констант C_{ij}^k и компонент метрического тензора g_{ij} (см. [3–5]).

Определение 2. Будем называть алгебру Ли группы Ли *разложимой*, если она представима в виде прямой суммы алгебр Ли меньших размерностей.

Определение 3. Алгебра Ли \mathfrak{g} называется *унимодулярной*, если след любого внутреннего дифференцирования алгебры Ли равен нулю, т.е. $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X) \equiv 0, \forall X \in \mathfrak{g}$, где $\operatorname{ad} X(Y) = [X, Y]$, для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Придерживаясь системы обозначений работ [4, 5], сформулируем следующие результаты.

Теорема 1. Пусть G – вещественная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли \mathfrak{g} . Тогда $\operatorname{div} Z = 0$ в том и только в том случае, если алгебра Ли \mathfrak{g} и ее структурные константы содержатся в таблице 1.

Следствие 1. Среди вещественных четырехмерных унимодулярных алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны только алгебра $A_{3,9} \oplus A_1$ имеет нетривиальный тензор конциркулярной кривизны.

Теорема 2. Пусть G – вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли \mathfrak{g} . Тогда $\operatorname{div} Z = 0$ в том и только в том случае, если алгебра Ли \mathfrak{g} и ее структурные константы содержатся в таблице 2.

Следствие 2. Среди вещественных четырехмерных неунимодулярных алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны только алгебра $A_{4,6}^{\alpha,\beta}$ имеет тривиальный тензор конциркулярной кривизны.

Таблица 1

Четырехмерные унимодулярные алгебры Ли с гармоническим тензором конциркулярной кривизны

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$4A_1$	
2	$A_{3,6} \oplus A_1$	$C_{2,3}^1 = c, C_{1,3}^2 = -c$, где $c > 0$.
3	$A_{3,9} \oplus A_1$	$C_{1,2}^3 = a, C_{1,2}^4 = -am, C_{2,3}^1 = a(m^2 + 1), C_{1,3}^2 = -a(m^2 + 1)$, где $a > 0$.

Таблица 2

Четырехмерные неунимодулярные алгебры Ли с гармоническим тензором конциркулярной кривизны

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$A_2 \oplus 2A_1$	$C_{1,2}^2 = a$, где $a > 0$.
2	$2A_2$	$C_{1,2}^2 = a, C_{3,4}^3 = g$, где $a > 0, g > 0$.
3	$A_{3,3} \oplus A_1$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = a$, где $a > 0$.
4	$A_{3,7}^{\alpha} \oplus A_1, \alpha > 0$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = \alpha l, C_{2,3}^1 = -C_{1,3}^2 = l$, где $l > 0$.
5	$A_{4,5}^{1,1}$	$C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = l$, где $l > 0$.
6	$A_{4,6}^{\alpha,0}, \alpha \neq 0$	$C_{1,4}^1 = \alpha l, C_{2,4}^2 = -l, C_{3,4}^3 = l$, где $l > 0$.
7	$A_{4,6}^{\alpha,\alpha}, \alpha > 0$	$C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = \alpha l, C_{3,4}^2 = -C_{2,4}^3 = l$, где $l > 0$.
8	$A_{4,9}^1$	$C_{1,4}^1 = C_{2,3}^1 = 2a, C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = a$, где $a > 0$.
9	$A_{4,11}^{\alpha}$	$C_{1,4}^1 = 2C_{3,4}^3 = 2C_{2,4}^2 = 2a\alpha, C_{2,3}^1 = 2a \alpha , C_{3,4}^2 = -C_{2,4}^3 = a$, где $a > 0$.
10	$A_{4,12}$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = a, C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = b, C_{2,4}^1 = -C_{1,4}^2 = d$, где $a > 0, d > 0$.

Работа выполнена в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» на 2012-2016 годы (мероприятие «Конкурс грантов-2014», проект №2014.312.1.4), а также при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), Правительства РФ (госконтракт № 14.В25.31.0029), Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148).

Библиографический список

1. Yano K. Concircular geometry, I–IV // Proc. Imp. Acad. Tokyo. 1940. – V. 16.
2. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: пер. с англ.: в 2 т. – М: 1990.
3. Гладунова О.П., Славский В.В. Гармонический тензор Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Мат. труды. – 2011. – Т. 14, № 1.
4. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. – 2008. – Т. 11, № 2.
5. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. – 2009. – Т. 12, № 1.

УДК 514.75

Односторонние поверхности

С.С. Никеев, М.А. Чешкова

АлтГУ, г. Барнаул

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. К односторонним поверхностям относятся: скрещенный колпак [3, с. 304], римская поверхность [3, с. 305], поверхность Боя [3, с. 305], [4, с. 315], бутылка Клейна [3, с. 306; 4, с. 307].

В работах [4, 5] показано разрезание бутылки Клейна на два листа Мебиуса.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π -периодической вектор-функцией $\rho = \rho(v)$, которая не является 2π -периодической и 2π -антипериодической. Так как

$$\rho = \rho(v + 4\pi), \quad (1)$$

то функция

$$s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho(v + 2\pi)), \quad (2)$$

есть 2π -периодическая не равная нулю, а вектор-функция

$$l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho(v + 2\pi)) \quad (3)$$

есть 2π -антипериодическая не равная нулю.

Рассмотрим линейчатую поверхность

$$r(u, v) = s(v) + ul(v) \quad (4)$$

Если при этом кривая $s = s(v)$ не вырожденная, а вектор $l = l(v)$ не параллелен постоянному, то когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот, то прямая $L = (s(v), l(v))$ сменит направление на противоположное.

Рассмотрим вектор нормали $n = [r_u, r_v] = [s(v), l(v)]$ вдоль линии $s = s(v)$. Так как $s(v) = s(v + 2\pi)$, $l(v) = -l(v + 2\pi)$, то получим $n(v) = -n(v + 2\pi)$. Вектор $n = n(v)$ сменит направление на противоположное, когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность M есть односторонняя.

Вектор-функция $r(u, v) = s(v) + ul(v)$, определяет лист Мебиуса, для которого $s = s(v)$ – средняя линия, а $\rho = \rho(v) = r(1, v)$ – край.

Определим поверхность K уравнением

$$r(u, v) = s(v) + \sin(u)l(v) + \sin(mu)l(v + \pi) + f(v)e, \quad (5)$$

$u = 0, \dots, 2\pi, v = 0, \dots, 2\pi$ где $f = f(v)$ – антипериодическая функция, а вектор e есть постоянный.

Если m – четное число, то кривая $v = const$ есть кривая типа восьмёрки с m секциями и поверхность замкнутая. Если m – нечётное число, то кривая $v = const$ есть незамкнутая кривая, а поверхность K есть поверхность с краем.

Имеем $n(v) = [r_u, r_v] = [s(v), l(v)] + m[s(v), l(v + \pi) + f(v)e]$. Так как $s(v) = s(v + 2\pi), l(v) = -l(v + 2\pi)$, то получим $n(v) = -n(v + 2\pi)$. Вектор нормали $n = n(v)$ сменит направление на противоположное, когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность K – односторонняя.

Рассмотрим еще одну замкнутую поверхность P

$$r(u, v) = s(v) + \cos(u)l(v) + \sin(u)s(v), \quad (6)$$

$u = 0, \dots, 2\pi, v = 0, \dots, 2\pi$.

Вектор нормали вдоль кривой $r(\frac{\pi}{2}, v) = 2s(v)$ равен $n(v) = [2s'(v), l(v)]$. Он сменит направление на противоположное, когда точка кривой $r = 2s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность K также односторонняя.

Исследуем данные поверхности, когда кривая $\rho = \rho(v)$ расположена на поверхности переноса.

Рассмотрим поверхность переноса (рис. 1)

$$R(u, v) = U(u) + V(v),$$

$$U(u) = (\cos(u), \sin(u), \sin(2u)), V(v) = (\cos(v), \sin(v), 0).$$

Зададим на этой поверхности линию $u = \frac{kv}{2}$, где k – нечетное число. Тогда функция $\rho = \rho(v)$ есть 4π -периодическая функция. Имеем

$$\rho(v) = (\cos(\frac{kv}{2}) + \cos(v), \sin(\frac{kv}{2}) + \sin(v), \sin(kv)).$$

$$\text{Тогда } s(v) = (\cos(v), \sin(v), \sin(kv)), l(v) = (\cos(\frac{kv}{2}), \sin(\frac{kv}{2}), 0).$$

Построим эти поверхности.

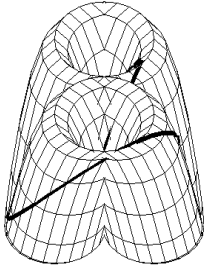


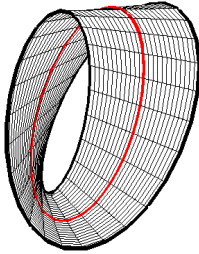
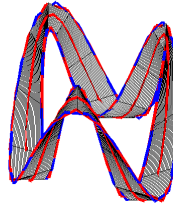
Рис. 1. Поверхность переноса и кривая на ней, $k = 1$.

Пример 1. Лист Мёбиуса при $k=1$ (рис. 2).

$$r(u, v) = (\cos(v) + u \cos(\frac{v}{2}), \sin(v) + u \sin(\frac{v}{2}), \sin(v)).$$

Лист Мёбиуса при $k=3$ (рис. 3).

$$r(u, v) = (\cos(v) + u \cos(\frac{3v}{2}), \sin(v) + u \sin(\frac{3v}{2}), \sin(3v)).$$

Рис. 2. Лист Мёбиуса, $k=1$ Рис. 3. Лист Мёбиуса, $k=3$

Пример 2. Бутылка Клейна при $k=1$, $m=2$ (рис. 4)

$$r(u, v) = (\cos(v) + \sin(u) \cos(\frac{v}{2}) - \sin(2u) \sin(\frac{v}{2}),$$

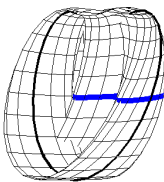
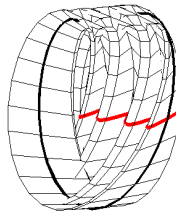
$$\sin(v) + \sin(u) \sin(\frac{v}{2}) + \sin(2u) \cos(\frac{v}{2}), \sin(v)).$$

Бутылка Клейна при $k=1$, $m=4$ (рис. 5).

$$r(u, v) = (\cos(v) + \sin(u) \cos(\frac{v}{2}) - \sin(4u) \sin(\frac{v}{2}),$$

$$\sin(v) + \sin(u) \sin(\frac{v}{2}) + \sin(4u) \cos(\frac{v}{2}), \sin(v)).$$

В разрезе получим кривую типа 8-ки с 2-мя и 4-мя секциями, соответственно в 1-м и 2-м случае.

Рис. 4. Бутылка Клейна, $m=2$ Рис. 5. Бутылка Клейна, $m=4$

Пример 3. Скрещенный колпак при $k=1$ (рис. 7).

$$r(u, v) = (\cos(v) + \cos(u) \cos(\frac{v}{2}) + \sin(u) \cos(v),$$

$$\sin(v) + \cos(u) \sin(\frac{v}{2}) + \sin(u) \sin(v), \sin(v) + \sin(u) \sin(v)).$$

Скрещенный колпак при $k=3$ (рис. 8).

$$r(u, v) = (\cos(v) + \cos(u) \cos(\frac{3v}{2}) + \sin(u) \cos(v),$$

$$\sin(v) + \cos(u) \sin(\frac{3v}{2}) + \sin(u) \sin(v), \sin(v) + \sin(u) \sin(3v)).$$

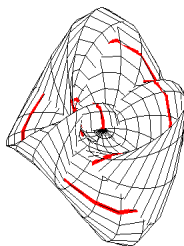
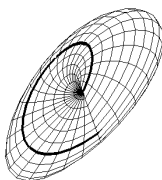


Рис. 7. Скрещенный колпак, $k=1$ Рис. 8. Скрещенный колпак, $k=3$

Библиографический список

1. Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Soc., 1:1(1900).
2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. – 2007. – Т. 71, №5.
3. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. – М., 2006.
4. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М., 1981.
5. Чешкова М.А. О бутылке Клейна // Известия Алтайского университета. – Барнаул, 2012. – №1/1.

УДК 514.765

О вычислении спектра оператора кривизны конформно плоских метрических групп Ли

Д.Н. Оскорбин
АлтГУ, г. Барнаул

Исследование римановых многообразий с конформно плоской римановой метрикой, т.е. римановых многообразий, у которых тривиален тензор Вейля, является актуальной задачей римановой геометрии (см. [1]). В данной работе исследованы спектры операторов секционной кривизны, одномерной кривизны и кривизны Риччи групп Ли с конформно плоской левоинвариантной римановой метрикой. Более точные определения данных операторов приведены в работе [2]. Используя инвариантность римановой метрики, вопрос о вычислении спектра операторов кривизны конформно плоских метрических групп Ли сводится к соответствующему вопросу в алгебрах Ли групп Ли.

Для вычисления спектра оператора кривизны использован следующий факт (см. [2]): если e_1, \dots, e_n – ортобазис, в котором диагонализуются матрицы операторов Риччи (r_{ij}) и одномерной кривизны (A_{ij}), то в базисе $e_i \wedge e_j$, при условии тривиальности тензора Вейля, диагонализуются матрица оператора кривизны, причем спектр оператора кривизны есть $\{K_{ij}\}$ ($i < j$), где $K_{ij} = K_\sigma(e_i \wedge e_j)$. В вычислениях использована формула для выражения секционной кривизны через структурные константы алгебры (см. [3]). Доказана следующая

Теорема. Спектр оператора одномерной кривизны a_i и оператора Риччи r_i на n -мерной конформно плоской метрической группе Ли может состоять не более чем из двух различных значений.

Замечание. Имеют место два случая:

Случай 1. Все главные значения оператора одномерной кривизны равны между собой: $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$. Тогда равны между собой главные значения операторов Риччи и главные значения оператора секционной кривизны. Группа Ли в этом случае является эйнштейновым многообразием (см. [1]). Примером такой группы служит группа Ли с алгеброй Ли в виде полупрямой суммы: $R^{n-1} \oplus_A R$, с некоторым гомоморфизмом $A: R \rightarrow \text{Der}(R^{n-1})$.

Случай 2. Спектр оператора одномерной кривизны состоит из двух значений. Тогда спектр оператора Риччи также состоит из двух значений. Примером такой группы служит группа Ли с алгеброй Ли в виде:

$su(2) + (R^{n-4} \oplus_A R)$, где $+$ обозначает прямую сумму алгебр Ли, \oplus – полупрямую сумму алгебр Ли, с некоторым гомоморфизмом $A: R \rightarrow Der(R^{n-4})$.

Для вычисления спектра использован пакет аналитических вычислений Maple.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148).

Библиографический список

1. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 450(2):140.
2. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – V. 21.
3. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. – М.: Мир, 1990. – Т. 1, 2.

УДК 514.116

О формулах тригонометрии Лобачевского в терминах рациональной тригонометрии

С.В. Пастухова
АлтГУ, г. Барнаул

В [1] введены такие основные определения рациональной тригонометрии, как квадрация (quadrance) и апертюра (spread) и выведены 5 законов рациональной тригонометрии: теорема Пифагора, закон апертюры, закон пересечений, тройные формулы для апертюр и квадраций.

В [2] понятия рациональной тригонометрии расширены для тригонометрии Лобачевского.

В настоящей работе с помощью законов и методов рациональной тригонометрии выведены основные законы тригонометрии Лобачевского в терминах рациональной тригонометрии.

Теорема. Обозначим через a, b – катеты, c – гипотенузу, A, B – острые углы гиперболического треугольника ABC

Углы и стороны треугольника ABC связаны следующими основными формулами (в них k – постоянная Лобачевского) (формулы I-V).

В терминах рациональной тригонометрии они будут иметь вид:

I. Аналог теоремы Пифагора

Классическая формула:

$$\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right);$$

Рациональный аналог:

$$1 - Q\left(\frac{c}{k}\right) = (1 - Q\left(\frac{a}{k}\right))(1 - Q\left(\frac{b}{k}\right));$$

II. Решения прямоугольного треугольника

Классическая формула: $\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right) = \operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right) \sin(A)$;

1)

2) $\operatorname{th}\left(\frac{a}{k}\right) = \operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right) \operatorname{tg}(A)$;

3)

4) $\operatorname{th}\left(\frac{a}{k}\right) = \operatorname{th}\left(\frac{c}{k}\right) \cos(B)$;

5)

6) $\cos(B) = \operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right) \sin(A)$;

7)

8) $\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right) = \operatorname{ctg}(A) \operatorname{ctg}(B)$;

Рациональный аналог: $Q\left(\frac{a}{k}\right) = Q\left(\frac{c}{k}\right) S(A)$;

1)

2) $\frac{Q\left(\frac{a}{k}\right)}{1 - Q\left(\frac{a}{k}\right)} = Q\left(\frac{b}{k}\right) \frac{S(A)}{C(A)}$;

3)

4) $\frac{Q\left(\frac{a}{k}\right)}{1 - Q\left(\frac{a}{k}\right)} = \frac{Q\left(\frac{c}{k}\right)}{1 - Q\left(\frac{c}{k}\right)} C(B)$;

5)

6) $C(B) = S(A) \left(1 - Q\left(\frac{b}{k}\right)\right)$;

7)

8)

III. Аналог теоремы синусов

Классическая формула:

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)}{\sin(A)} = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)}{\sin(B)} = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)}{\sin(C)};$$

Рациональный аналог:

$$\frac{Q\left(\frac{a}{k}\right)}{S(A)} = \frac{Q\left(\frac{b}{k}\right)}{S(B)} = \frac{Q\left(\frac{c}{k}\right)}{S(C)};$$

IV. Аналог теоремы косинусов

Классическая формула:

$$\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right) \cos(A);$$

Рациональный аналог:

$$Q\left(\frac{a}{k}\right) = Q\left(\frac{c}{k}\right) + Q\left(\frac{b}{k}\right) - Q\left(\frac{c}{k}\right) Q\left(\frac{b}{k}\right) (1 + C(A)) \\ + 2 \sqrt{(1 - Q\left(\frac{b}{k}\right))(1 - Q\left(\frac{c}{k}\right))} Q\left(\frac{b}{k}\right) Q\left(\frac{c}{k}\right) C(A);$$

V. Соотношение, связывающее сторону и три угла

Классическая формула:

$$\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right) = \frac{\cos(A) + \cos(B)\cos(C)}{\sin(B)\sin(C)};$$

Рациональный аналог:

$$1 - Q\left(\frac{a}{k}\right) = \frac{C(A) + C(B)C(C) + 2\sqrt{C(A)C(B)C(C)}}{S(B)S(C)}.$$

Работа выполнена в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» на 2012-2016 годы «Развитие Алтайского государственного университета в целях модернизации экономики и социальной сферы Алтайского края и регионов Сибири» (мероприятие «Конкурс грантов-2014», № 2014.312.1.4)

Библиографический список

1. Wildberger N.J. DIVINE PROPORTIONS: Rational Trigonometry to Universal Geometry. Sidney, 2005.
2. Wildberger N.J. Universal Hyperbolic Geometry I: Trigonometry [Электронный ресурс]. URL: <http://arxiv.org/pdf/0909.1377v1.pdf>.

УДК 514. 17

О линиях с фиксированным максимумом точек пересечения с гиперплоскостями

И.В. Поликанова
АлтГПА, г. Барнаул

Будем рассматривать линии в n -мерном аффинном пространстве A^n . Под линией понимаем одномерное многообразие, под дугой линии – образ числового отрезка $[a, b]$ при вложении его в линию. Условимся дугу с концами A и B обозначать AB .

Следуя Лейхтвейсу [1], выпуклую оболочку множества K будем обозначать $convK$, а множество экстремальных (называемых также крайними) точек выпуклого множества K будем обозначать $extK$. Напомним, крайние точки – это точки не являющиеся внутренними ни для какого отрезка с концами в множестве K .

Теорема. Пусть линия в A^n является гомеоморфным образом числового отрезка или окружности и не содержится ни в какой гиперплоскости. Если всякая гиперплоскость пересекает её не более чем в n точках, то линия лежит на границе своей выпуклой оболочки.

Доказательство. Пусть γ – линия в A^n , удовлетворяющая условиям леммы, и m – максимальное число точек пересечения линии с гиперплоскостями, $m \leq n$. Так как крайние точки выпуклого множества являются граничными для него ([1], замечание 4.1, стр. 31), то достаточно доказать, что все точки линии γ – крайние для её выпуклой оболочки. Допустим, что это не так: существуют точки $X \in \gamma$ и $Y, Z \in conv \gamma$ такие, что X – внутренняя точка прямолинейного отрезка $[YZ]$. Так как линия γ – компактное множество, то её выпуклая оболочка $conv \gamma$ также компактна ([1], теор. 2.6, стр. 20). По теореме Крейна-Мильмана ([1], теор. 4.2, стр. 32)

$$conv \gamma = conv(ext(conv \gamma)).$$

Поэтому найдутся симплексы S_Y и S_Z с вершинами в $ext(conv \gamma)$, содержащие точки Y и Z соответственно ([1], теор. 2.4, стр. 18). Тогда $X \in conv(S_Y \cup S_Z)$ ([1], пример 2.2, стр. 18). Пусть T – множество вершин обоих симплексов. Принимая во внимание, что симплекс является выпуклой оболочкой своих вершин, на основании следующих очевидных свойств выпуклых оболочек:

$$\begin{aligned} conv K_1 &\subset conv K_2, \text{ если } K_1 \subset K_2, \\ conv K_1 \cup conv K_2 &\subset conv(K_1 \cup K_2), \\ conv(conv K) &= conv K, \end{aligned}$$

закключаем:

$$\text{conv}(S_Y \cup S_Z) \subset \text{conv}(\text{conv } T) = \text{conv } T$$

и, следовательно, $X \in \text{conv } T$. Значит, существует симплекс S размерности $m \leq n$ с вершинами в множестве T , содержащий точку X . Учитывая, что $\text{ext}(\text{conv } \gamma) \subset \gamma$ ([1], теор. 4.1, стр. 31) и $T \subset \text{ext}(\text{conv } \gamma)$, заключаем, что $T \subset \gamma$. Так как по предположению $X \notin \text{ext}(\text{conv } \gamma)$, то $X \notin T$.

Рассмотрим случай $m \leq n - 1$. Если $m < n - 1$, то, поскольку линия не содержится ни в какой гиперплоскости, можно указать ещё $n - m - 1$ точек линии γ отличных от X и таких, что вместе с вершинами симплекса S они образуют $(n - 1)$ -мерный симплекс \tilde{S} . Тогда содержащая $(n - 1)$ -мерный симплекс (S или \tilde{S}) гиперплоскость будет иметь $n + 1$ точек пересечения с γ , именно: вершины симплекса и точку X . А это противоречит определению числа m . Следовательно $m = n$.

Пусть $S = \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\}$ – n -мерный симплекс, содержащий точку X в качестве внутренней, $A_i \in \gamma$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Для любых трёх точек линии одна из них всегда является внутренней точкой дуги с концами в двух других точках. Пусть точка X не принадлежит дуге A_1A_2 , т. е. принадлежит дуге A_2A_{n+1} . Гиперплоскость σ , проходящая через n точек A_3, \dots, A_{n+1}, X общего положения, разделяет точки A_1 и A_2 . Поэтому дуга A_1A_2 пересекает гиперплоскость σ . Точка пересечения её с γ должна совпадать с одной из точек набора A_3, \dots, A_{n+1}, X , так как иначе гиперплоскость σ пересекала бы линию γ в $n + 1$ точках, что противоречило бы определению γ . Получили, что линия γ имеет точку самопересечения, что противоречит определению линии как одномерного многообразия. Если точка X лежит на дуге A_1A_2 , то после перенумерации вершин симплекса в обратном порядке вернёмся к рассмотренной ситуации. Значит, линия γ лежит на границе своей выпуклой оболочки. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема не допускает обобщение в виде: если всякая гиперплоскость пересекает связный компакт не более чем по n связным компонентам, то он является подмножеством своей выпуклой оболочки. Например, плоская фигура, состоящая из трёх прямолинейных отрезков, имеющих общий конец и расположенных под углом 120° друг к другу, является связным компактом. Всякая прямая пересекает его или по отрезку или не более чем в двух точках. Однако он не лежит на границе своей выпуклой оболочки.

Библиографический список

1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. – М. : Наука, 1985. – 336 с.

УДК 514.765

Деформации римановых метрик и кривизна

Е.Д. Родионов, В.В. Славский

АлтГУ, г. Барнаул, ЮГУ, г. Ханты-Мансийск

В работах [1, 2, 3] исследовались конформные и одноранговые деформации римановых метрик с площадками нулевой секционной кривизны на компактных многообразиях. Примерами таких метрик служат прямые произведения римановых метрик, некоторые классы однородных римановых метрик.

В данной работе доказывается, что для достаточно широких классов деформаций таких метрик, определяемых набором скалярных функций на многообразии, площадки нулевой секционной кривизны не могут полностью исчезнуть. Это позволяет дать ответ на гипотезу Г. Хопфа о существовании римановой метрики положительной секционной кривизны на произведении компактных многообразий для деформаций данного типа.

Ранее, в работах Дж. Торпа и А.Зингера [4] исследовались 4-мерные римановы многообразия с условием (анти)коммутативности операторов Ходжа и римановой кривизны, или (анти)торповы 4-многообразия, что было обусловлено поиском новых многообразий Эйнштейна. В этой работе исследуется вопрос сохранения свойства (анти)торповости 4-многообразия при конформной деформации исходной римановой метрики. Оказывается, что данное условие равносильно разрешимости некоторого дифференциального уравнения для функции конформной деформации.

Работа выполнена при содействии Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), гранта Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), гранта Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148).

Библиографический список

1. Родионов Е.Д., Славский В.В. Конформные и одноранговые деформации римановых метрик с площадками нулевой кривизны на компактном многообразии // Геометрия и приложения : труды конференции, посвященной 70-летию В.А. Топоногова, 13–16 марта 2000 г. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2000. – С. 171–182.

2. Rodionov E.D., Slavsky V.V. Conformal deformations of the Riemannian metrics and homogeneous Riemannian spaces, Comment. Math. Univ. Carolinae. 43 (2002) 2, 271-282.

3. Балашенко В.В., Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. О деформациях тензорных полей на многообразиях // Анализ, геометрия и топология : труды всероссийской молодежной школы-семинара, Барнаул, 2–4 октября, 2013 : в 2 ч. – Барнаул : ИП Колмогоров И.А., 2013. – Ч.1. – С. 188–196.

4. Singerland I.M., Thorpe J.A. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces, in «Global Analysis», Papers in Honour of K. Kodaira, Princeton University Press, Princeton, 355-365 (1969).

УДК 513

Об оценке площади треугольника замечательных точек

А.Н. Саженов, П.Е. Сартакова

АлтГУ, г. Барнаул

В работе [1] получена формула, выражающая площадь треугольника с вершинами в центре тяжести, центре вписанной окружности и центре описанной окружности треугольника через длины сторон и радиус вписанной окружности. В настоящей работе получены оценки площади: во-первых, при фиксированной площади исходного треугольника, во-вторых, при фиксированном радиусе описанной окружности.

Библиографический список

1. Саженов А.Н. Площадь треугольника замечательных точек // Ломоносовские чтения на Алтае : сборник научных статей международной молодежной школы-семинара. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013. – Ч. III. – 416 с.

УДК 514.75

Обмотка тора и лист Мебиуса

М.А. Чешкова

АлтГУ, г. Барнаул

Впервые уравнение неориентируемой поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. В работах [3–5] строятся пересекающиеся листы Мебиуса, указано разрезание бутылки Клейна на два листа Мебиуса.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную с помощью 4π -периодической вектор-функции $\rho = \rho(v)$, которая не является 2π -периодической и 2π -антипериодической.

Так как $\rho(v) = \rho(v + 4\pi)$, то функция $s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho_1(v))$, где $\rho_1(v) = \rho(v + 2\pi)$

есть 2π -периодическая не равная нулю, а вектор-функция

$$l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho_1(v))$$

есть 2π -антипериодическая не равная нулю.

Рассмотрим линейчатую поверхность $M : r(u, v) = s(v) + ul(v)$.

Когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот, то прямая $L = (s(v), l(v))$

сменит направление на противоположное.

Рассмотрим вектор нормали $n = [s'(v), l(v)]$ вдоль линии $s = s(v)$. Если $n \neq 0$, то $n(v)$ сменит направление на противоположное, когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность M в этом случае есть односторонняя.

Линейчатая поверхность $r(u, v) = s(v) + ul(v)$ есть лист Мебиуса.

Рассмотрим тор

$$r(u, v) = ((a + b \cos(u)) \cos(v), (a + b \cos(u)) \sin(v), b \sin(u)).$$

Зададим линию

$$u = \frac{kt}{2}, v = ct, \text{ где } k - \text{ нечетное, } c - \text{ целое числа.}$$

Тогда вектор-функция

$$\rho(t) = \left((a + b \cos(\frac{kt}{2})) \cos(ct), (a + b \cos(\frac{kt}{2})) \sin(ct), b \sin(\frac{kt}{2}) \right) -$$

4π - периодическая, которая не является 2π -периодической и 2π - антипериодической (обмотка тора). Построим эти кривые и листы Мебиуса.

Пример 1. Положим $a = 2, b = 1, u = \frac{v}{2}$ и построим обмотку тора (рис. 1) и соответствующий лист Мебиуса, край и среднюю окружность (рис. 2).

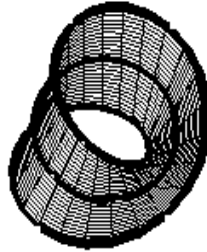
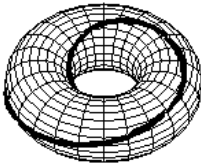


Рис. 1. Обмотка тора $a = 2, b = 1, u = \frac{v}{2}$

Рис. 2. Лист Мебиуса

$$a = 2, b = 1, u = \frac{v}{2}$$

Пример 2. Положим $a = 2, b = 1, u = \frac{t}{2}, v = 2t$ и построим обмотку тора (рис.3) и соответствующий лист Мебиуса, и край (рис.4).

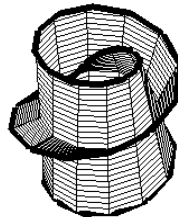
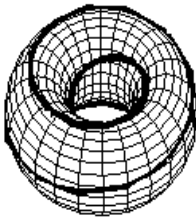


Рис. 3. Обмотка тора

$$a = 2, b = 1, u = \frac{t}{2}, v = 2t$$

Рис. 4. Лист Мебиуса

$$a = 2, b = 1, u = \frac{t}{2}, v = 2t$$

Пример 3. Положим $a = 2, b = 1, u = \frac{t}{2}, v = 3t$ и построим обмотку тора (рис. 5), и соответствующий лист Мебиуса и край (рис. 6).

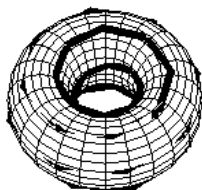


Рис. 5. Обмотка тора

$$a = 2, b = 1, u = \frac{t}{2}, v = 3t$$

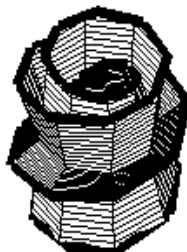


Рис. 6. Лист Мебиуса

$$a = 2, b = 1, u = \frac{t}{2}, v = 3t$$

Пример 4. Положим $a = 2, b = 1, u = \frac{3v}{2}$ и построим обмотку тора (рис. 7) и соответствующий лист Мебиуса, край и среднюю окружность (рис. 8).

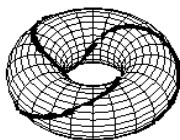


Рис. 7. Обмотка тора

$$a = 2, b = 1, u = \frac{3v}{2}$$

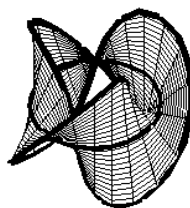


Рис. 8. Лист Мебиуса

$$a = 2, b = 1, u = \frac{3v}{2}$$

Библиографический список

1. Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos. 1:1 (1900).
2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. – 2007. – Т. 71, №5. – С. 197–224.
3. Чешкова М.А. О листе Мебиуса // Вестник Барнаульского государственного педагогического университета. – 2006. – Вып. 6. – С. 83–86.
4. Чешкова М.А. Самопересечение листа Мебиуса // Математическое образование в регионах России: труды международной научно-практической конференции. – Барнаул, 2007. – С. 50–54.
5. Чешкова М.А. О бутылке Клейна // Известия Алтайского университета. – Барнаул, 2012. №1/1. – С. 130–133.

Секция 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УДК 517.946

Стабилизация решения нестационарной неизотермической одномерной начально-краевой задачи о движении двухфазной смеси

И.Г. Ахмерова
АлтГУ, г. Барнаул

В докладе излагаются результаты о сходимости при неограниченном росте времени решения нестационарной неизотермической одномерной начально-краевой задачи о движении двухфазной смеси с постоянной вязкостью к решению стационарной. Балансовые уравнения сохранения массы, импульса и энергии имеют вид [1–4]:

$$(\rho_1^0 s_1)_t + (\rho_1^0 s_1 v_1)_x = 0, \quad (\rho_2^0 s_2)_t + (\rho_2^0 s_2 v_2)_x = 0, \quad s_1 + s_2 = 1, \quad (1)$$

$$\rho_1^0 s_1 (v_{1t} + v_1 v_{1x}) = -p_c s_{1x} + (\mu_1(s_1) v_{1x})_x + F + \rho_1^0 s_1 g, \quad (2)$$

$$0 = -s_2 p_{2x} + B(v_1 - v_2), \quad p_1 = p_2 + p_c \quad (3)$$

$$c_1 \rho_1^0 s_1 (\theta_t + v_1 \theta_x) = (\kappa(s_1) \theta_x)_x, \quad (4)$$

$$v_i|_{x=0, x=1} = 0, \quad \theta_x|_{x=0, x=1} = 0, \quad (5)$$

$$v_i|_{t=0} = v_i^o(x), \quad \theta(x, t)|_{t=0} = \theta^o(x), \quad p_2|_{t=0} = p^o(x), \quad s_1|_{t=0} = s_1^o(x).$$

Здесь v_i – скорость i -ой фазы ($i = 1, 2$); s_i – объемная концентрация связанная с приведенной плотностью ρ_i и истинной плотностью ρ_i^0 соотношением $s_i = \rho_i / \rho_i^0$ ($\rho_i^0 = \text{const}$); $\mu_i(s_1)$ – коэффициент динамической вязкости для каждой из фаз, p_i – давление соответствующей фазы ($p_c(s_1)$ – заданная функция). Обмен импульсом F имеет вид: $F = B(s_1)(v_2 - v_1) + p_2 s_{1x}$, где $B(s_1)$ – заданная функция; θ – абсолютная температура, $\kappa(s_1)$ – коэффициент теплопроводности смеси, c_i ($c_i = \text{const}$) – теплоемкость для каждой фазы.

Теорема. Обобщенное решение задачи (1)–(5) с $g = 0$, $p_c = 0$ стабилизируется к решению стационарной задачи, решением которой является набор постоянных $v_1 = 0$, $\theta = b = \text{const} > 0$, $s = c = \text{const} \in (0,1)$, то есть установлено, что

$$\int_0^1 v_1^2 dx + \int_0^1 v_{1x}^2 dx + \int_0^1 (\theta - b)^2 dx + \int_0^1 \theta_x^2 dx + \int_0^1 (s - c)^2 dx + \int_0^1 s_{1x}^2 dx \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$.

Библиографический список

1. Gard S.K., Pritchett J.W. Dynamics of gas-fluidized beds // Journal of Applied Physics. – 1975. – Vol. 46, №10.
2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред // – М.: Наука, 1987. – Ч. 1, 2.
3. Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture // Mathematical Notes. – 2010. – Vol. 87, №2. – P. 230–243.
4. Ахмерова И.Г. Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси // Журнал Сибирского Федерального университета. Математика и Физика. – 2012. – Т. 5, №1. – С. 25–35.

УДК 532.5+519.6

Численный алгоритм решения трехмерных задач конвекции на основе параллелизации в методе расщепления по физическим процессам

О.Н. Гончарова, С.И. Жилин, В.Д. Пятков
АлтГУ, г. Барнаул

Численное моделирование конвективных течений в трехмерных областях приводит к существенным вычислительным затратам, которые препятствуют повышению точности моделей и получению оперативных результатов моделирования. Одним из путей преодоления этих проблем является разработка параллельных алгоритмов и программных средств, пригодных для организации вычислений на высокопроизводительных вычислительных системах.

Для расчета конвективных движений жидкостей в трехмерных областях (параллелепипедах) разработан метод, в котором реализована

идея расщепления по физическим процессам [1]. Схема расщепления по физическим процессам является физически оправданной и обладает свойством устойчивости в линейном приближении. Расщепление на конвективный и диффузионный переносы проводится для уравнений конвекции Обербека-Буссинеска, записанных в физических переменных. На этапе диффузии осуществляется переход к переменным «ротор скорости – векторный потенциал скорости». Для его реализации разработан вариант метода прогонки с параметрами на основе конечно-разностной схемы второго порядка.

Методика проведения расщепления по физическим процессам позволяет построить новый эффективный параллельный алгоритм расчета трехмерных конвективных течений. Использование параллельного алгоритма и реализующих его программных средств позволят повысить точность численных экспериментов.

Библиографический список

1. Воеводин А.Ф., Гончарова О.Н. Метод расщепления по физическим процессам для расчета задач конвекции // Вычисл. технологии. – 2009. – Т. 14, № 1. – С. 21–33.

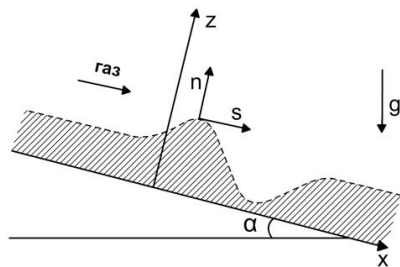
УДК 532.5+519.6

Математическое моделирование конвективных течений жидкости с учетом испарения в приближении тонкого слоя

О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова, Я.А. Тарасов

АлтГУ, г. Барнаул

Изучается течение тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости по наклонной, неравномерно нагреваемой подложке под действием со-



путствующего потока газа с учетом испарения на границе раздела (рис.). Для построения новых математических моделей в рамках длинноволнового приближения используется система уравнений Обербека-Буссинеска, а также обобщенные кинематическое, динамиче-

ские и энергетическое условия на термокапиллярной границе раздела [1].

Отметим, что большое количество работ посвящено построению математических моделей, описывающих течения вязкой жидкости в приближении тонкого слоя, исследованию устойчивости решений, а также численному исследованию (см. Пухначёв и Копбосынов, 1983; Burelbach et al., 1988; Oron et al., 1997; Kabov et al., 2001; Frank and Kabov, 2006). При этом в работах (Oron et al., 1997; Miladinova, Slavchev and Legros, 2006; Shklyaev and Fried, 2007; Kabova et. al., 2012; Гончарова, Резанова и Тарасов, 2014) представлены математические модели испаряющихся пленок. В работах [2, 3] математические модели с учетом испарения построены на основе уравнений Навье-Стокса и переноса тепла.

В данной работе представлены результаты математического моделирования конвективных течений с испарением в приближении тонкого слоя на основе уравнений конвекции Обербека-Буссинеска. В случае умеренных чисел Рейнольдса ($Re = O(1)$) представлены подробно постановки задач для главных и первых членов разложений искомых функций по степеням малого параметра ε (ε – отношение поперечного и продольного масштабов длины). Главные члены разложений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u^0 &= z^4 \left(\frac{A_x \gamma_2 \cos \alpha}{24} \right) + z^3 \left(\frac{(\Theta_0)_x \gamma_2 \cos \alpha + A_x \gamma_1 \sin \alpha}{6} \right) + \\
 &+ z^2 \left(\frac{(C_0)_x + \Theta_0 \gamma_1 \sin \alpha}{2} \right) + z C_1, \\
 w^0 &= -z^5 \left(\frac{A_{xx} \gamma_2 \cos \alpha}{120} \right) - z^4 \left(\frac{(\Theta_0)_{xx} \gamma_2 \cos \alpha + A_x \gamma_1 \sin \alpha}{24} \right) - \\
 &- z^3 \left(\frac{(C_0)_{xx} + (\Theta_0)_x \gamma_1 \sin \alpha}{6} \right) - z^2 \frac{(C_1)_x}{2}, \\
 p^0 &= \gamma_2 \cos \alpha \left(\frac{Az^2}{2} + \Theta_0 z \right) + C_0, \quad T^0 = A(x, t)z + \Theta_0(x, t),
 \end{aligned}$$

В работе представлено эволюционное уравнение для определения толщины слоя h , учитывающее эффекты гравитации, капиллярности и термокапиллярности, вязкости и испарения. Если функция h известна, то при заданных A , Θ_0 , определяющих граничный тепловой режим, вычисляются также и функции C_0 , C_1 , C_2 . Представлены результаты

безразмерного анализа и значения характерных величин и других параметров задачи для жидкостей типа этанол, FC-72, HFE-7100.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00163).

Библиографический список

1. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // Известия АлтГУ. – 2012. – №73 (1/2). – С. 12-18.
2. Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Тарасов Я.А. Моделирование термокапиллярных течений в тонком слое жидкости с учетом испарения // Известия АлтГУ. – 2014. – №81 (1/1). – С. 47–52.
3. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Математическая модель течений тонкого слоя жидкости с учетом испарения на термокапиллярной границе раздела // Известия АлтГУ. – 2014. – №81 (1/2)(сдана в печать).

УДК 532.5+519.6

Численное моделирование вихревых структур в частично открытой прямоугольной кювете в условиях постоянных касательных напряжений на свободной границе

О.Н. Гончарова, А.С. Павлов, К.М. Соркин

АлтГУ, г. Барнаул

Численно исследуется динамика жидкости, заполняющей кювету с частично открытой (свободной) границей, подверженной действию газовой среды [1-4]. Интерес к подобным задачам объясняется необходимостью изучить структуру вихревых течений в кювете и ее особенности в зависимости от размера кюветы и от размера открытой части, а также от положения свободной границы и интенсивности касательных напряжений со стороны внешней среды. Отметим, что действующие на свободной границе касательные напряжения моделируются с помощью функции $\tau(x)$ [3], равной константе в представленных исследованиях. В качестве системы уравнений для описания изотермических течений вязкой несжимаемой жидкости примем систему уравнений Навье – Стокса. Пусть на твердых, непроницаемых, неподвижных границах выполняются условия прилипания, а на свободной границе,

предполагаемой недеформируемой, – кинематическое и динамическое условия. Задача формулируется в терминах «функция тока – вихрь» [5]. Разностные условия Тома используются для задания граничных условий для вихря [5]. Численный алгоритм решения задачи основан на методе, разработанном для решения задач конвекции в областях с твердыми и свободными границами, и базируется на применении продольно-поперечной конечно-разностной схемы, известной, как метод переменных направлений [5]. Численные исследования проведены для различных значений параметра, характеризующего интенсивность дополнительных касательных напряжений. Исследовано влияние различного соотношения размеров кюветы, размера открытой части, а также ее положения относительно центра на структуру течения при различных значениях числа Рейнольдса. Построены альбомы течений. В данной работе представлены различные вихревые структуры течения (см. рис. 1) для кюветы размером «4x1», «6x1», «10x1» и открытой части границы длины «1» и «2».

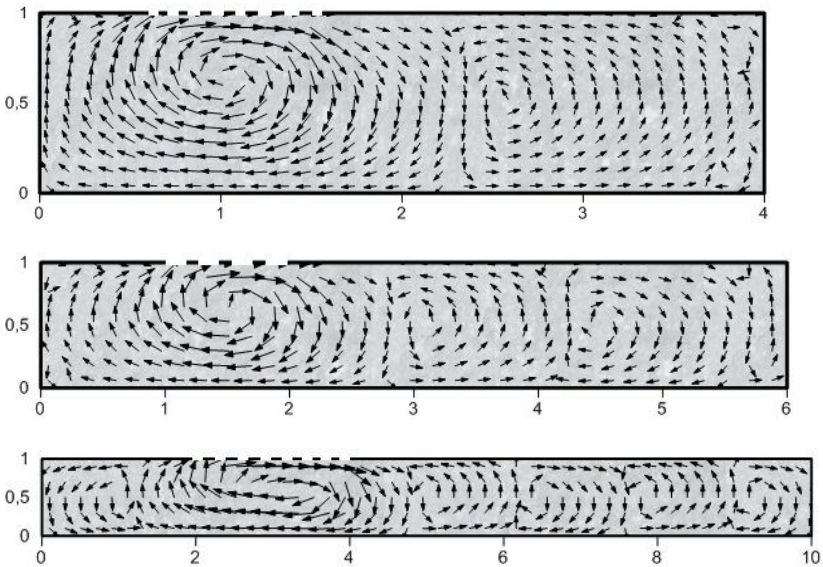


Рис. 1

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-08-000163.

Библиографический список

1. Iorio C.S., Goncharova O.N., Kabov O.A. Study of evaporative convection in an open cavity under shear stress flow // *Microgravity Sci. Technol.* – 2009. – № 21(1). – P. 313–320.
2. Iorio C.S., Goncharova O.N., Kabov O.A. Influence of boundaries on shear-driven flow of liquids in open cavities // *Microgravity Sci. Technol.* – 2011. – №23(4). – P. 373–379.
3. Goncharova O., Kabov O. Numerical modeling of the tangential stress effects on convective fluid flows in an open cavity // *Microgravity Sci. Technol.* – 2009. – № 21 (1). – P. 119–128.
4. Goncharova O.N., Kabov O.A. Numerical investigation of the tangential stress effects on a fluid flow structure in a partially open cavity // *Journal of Engineering Thermophysics.* – 2013. – № 22 (3). – P. 216–225.
5. Андреев В.К., Гапоненко Ю.В., Гончарова О.Н., Пухначёв В.В. *Современные математические модели конвекции.* – М.: Физматлит, 2008. – 368 с.
5. Пухначёв В.В. *Движение вязкой жидкости со свободными границами.* – Новосибирск: НГУ, 1989, 96 с.

УДК 532.517

Моделирование двухслойных течений жидкости и газа по наклонной подложке: построение точных решений

О.Н. Гончарова, Г.Э. Чубарова

АлтГУ, г. Барнаул

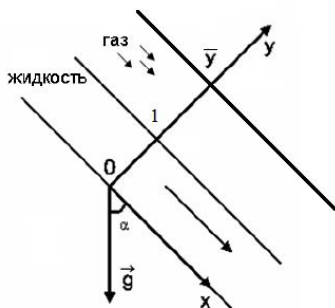


Рис. 1. Схема двухслойного течения

Изучаются конвективные процессы, протекающие в жидкости под воздействием спутного потока газа [1-4]. Проводятся новые физические эксперименты [3, 4] для изучения особенностей двухслойных конвективных течений жидкостей с термокапиллярными границами раздела. В данной работе изучаются двухслойные течения жидкости и газа в канале с твердыми непроницаемыми границами в стационарном случае (см. рис. 1). Конвективные движения жидкости в поле силы тяжести \vec{g}

описываются системой уравнений Обербека-Буссинеска [5]. Для описания изотермических движений вязкого газа примем систему уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости.

На твердых границах канала предполагаются выполненными условия прилипания. На свободной, термокапиллярной границе раздела выполняются кинематическое и динамические условия, а также условие непрерывности скорости. При этом задача решается либо в полной постановке при условии заданного расхода газа, либо в предположении о недеформируемости свободной границы. В последнем случае условие замкнутости потока в жидкости принимается в качестве дополнительного условия для замыкания постановки задачи. Целью является построение точного решения системы дифференциальных уравнений, описывающих движение жидкости и сопутствующего потока газа, выявление характерных особенностей взаимодействия различных механизмов конвекции (гравитационного и термокапиллярного) при различных значениях угла наклона подложки α , расхода газа Q . (см. также [6]). Моделируется различный тепловой режим. В случае постоянного продольного градиента температуры точное решение стационарной задачи является обобщением известного решения Бириха задачи конвекции жидкости в горизонтальном слое со свободной, недеформируемой границей [7] (см. также [8–10]).

Построены точные решения рассматриваемой задачи о двухслой-

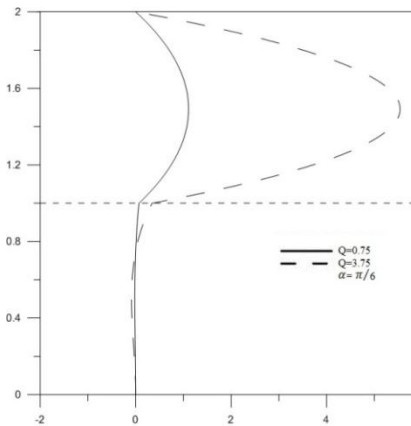


Рис. 2. Профили скорости жидкости и газа для различных значений расхода Q

ных течениях жидкости и газа по наклонной подложке. Получены аналитические выражения для скорости жидкости и газа, температуры жидкости и давления в жидкости и газе. Проведено моделирование влияния различных параметров, характеризующих свойства жидкой и газовой среды, на динамику течения и теплообмен в жидкости. Для того, чтобы модельная задача соответствовала физическому эксперименту [4], интенсивность потока газа характеризуется величиной приведенного (удельного) объемного расхода газа Q . Для системы жидкость-газ типа этанол-азот приве-

дены профили скоростей в случае различных значений расхода газа Q (рис. 2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00163).

Библиографический список

1. Гончарова О.Н. Конвективные движения жидкостей под действием сопутствующих потоков газа: математическое моделирование, численные исследования // Омский научный вестник. – 2013. – № 1(117). – С. 19–25.

2. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // Известия АлтГУ. – 2012. – №73 (1/2). – С. 12–18.

3. Iorio C.S., Goncharova O.N., Kabov O.A. Study of evaporative convection in an open cavity under shear stress flow // Microgravity Sci. Technol. – 2009. – №21(1). – P. 313–320.

4. Люлин Ю.В., Кабов О.А. Измерение массовой скорости испарения в горизонтальном слое жидкости частично открытом в движущейся газ // Письма в ЖТФ. – 2013. – Том. 39, № 7. – С. 88–94.

5. Андреев В.К., Гапоненко Ю.В., Гончарова О.Н., Пухначёв В.В. Современные математические модели конвекции. – М.: Физматлит, 2008. – 368 с.

6. Гончарова О.Н., Южкова Ю.Е. Моделирование конвективного течения в наклонном слое с движущимися границами // Известия АлтГУ. – 2010. – № 1(65). С. 22–29.

7. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. – 1966. – №3. – С. 69–72.

8. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. – М.: Физматгиз, 1959. – 700 с.

9. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1952. – 256 с.

10. Napolitano L.G. Plane Marangoni-Poiseuille flow of two immiscible fluids // Acta Astronautica. – 1980. – №2. – P. 461–478.

**Задача о распределении температуры
в глубоководном озере, окруженном горным массивом
с теплым притоком**

*Е.П. Жданов, Е.М. Жданова, И.В. Каракулова
АлтГУ, г. Барнаул, ААЭП, г. Барнаул*

Исследования распределения температурного поля в глубоководных водоемах в естественных условиях: на фоне гидродинамических процессов и наличия конвекции и теплопроводности, а также солнечной активности, образующих среду для развития экосистем, вызывают постоянно растущий научный и практический интерес. Наиболее интересным и обсуждаемым явлением при этом является образование термобара, который оказывает большое влияние на распространение примесей и биологически активных элементов. Исследованию в этой области посвящены ряд работ зарубежных исследователей, например, F.A. Forel (1880), G.K. Rogers (1966), D.F. Hibbard and J.D. Spain (1973), R.A. Molland, M. Brahe (1980), D.W. Bolgrien (1995), а также российских, например, А.И. Тихомиров (1959) исследовал возникновение термобара в Ладожском озере, Б.О. Циденев и А.В. Старченко в 2011 году использовали математическую модель для моделирования распределения температуры в озере Байкал, ряд исследователей в различные годы исследовали термобар в Телецком озере. В весенне-летний период образование и развитие термобара в глубоководном водоеме может существенно зависеть от речного притока с относительно высокой температурой, что характерно, в частности, для Телецкого озера.

При математическом моделировании исследователи, как правило, строили или одномерную вертикальную модель или двумерную продольно-вертикальную. Это объясняется значительной сложностью моделируемых процессов, относительной слабостью вычислительной техники, поскольку учет третьего измерения вносит существенные осложнения в математическую модель. Как правило, исследователи при моделировании глубоководного водоема ограничивались влиянием на гидро- и термодинамические процессы теплых поверхностных боковых притоков и стоков (при их наличии) и осредненным теплопритоком от солнца. Однако, в случае трехмерной модели встает вопрос о теплообмене с окружающей водоем горной породой, которая при больших глубинах может иметь более высокую температуру, чем вода в нижних слоях водоема, а также вопрос о теплообмене с приле-

гающем к поверхности воды слоем воздуха, особенно при наличии ветров. Особую сложность при моделировании вызывает учет теплового нагрева окружающих берегов, имеющих освещенные и затененные участки, меняющиеся при движении солнца. В целом, рассмотрение теплообмена с окружающей водоем твердой средой вызывает необходимость моделирования теплового режима в ней с учетом тепловых потоков снизу и от участков, подвергающихся диффузионному и солнечному облучению, и теплоотдачи в воздушную среду.

В данной работе была сделана попытка построения математической модели вытянутого глубоководного водоема, окруженного горами, по размерам, форме зеркала, профилю и конфигурации притока и стока напоминающего Телецкое озеро.

Математическую модель составляют уравнения Навье-Стокса, примененные к объему V в тензорном виде:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{W} dV + \oint_S [\mathbf{F} - \mathbf{G}] ds = \int_V \mathbf{H} dV,$$

и уравнение переноса энергии в интегральной форме

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho E dV + \oint_S [\rho H (\mathbf{v} - \mathbf{v}_g) + \mathbf{v}_g p] ds = \oint_S \dot{\mathbf{q}}'' ds + \oint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} ds + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V s_u dV,$$

где C – фракция вещества или плотность в однородной среде,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_g) \\ \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_g) \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I} \\ \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_g) H + p \mathbf{v}_g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{T} \mathbf{v} + \dot{\mathbf{q}}'' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} S_u \\ \mathbf{f} \\ S_u \end{bmatrix},$$

ρ , \mathbf{v} , E , p – соответственно, плотность, скорость, полная удельная энергия, давление в жидкости. \mathbf{T} – тензор напряжения вязких сил, $\dot{\mathbf{q}}''$ – поток тепла, \mathbf{v}_g – вектор сеточной скорости. Энергия определяется как $E = H - p / \rho$, а энтальпия $H = h + |\mathbf{v}|^2 / 2$ и $h = C_p T$. \mathbf{H} – вектор массовых сил. Для ламинарного течения тензор напряжения

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_l = \mu \left[\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right],$$

для турбулентного течения полный тензор напряжения $\mathbf{T} = \mathbf{T}_l + \mathbf{T}_t$, где \mathbf{T}_t – тензор Рейнольдса. В приближении Буссинеска $\mathbf{T} = \mathbf{T}_l (\mu + \mu_t) / \mu$.

В модели имеются три среды: вода, воздух и твердое тело. Для газовой и жидкой сред добавляются уравнения состояния: идеального газа и IAPWS-IF97 для воды.

Поскольку при постановке задачи не ставилась цель провести конкретный расчет определения стратификации по температуре в известном водоеме, а лишь исследовалась возможность проведения расчетов в трехмерных областях контактируемых между собой трех физических сред, то и краевые условия задавались в упрощенном виде: заданные величины потоков массы на источнике и стоке, расположенных в противоположных частях водоема при известной температуре на входе и формируемой – при выходе из водоема. В соответствии с заданным профилем дна и уровнем зеркала средняя скорость по сечению потока составила значение, близкое к 1 м/с. Так как поле скоростей в водоеме неизвестно, и только лишь должно асимптотически определяться, то скорости в начальный момент времени задавались равными нулю. Это задание приводит к колебаниям уровня воды во время "разгона" водной массы. В качестве ориентира для определения теплового режима была определена дата 1 июля 12 часов дня, а в качестве местоположения – географические координаты Телецкого озера. Этот выбор позволил конкретизировать исходное поле температуры водоема (без учета более теплых вод притока) и температуру притока по наблюдениям в р. Чулышман. Для воздушной среды в модели использовалась начальная скорость 1 м/с в продольном направлении с такими же краевыми условиями на входе. Построенная геометрия по аналогии с Телецким озером представляла собой горное окружение (рис. 1), непреодолимое для воздушных масс с боковых поверхностей и ограниченное проникаемой плоскостью сверху.

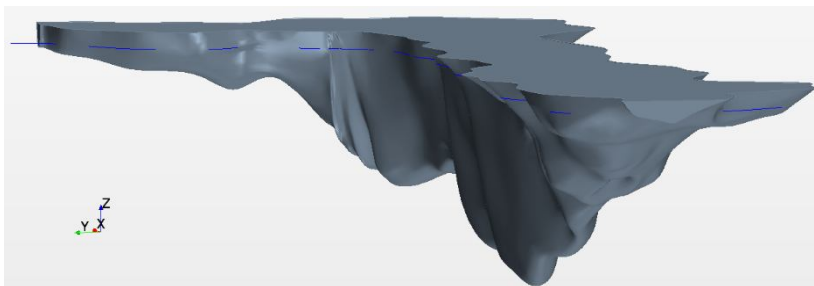


Рис. 1. Объем, занимаемый водной и воздушной средой (над пунктирной линией)

Горный массив задавался некоторой областью (рисунок 2), окружающей жидкие среды. В качестве распределения температур исполь-

зовалась линейная зависимость температуры от глубины слоя, что еще требует дополнительного исследования.



Рис. 2. Геометрия горного массива

В ходе решения задачи была построена неравномерная тетраэдральная сетка с разными характерными размерами для каждой из сред (рис. 3). На характерных границах областей сетка значительно загущалась. Вследствие большого продольного размера водоема – свыше 53 км общее число ячеек в задаче получилось равным 12,6 млн. в изотропном варианте. Число световых пятен на границах раздела прозрачных сред для расчета солнечного облучения – более 1700. При таком количестве пятен учет диффузионного излучения, а также падающего, поглощенного, прошедшего и отраженного солнечного света при условии выполнения закона излучения Кирхгофа существенно отразилось на времени расчета слоя времени.

Построение такой модели стало возможным с использованием современной программы трехмерного моделирования гидро-термодинамики, химических и электромагнитных процессов STARCCM+, хорошо зарекомендовавшей себя в многочисленных тестовых расчетах и инженерных решениях. В настоящее время эта программа стала де-факто стандартом в научном сообществе при сопоставлении получаемых результатов математического моделирования. Данная программа имеет широкие возможности настройки на исследуемые модели, позволяя экспериментировать, интегрирована как с многочисленными программами аналогичного направления, так и с такими языками программирования как FORTRAN, C, Java.

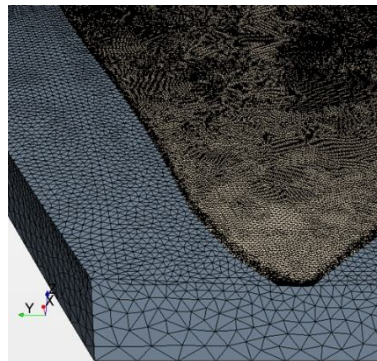


Рис. 3. Отображение сетки в твердой и жидкой средах. Глубина притока 3 м – менее 1% от толщи области почвы

В настоящее время она широко используется в многочисленных инженерных центрах, а также в зарубежных и нескольких российских ведущих университетах для преподавания на продвинутых курсах и проведения исследований.

УДК 532.5

Численное исследование влияния тепловых режимов на динамику и процессы теплопереноса в сферическом слое со свободными границами

А.В. Закурдаева, Е.В. Резанова

АлтГУ, г. Барнаул

Изучение процессов формирования сферических микробаллонов [1-4] связано с исследованием различных температурных режимов на свободных границах области. В данной работе исследуется сферический слой вязкой несжимаемой жидкости в условиях невесомости, содержащий внутри себя газовый пузырек [1-3]. Растворенный в жидкости газ представляет собой пассивную добавку. Внутри пузырька давление, плотность и абсолютную температуру можно считать функциями только времени, связанными уравнением Менделеева-Клапейрона.

Пусть область $R_1(t) < r < R_2(t)$ задает сферически симметричный слой, где $r = R_1(t)$ и $r = R_2(t)$ – его внутренняя и внешняя свободные границы. Задача сводится к определению положения свободных границ $R_1(t)$ и $R_2(t)$, скорости $v(t,r)$ и распределения температуры в жидкости $T(t,r)$. В качестве математической модели рассматриваемой задачи используется уравнение теплопереноса (1) и следствие системы уравнений Навье-Стокса (2) в области $R_1(t) < r < R_2(t)$. Уравнения записаны в безразмерном виде [2, 4]:

$$T_t + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{Pe} r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \chi(T) \frac{\partial T}{\partial r}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \frac{1}{2} V^2 (R_1^2 + R_2^2) (R_1 + R_2) R_1^{-3} R_2^{-3} + \\ & + \text{Re}^{-1} \cdot \left[P'_g - P'_{vn} - 2 \overline{Si\sigma}(T) (R_1 + R_2) R_1^{-1} R_2^{-1} \right] R_1 R_2 (R_2 - R_1)^{-1} - \\ & - 4 \text{Re}^{-1} v(T) V (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) R_1^{-2} R_2^{-2}, t > 0; V(0) = V_0, \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь введены обозначения: v – радиальная скорость жидкости, $V = r^2 v$ – скорость изменения объема оболочки, ν и σ – коэффициенты кинематической вязкости и поверхностного натяжения, χ, κ – коэффициенты температуро- и теплопроводности. Безразмерные комплексы и параметры задачи имеют следующий вид: $Pe = (v_* r_*) / \chi_*$ – число Пекле, $Re = (v_* r_*) / \nu_*$ – число Рейнольдса, $\bar{Si} = Si \cdot S$, $Si = \sigma_* / r_* P_*$, $S = P_* r_* / \rho_* v_* \nu_*$. Звездочкой обозначены характерные значения физических величин, а ρ_* – характерное значение плотности жидкости. $P'_g = P_g \cdot S$, $P'_{vn} = P_{vn} \cdot S$, где P_g и P_{vn} – давление в газе и внешнее. При этом, характерные размер, время и скорость процесса связаны между собой соотношением: $r_* = v_* t_*$.

На границах сферического слоя выполняются кинематические и динамические условия. Также на внутренней границе определены условия баланса энергии и непрерывности температуры при переходе через поверхность, а на внешней – условие теплообмена с внешней средой, которое может быть задано в виде условий первого, второго или третьего рода (см. также [5] формулировку условий на границе раздела, допускающей массоперенос).

Скорость изменения объема сферической оболочки V и свободная граница R_1 определяются в результате решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение осуществляется методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности [6]. Положение внешней границы жидкого слоя R_2 вычисляется из закона сохранения объема оболочки: $R_2^3(t) - R_1^3(t) = R_{20}^3 - R_{10}^3$.

Полученная задача для определения распределения тепла в оболочке сводится к следующей задаче на плоскости лагранжевых координат путем перехода к новой безразмерной пространственной переменной $x = (r^3 - R_1^3(t)) \cdot (R_{20}^3 - R_{10}^3)^{-1}$ ($x \in [0,1]$). Таким образом, осуществляется переход на каждом шаге по времени в фиксированную область. В новых координатах уравнение теплопереноса выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\chi}(t, x) \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad (3)$$

$$\text{где } \bar{\chi}(t, x) = \frac{9}{Pe} (R_{20}^3 - R_{10}^3)^{-2} \cdot [R_{20}^3 - R_{10}^3 + R_1^3(t)]^{4/3} \chi(T(t)).$$

Для уравнения (3) строится неявная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространственной переменной [2]:

$$\frac{T_i^{s+1} - T_i^s}{\tau} = \frac{1}{h_i} \left[\chi_{i+1} \frac{T_{i+1}^{s+1} - T_i^{s+1}}{h_{i+1}} - \chi_i \frac{T_i^{s+1} - T_{i-1}^{s+1}}{h_i} \right], \quad (4)$$

где введены обозначения

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \bar{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1}), \\ \bar{\chi}_i = 0,5 \left[\bar{\chi}(t^{s+1}, x_{i-1}) + \bar{\chi}(t^{s+1}, x_i) \right], \quad t^{s+1} = t^s + \tau.$$

Для решения схемы (4) применяется метод прогонки с параметром, в роли которого выступает неизвестное значение температуры на внутренней границе слоя. Проведено тестирование с помощью формального точного и численного решений уравнения переноса тепла (3). Тестирование численного алгоритма проводилось также на последовательности сеток.

На основе предложенного алгоритма проведены численные эксперименты по формированию стеклянной оболочки, содержащей углекислый газ. Численно исследовано влияние различных температурных режимов на динамику жидкого слоя и распределение тепла в нем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00163).

Библиографический список

1. Гончарова О.Н. Математическая модель формирования сферических оболочек в условиях кратковременной невесомости // *Динамика сплошной среды / СО АН СССР*, Институт Гидродинамики – Новосибирск, 1987. – № 8. – С. 66-79.
2. Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Диффузионное приближение в задаче формирования сферических микробаллонов в условиях кратковременной невесомости // *Моделирование в механике / СО АН СССР*, Институт Гидродинамики. – Новосибирск, 1990. – № 5. – С. 83–95.
3. Гончарова О.Н. Глобальная разрешимость задачи о формировании сферических микробаллонов // *Динамика сплошной среды / СО АН СССР*, Институт Гидродинамики. – Новосибирск, 1993. – № 106. – С. 36-48.
4. Резанова Е.В. Численное исследование динамики сферической газосодержащей оболочки // *Известия АлтГУ*. – 2013 – С. 42–47.
5. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // *Известия АлтГУ*. – 2012. – № 73 (1/2). – С. 12–18.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы // М.: Наука, 1978. – 512 с.

УДК 535.529:541.64

Математическая модель процесса формования пленок из раствора полимера

Е.Н. Калинин, Г.В. Пышиноград

АлтГПА, г. Барнаул

В современном мире полимеры занимают важное место. В медицине, сельском хозяйстве, промышленности, в повседневной жизни мы каждый день сталкиваемся с изделиями из полимерных материалов. Благодаря своим особым свойствам и высоким темпам производства, они могут заменять дорогостоящие и дефицитные материалы, обеспечивая огромную экономию. Использование прогрессивных методов изготовления полимерных изделий (литье под давлением, экструзия и др.) значительно повышается производительность труда.

В будущем появится и много новых полимерных материалов – прочных, легких, эластичных. Поэтому вопрос о проектировании, производстве и последующей утилизации изделий из полимеров особо актуален (например, как контролировать качество, сохранить и регулировать их эксплуатационные свойства, решать ряд оптимизационных задач и т.д.). Для получения ответов на подобные вопросы используют математическое моделирование. Его основой является математическая модель, которая должна быть достаточно простой и отражать все особенности исследуемого процесса, в качестве которого рассмотрим процесс получения полимерной пленки методом полива раствора полимера.

Растворная технология используется для полимеров, температура плавления которых превышает температуру их термического разложения. Данный метод заключается в последовательном выполнении трех основных стадий: приготовления формовочного раствора полимера определенной концентрации, его полива через фильеру на полированную поверхность (бесконечная лента или барабан), удаление растворителя (испарением или с использованием осадительной ванны). Для снятия внутренних напряжений, а также повышения физико-механических характеристик получаемых пленок в процессе формования применяют термическую обработку, либо одно- или двухосную ориентацию.

Каждая стадия обладает определенными особенностями, которые необходимо учитывать при построении математической модели, а

также для достижения высокого качества. В частности, процесс формования характеризуется фазовыми релаксационными переходами. При фазовом переходе в пленочной структуре происходит неравномерное изменение геометрических размеров образца, что в итоге приводит к появлению «эффекта шейки». Затвердевание обусловлено массопереносом. Увеличивается концентрация полимера, что приводит к резкому повышению вязкости полимерной системы.

Процесс изготовления полимерной пленки из раствора изначально более сложен, поскольку система является двухкомпонентной. Поэтому он представляет отдельный интерес с научных и практических точек зрения.

В работе на основе реологической модели Виноградова-Покровского построена математическая модель исследуемого процесса в одномерном приближении, что позволяет достаточно просто найти зависимости концентрации растворителя, геометрических размеров, скорости формирования и растягивающего напряжения пленки от расстояния до выхода из фильеры. Полученную модель привели к безразмерному виду, для чего были введены безразмерные критерии подобия: диффузионное число Пекле (Pe), диффузионное число Нуссельта (Nu), а также число Рейнольдса (Re) и Вайсенберга (We).

Кроме того, исследовано влияние безразмерных параметров (Pe , Nu , Re , We) на зависимости концентрации растворителя, полуширины пленки и скорости формирования от расстояния до выхода из фильеры. Проанализировав полученные результаты, выяснили, что число Вайсенберга и Рейнольдса оказывают незначительное влияние, в отличие от диффузионных параметров (Pe и Nu).

Также выяснили, как зависит остаточная концентрация растворителя в пленке от концентрации растворителя в окружающей среде. Оказывается, что для потребительских свойств лучше, если в технологическом процессе использовать окружающую среду с невысокой концентрацией.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00033).

УДК 517.95 + 532.5

Расчёт гидродинамических процессов водохранилища ГЭС

И.В. Каракулова
АлтГТУ (АГУ), г. Барнаул

Рассматривается задача расчёта динамических и температурных режимов водохранилища.

Предполагается, что жидкость в водоёме несжимаема, давление распределено по гидростатическому закону, а изменением плотности жидкости, вследствие неоднородности температур в уравнениях гидродинамики, можно пренебречь всюду, за исключением члена, учитывающего действие силы плавучести. Модель ограничивается описанием медленно изменяющихся течений, учитывая, что характерный продольный масштаб много больше вертикального $L \gg h$. Используется осреднение трёхмерных уравнений Рейнольдса по ширине русла

$$\bar{\varphi}(x, z) = \frac{1}{b} \int_{-b_1}^b \varphi(x, y, z) dy, \quad b(x, z) = b_1(x, z) + b_2(x, z).$$

Исключается давление из уравнения движения и используется гипотеза Буссинеска для представления турбулентного касательного напряжения. Уравнения неустановившегося турбулентного стратифицированного течения:

$$\frac{\partial bu}{\partial t} + \frac{\partial bu^2}{\partial x} + \frac{\partial buw}{\partial z} = -qb \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^{z_s} \frac{\rho}{\rho_0} dz \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(BK \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial bu}{\partial x} + \frac{\partial bw}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial bT}{\partial t} + \frac{\partial buT}{\partial x} + \frac{\partial bwT}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(BK_T \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (3)$$

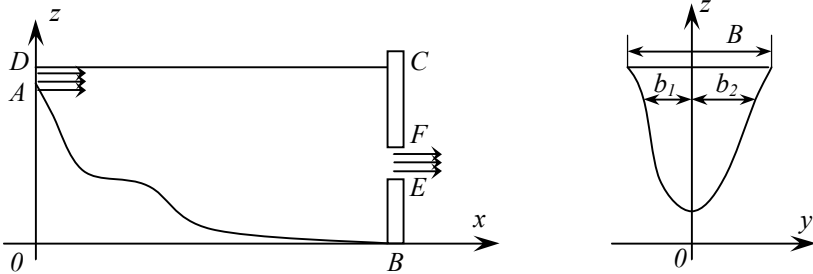
$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - 4)^2). \quad (4)$$

$$K = \left[\frac{\chi(z-z_b)(z_s-z)}{h^2} \right]^2 \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \sqrt{1-\sigma R},$$

$$R = 2\alpha g(T-4) \frac{\frac{\partial T}{\partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2}, \quad (z_b < z < z_s) \quad (5)$$

$$K_T = K(1+R), \quad (6)$$

здесь $\alpha = 6,8 \cdot 10^{-6}$, $\chi = 0,42$, $\sigma = 0,1$.



Формулы (5), (6) справедливы при $0 < R < R_c = \sigma^{-1}$, при $R \geq R_c$ K и K_T соответственно полагаются равными ν и λ (коэффициентам кинематической вязкости и теплопроводности).

Начальные условия при $t=0$:

$$z_s(0, x) = z^0(x), \quad u(0, x, z) = u_0(x, z), \quad w(0, x, z) = w_0(x, z),$$

$$T(0, x, z) = T^0(x, z). \quad (7)$$

Граничные условия:

$$u(t, 0, z)|_{AD} = u_1(t, z), \quad T(t, 0, z)|_{AD} = T_1(t, z), \quad (8)$$

$$u|_{AB} = w|_{AB} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z}|_{AB} = 0, \quad (9)$$

$$u|_{BC} = u_2(t, z), \quad (10)$$

$$K \frac{\partial u}{\partial z}|_{CD} = \tau_w, \quad K_T \frac{\partial T}{\partial z}|_{CD} = q_s. \quad (11)$$

Кинематическое условие на свободной границе

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} + u \frac{\partial z_s}{\partial x} - W = 0, \quad (12)$$

где $z_s = z_s(t, x)$ – уравнение поверхности CD.

Обозначения:

$b(x, z)$ – ширина водохранилища;

$B(x)$ – ширина по свободной поверхности;

L – длина водохранилища;

$h(x)$ – глубина водохранилища;

q_s – тепловой поток через границу вода воздух;

τ_w – ветровое касательное напряжение.

Исходные данные: $L=70000$ м, $h_{max}=150$ м, $T_0=10^\circ\text{C}$, внешняя температура $T_{вн}=15^\circ\text{C}$. Период 2,5 месяца. $u_0=w_0=0$. Режим расходов на входе 0,01 ед. на выходе 0,0216 ед. На входе задавался линейный профиль сходимости на выходе параболический.

Красная задача (1)–(3), (7)–(12) решается численно с использованием среды CD-Adapco Star CCM+ 9.02.007.

Библиографический список

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов / 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.

2. Неверов А.С., Саженков А.Н., Кузиков С.С., Папин А.А. Расчёт гидродинамических процессов водохранилища ГЭС. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 1986. – 80 с.

УДК 551.345 + 539.3

Численное моделирование процесса суффозионного выноса грунта

С.С. Кузиков, А.А. Папин, А.Н. Сибин

АлтГУ, г. Барнаул

В работе рассматривается численное решение профильной задачи суффозионного выноса грунта. При достижении скоростью фильтрации определенной величины происходит вынос частиц грунта из области течения. В качестве математической модели используются уравнения сохранения массы для воды, подвижных твердых частиц и неподвижного пористого скелета, а также закон Дарси для воды и подвижных твердых частиц и соотношение для интенсивности суффозионного потока. Описан алгоритм численного решения

профильной задачи движения воды и твердых частиц без учета деформации пористой среды. При заданной концентрации подвижных твердых частиц проведены расчеты тестовой задачи, определены давление и скорость водной фазы. Сравнение найденной скорости с критической позволяет найти область суффозионного выноса.

Следуя [1, 2] рассмотрим движение воды и подвижных твердых частиц в пористой среде. Пусть φ – пористость, c – концентрация твердых подвижных частиц, ρ_s и ρ_f – истинные плотности жидкой и твердой фаз соответственно. Для скорости движения воды в пористой среде справедлив закон Дарси

$$\vec{v}_2 = -k_f(\nabla p + \rho_f \vec{g}),$$

где k_f – коэффициент фильтрации, p – давление, \vec{g} – ускорение силы тяжести, ∇ – оператор градиента. Для скорости подвижных твердых частиц как правило используется зависимость $\vec{v}_3 = \lambda \vec{v}_2$, $\lambda \in (0,1)$, а скорость грунта $\vec{v}_1 = 0$. Тогда законы сохранения массы имеют следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \varphi)\rho_s) = -\dot{m}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - c)\varphi\rho_f) - \text{div}((1 - c)\varphi\rho_f k_f(\nabla p + \rho_f \vec{g})) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (c\varphi\rho_s) - \text{div}(c\varphi\rho_s \lambda k_f(\nabla p + \rho_f \vec{g})) = \dot{m}. \quad (3)$$

Постулируется, что суффозионный поток \dot{m} определяется соотношением

$$\dot{m} = \alpha \rho_s (1 - \varphi) c \varphi |\vec{v}_3 - \vec{v}_1 - \vec{v}_k|,$$

при $|\vec{v}_3 - \vec{v}_1| \geq |\vec{v}_k|$ и $\dot{m} = 0$ при $|\vec{v}_3 - \vec{v}_1| < |\vec{v}_k|$. Здесь α – положительная постоянная, \vec{v}_k – заданный вектор критической скорости.

Граничные условия определяются свойствами среды, с которой контактируют грунтовые воды. Условия на границе с неподвижным мерзлым грунтом описаны в [3].

При заданной концентрации подвижных частиц грунта система (1)–(3) примет вид

$$\text{div}(a(c, \varphi)(\nabla p + \rho_f \vec{g})) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -(1 - \varphi) c \varphi |k_f(\nabla p + \rho_f \vec{g})|, \quad (5)$$

где $a(c, \varphi) = (c\lambda + 1 - c)\varphi k_f$.

Следует отметить следующее обстоятельство: если концентрация подвижных частиц грунта есть заданная функция $c > 0$ и известны v_k и v_2 , то из уравнения(5) получим представление для пористости

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\varphi_0 + (1 - \varphi_0)e^{-\int_0^t c|\bar{v}_2 - \bar{v}_k| d\tau}}. \quad (6)$$

Модуль критической скорости может быть рассчитан по формуле[4]

$$v_k = 4.2\varphi \sqrt[9]{gv^7} \frac{1}{\sqrt[3]{37.21 \frac{vk_f}{\varphi g}}}, \quad (7)$$

где v – кинематический коэффициент вязкости воды. Кроме того из (6) следует $\varphi_0 \leq \varphi \leq 1$, здесь φ_0 – это начальное значение пористости.

В случае $a = const$ уравнение (4) принимает вид

$$\Delta p = 0, \quad (8)$$

Решение уравнения (8) ищется в области $\Omega = \{0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq d\}$ при следующих граничных условиях см. рисунок 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\Gamma_1} &= -g\rho_f; & \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\Gamma_2} &= 0; & \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\Gamma_3} &= -g\rho_f; \\ p \Big|_{\Gamma_4} &= -g\rho_f y + p_0; & p \Big|_{\Gamma_5} &= -g\rho_f y; \end{aligned}$$

здесь p_0 – давление водонасыщенного грунта.

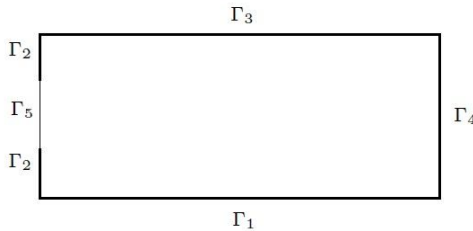


Рис. 1. Расчетная область

Уравнение для p решаем методом переменных направлений. Разностная схема запишется следующим образом [5]

$$\begin{aligned} \omega_1 p_{k+1/2} - \Lambda_1 p_{k+1/2} &= \omega_1 p_k + \Lambda_2 p_k, \\ \omega_2 p_{k+1} - \Lambda_2 p_{k+1} &= \omega_2 p_{k+1/2} + \Lambda_1 p_{k+1/2}, \\ \Lambda_1 p &= \frac{p(i+1,j) - 2p(i,j) + p(i-1,j)}{h_1^2}, \\ i &= 1, \dots, N_1 - 1; \\ \Lambda_2 p &= \frac{p(i,j+1) - 2p(i,j) + p(i,j-1)}{h_2^2}, \\ j &= 1, \dots, N_2 - 1; \end{aligned}$$

где итерационный параметр $\omega_\alpha = \sqrt{\delta_\alpha \Delta_\alpha}$, $\delta_\alpha = (4/h_\alpha^2) \sin^2(\pi h_\alpha / 2l_\alpha)$, $\Delta_\alpha = (4/h_\alpha^2) \cos^2(\pi h_\alpha / 2l_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$; N_1, N_2 – число разбиений l_1 и l_2 ; l_1 и l_2 – длина и ширина области соответственно; $h_1 = l_1/N_1$ и $h_2 = l_2/N_2$ – шаги разбиения l_1 и l_2 .

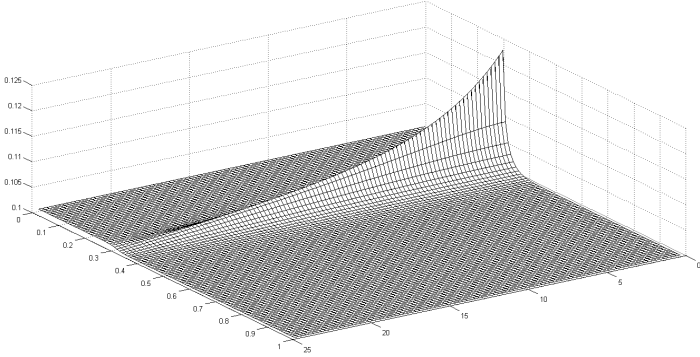


Рис. 2. График изменения модуля скорости

Численный расчет проводился при $\varphi = 0.25$, $g = 9.8 \text{ м/с}^2$, $\nu = 1307 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $k = 10^{-2} \text{ м/с}$, $b = 2500 \text{ м}$, $d = 100 \text{ м}$ для этих значений постоянных из (7) найдем критическую скорость $v_k = 0.11 \text{ м/с}$.

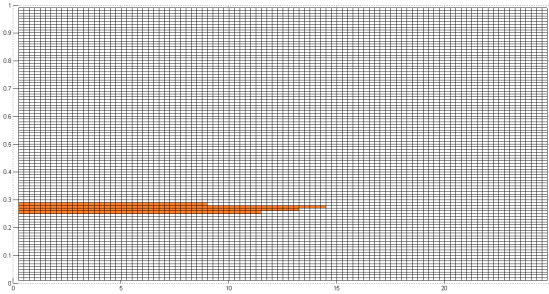


Рис. 3. Область эрозии

Модуль скорости изображен на рисунке 2. Находя пересечение поверхностей описывающих модули скорости фильтрации и критической скорости, после достижения которой начинается суффозионный процесс определяем область внутренней эрозии см. рисунок 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №2014/2, грантов РФФИ №13-08-01097 и 13-01-98016.

Библиографический список

1. Vardoulakis Sand-production and sand internal erosion: Continuum modeling // Alert School: Geomechanical and Structural Issues in Energy Production – 2006.

2. Папин А.А., Гагарин Л.А., Шепелев В.В., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2013. Вып. 1/2 (77).

3. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Ципкин Г.Г. Тепло-массоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. – М. : Наука, 1996.

4. Рекомендации по методике лабораторных испытаний грунтов на водопроницаемость и суффозионную устойчивость. – Ленинград, 1983.

5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М. : Наука, 1978.

УДК 539.3

Численное решение задачи о напряженном состоянии вблизи трещины отрыва

С.С. Мадерн, А.В. Устюжанова
АлтГУ, Барнаул

При наличии трещины в упругом материале возникает необходимость анализа напряженного состояния вблизи вершины трещины с целью определения признаков возможного распространения трещины и последующего разрушения материала. Задачам исследования напряженного состояния в окрестности трещин посвящены ряд работ [1–3].

Рассматривается плоская задача о напряженном состоянии материала в окрестности трещины. Исследуемая область имеет вид прямоугольника, стороны которого расположены вдоль осей координат x , y . Трещина расположена в центре прямоугольника и представляет собой прямолинейный горизонтальный разрез. Берега разреза являются частью общей границы области.

Ставится задача определения в исследуемой области перемещений u , v и напряжений σ_x , σ_y , σ_{xy} , которые должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Вне трещины поведение материала является упругим

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y \right), \quad \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y \right),$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy},$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

Компоненты деформаций и перемещений связаны соотношениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Все величины в задаче являются безразмерными. В качестве характерного линейного размера выбирается горизонтальный размер прямоугольника. Вертикальный размер, отнесенный к горизонтальному, равен H . Разрез длиной $2l$ расположен на линии $y = \frac{H}{2}$.

Исследуемая область подвергается растяжению вдоль оси y . Граничные условия на внешних сторонах прямоугольника задаются для перемещений

$$v = -v_0 \text{ при } y = 0; \quad v = v_0 \text{ при } y = H.$$

Берега разреза являются свободными от напряжений. При $y = \frac{H}{2}$ до линии разреза и после нее вертикальное перемещение $v = 0$.

Алгоритм численного решения поставленной задачи строится на основе метода конечных элементов [4]. Исследуемая область разбивается на конечные треугольные элементы. Сетка строится так, чтобы одна из ее линий совпадала с разрезом. При этом узлы, находящиеся на разрезе, нумеруются дважды, соответственно двум его берегам.

В ходе реализации алгоритма численного решения определяются поля напряжений и перемещений. В процессе деформирования разрез переходит в отверстие эллиптической формы, то есть раскрытие трещины происходит по типу трещины отрыва. Результаты численного решения дают возможность делать анализ напряженного состояния упругой области при наличии трещины.

Библиографический список

1. Нотт Дж. Ф. Основы механики разрушения. – М.: Металлургия, 1978.
2. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985.
3. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979.

УДК 536.25

Математическое моделирование двухслойных течений с испарением на основе точных решений

Е.В. Резанова

Одним из важных аспектов в изучении конвективных течений жидкостей является исследование влияния эффектов испарения на характер течений [1–3]. В данной работе рассматриваются стационарные течения в системе «жидкость – газ», находящиеся под действием продольных градиентов температуры. Двухслойные течения жидкости и газа в горизонтальном канале с непроницаемыми стенками сопровождаются испарением жидкости с термокапиллярной границы раздела. При моделировании процессов переноса в верхнем слое, состоящем из смеси газа и паров жидкости, учитываются эффекты Соре (термодиффузии) и Дюфура [4].

В качестве математической модели для определения скорости, распределения температуры и давления в нижнем слое системы используются уравнения Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска. Для моделирования течения в газо-паровом слое эту систему необходимо дополнить уравнением диффузии. Функции скорости, распределения температуры, давления, а также концентрации пара выстраиваются с помощью точных решений типа Бириха [5], вертикальная составляющая скорости полагается равной нулю, а температура и концентрация линейно зависят от продольной координаты (при этом, продольный градиент температуры и концентрации линейно зависит от поперечной координаты).

На свободной границе раздела выполнены кинематическое и динамические условия, температура удовлетворяет условию теплопереноса через границу раздела с учетом эффекта Дюфура [6–8], а концентрация

– условию баланса масс с учетом эффекта Соре [4]. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса в линеаризованной форме определяет концентрацию насыщенного пара [7, 8]. На твердых непроницаемых границах заданы условия прилипания, температура распределена линейно относительно продольной координаты. На верхней границе поток пара полагается равным нулю.

Построены точные решения задачи тепло-массопереноса с учетом испарения. Представлены профили скоростей и температуры для систем жидкость – газ типа «этанол – азот», «НFE-7100 – азот» в условиях гравитации и микрогравитации. Исследовано влияние эффектов термодиффузии и Дюфура на интенсивность испарения жидкости и распределение температуры. Учет влияния потока газа и продольных градиентов температуры на структуру течения также является немаловажным фактором.

На рисунках 1 и 2 представлены профили скорости в системе «НFE-7100 – азот» в случаях нормальной (981 см/сек^2) и слабой ($9,81 \text{ см/сек}^2$) гравитации при различных значениях расхода газа в верхнем слое. Учет эффектов Соре и Дюфура существенно влияет на испарение жидкости с границы раздела сред. Так, при значении расхода газа $Q = 9 \cdot 10^{-4} \text{ г/(см} \cdot \text{сек)}$ в условиях нормальной гравитации с учетом данных эффектов масса испаряющейся жидкости $M = 1,17 \cdot 10^{-6} \text{ г/(см}^2 \cdot \text{сек)}$, а без учета $M = 1,11 \cdot 10^{-5} \text{ г/(см}^2 \cdot \text{сек)}$; при $Q = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ г/(см} \cdot \text{сек)}$ с учетом эффектов $M = 3,74 \cdot 10^{-5} \text{ г/(см}^2 \cdot \text{сек)}$, без учета $M = 5,73 \cdot 10^{-5} \text{ г/(см}^2 \cdot \text{сек)}$; при $Q = 9 \cdot 10^{-3} \text{ г/(см} \cdot \text{сек)}$ с учетом эффектов $M = 8,27 \cdot 10^{-5} \text{ г/(см}^2 \cdot \text{сек)}$, без учета $M = 1,15 \cdot 10^{-4} \text{ г/(см}^2 \cdot \text{сек)}$.

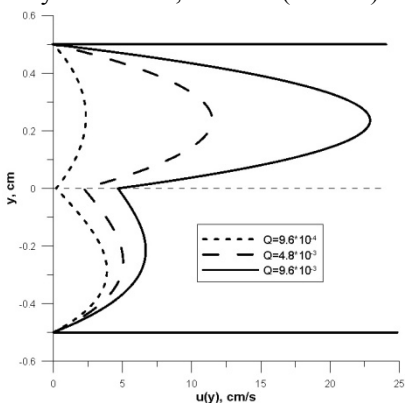


Рисунок 1. Профили скорости в системе «НFE-7100 – азот» в случае нормальной гравитации

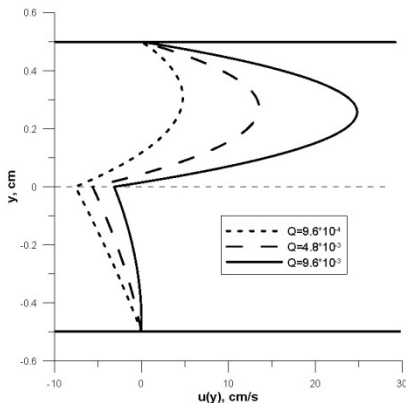


Рисунок 2. Профили скорости в системе «НFE-7100 – азот» в случае слабой гравитации

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00163).

Библиографический список

1. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // Известия АлтГУ. – 2012. – № 73 (1/2). – С. 12–18.
2. Гончарова О.Н. Конвективные движения жидкостей под действием сопутствующих потоков газа: математическое моделирование, численные исследования // Омский научный вестник. – 2013. № 1(117). – С. 19–25.
3. Гроот С.Р. Термодинамика необратимых процессов. – М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956. – 281 с.
4. Резанова Е.В. Математическое моделирование двухслойных течений с учетом эффектов Соре и Дюфура // Известия АлтГУ. – 2014 – №81 (1/2) (в печати).
5. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 1966. – № 3. – С. 69–72.
6. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Моделирование двухслойных течений с учетом испарения на границе раздела на основе точных решений // Известия АлтГУ. – 2013. – № 1/2 (77). – С. 22–27.
7. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях при наличии испарения на границе раздела // ПМТФ. – 2014. – № 2. – С. 68–79.
8. Goncharova O.N, Hennenberg M., Rezanova E.V., Kabov O.A. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer systems // Interfacial Phenomena and Heat Transfer – 2013. – Vol. 1. – P. 317–338.

УДК 517.9 + 51-76

Метод Аллера–Бриана для описания воздушных потоков у поверхности листа растения с учетом влияния опущения

С.А. Саженков

*ИГиЛ СО РАН, НГУ, Новосибирск
КРИ Хэйлуцзянского университета, Харбин*

1. Предисловие. Работа посвящена построению новой математической модели аэродинамики воздушных потоков у поверхности листа

растения с учетом влияния опушения. Естественным образом, решение этой задачи лежит в области механики сплошных сред, то есть, лист моделируется как упругое или абсолютно твердое тело, обтекаемое воздухом (сжимаемым газом).

2. История вопроса. Очень простой и вместе с этим весьма востребованной является модель, предложенная в двухтомнике Гольдштейна [1]. В этой модели рассматривается процесс обтекания воздухом тонкой пластины с одним штырем, перпендикулярно приваренным к пластине. Считается, что воздух набегает на пластину параллельно ей. Дается ответ на вопрос, при каких условиях поток воздуха остается ламинарным после прохождения около штыря. Истоки этой модели лежат в области аэронавтики, более точно, в теории крыла летательного аппарата, что напрямую не имеет отношения к моделированию биологических процессов.

Тем не менее, в ряде работ, например, в работе Шройдера и соавторов [2], авторам удалось приспособить модель из монографии Гольдштейна к изучению течения воздуха в окрестности листа с трихомами одинаковой высоты.

Трихомами называются волоски (ворсинки) на поверхности листа. Основные функции трихом – защитные: длинные более редкие трихомы защищают лист от агрессии насекомых, короткие более частые трихомы создают микроклимат в непосредственной близости поверхности листа, в частности, защищают от высыхания под палящим солнцем или, в противоположном случае, от переохлаждения при заморозке.

Шройдером и соавторами проведены численные расчеты для некоторых растений, которые в рамках модели позволяют определить, при каких силе ветра и высоте трихом течение воздуха около листа остается ламинарным. Эти расчеты проведены посредством конечных явных алгебраических формул, поэтому применение даже простейших численных методов не потребовалось. Стоит отметить, что турбулентные режимы в рамках этой модели изучать невозможно.

3. О современных подходах. Более современной и гораздо более перспективной, чем в монографии Гольдштейна, является работа Хоффмана и соавторов [3]. В этой работе рассматривается механическая система, описывающая взаимодействие упругой пластины с достаточно часто расположенными на ней упругими цилиндрами малого диаметра и одинаковой фиксированной высоты. Проведена гомогенизация этой системы, то есть получена модель, в рамках которой отдельные цилиндры не различаются, а описывается эффективное течение воздуха в окрестности пластины. Гомогенизация проведена и ма-

тематически строго обоснована с помощью метода двухмасштабной сходимости Аллера–Нгуетсенга, который является достаточно глубоким методом функционального анализа. Хоффманом и соавторами проведены численные эксперименты с помощью вычислительных пакетов, разработанных в CAESAR (Center of Advanced European Studies and Research, Bonn, Germany). Найдены величины эффективных коэффициентов модели. Вообще, эта модель была выведена исходя из достаточно общих положений, и поэтому может быть применена для описания как ламинарных, так и турбулентных процессов.

4. Построение новой модели методом Аллера–Бриана. В настоящей работе построена новая математическая модель аэродинамики вблизи поверхности листа для случая трихом различной высоты. Построение этой модели основано на идеях из статьи [3] и на систематическом применении метода Аллера–Бриана многомасштабной сходимости [4]. Модель Хоффмана и соавторов допускает естественное обобщение на случай, когда количество высоких и низких трихом имеет одинаковый порядок. Скажем, например, на одной единице площади расположена одна высокая и три низких трихомы.

В сказанном выше мы предположили, что все множество трихом имеет всего два размера по высоте. Такое ограничение несущественно: в рамках модели Хоффмана и соавторов можно рассмотреть любое конечное множество высот трихом. Вместе с этим, в ряде работ, посвященных описанию строения листа растения, например, в статье Генаева и соавторов [5], замечено, что количество трихом разной высоты имеет разные порядки, то есть на одну высокую трихому на единицу площади листа приходится много низких трихом. Поэтому в настоящей работе построено естественное обобщение модели Хоффмана и соавторов. Искомая модель сконструирована методом гомогенизации Аллера–Бриана, позволяющим учитывать сложную иерархическую структуру трихом.

Построенная модель является неклассической системой интегродифференциальных уравнений. Она состоит из уравнений на макро-скопическом уровне, то есть на уровне, на котором характерным размером является размер листа растения, и из уравнений на мезо- и микроскопическом уровнях. На мезо- и микроскопическом уровнях характерными размерами являются расстояния между высокими и низкими трихомами, соответственно.

Работа поддержана грантом РНФ 14-14-00734 «Изучение молекулярных механизмов развития органов растений методами системной биологии».

Библиографический список

1. S. Goldstein. Modern Developments in Fluid Dynamics. New York, Dover Publication, 1938, переиздание: 1965.
2. M.D.J. Schreuder, C.A. Brewer, and C. Heine. Modelled Influences of Non-exchanging Trichomes on Leaf Boundary Layers and Gas Exchange // J. Theor. Biol., 2001, volume 210, pp. 23-32.
3. К.-Н. Hoffmann, N.D. Botkin, and V.N. Starovoitov. Homogenization of interfaces between rapidly oscillating fine elastic structures and fluids // SIAM J. Appl. Math., 2005, volume 65, no. 3, pp. 983-1005.
4. G. Allaire and M. Briane. Multiscale convergence and reiterated homogenization // Proc. R. Soc. Edinb., 1996, issue 126A, pp. 297-342.
5. М.А. Genaev, А.В. Doroshkov, Т.А. Pshenichnikova, N.I. Kolchanov, D.A. Afonnikov. Extraction of quantitative characteristics describing wheat leaf pubescence with a novel image-processing technique // Planta, 2012, volume 236, pp. 1943-1954.

УДК 517.958

Просачивание двухфазной жидкости через пористый грунт: вывод нелокальной модели Био методом двухмасштабной сходимости

С.А. Саженков¹, Е.В. Саженкова²

¹ИГиЛ СО РАН, НГУ, Новосибирск

КРИ Хэйлунцзянского университета, Харбин;

²НГУЭУ (НИИХ), Новосибирск

1. Постановка задачи. Рассматривается модельная линейная задача описания малых возмущений двухфазной вязкой сжимаемой жидкости в упругом пористом грунте. Движение жидких компонент описывается нестационарными уравнениями Стокса, движение упругого грунта – уравнениями Ламэ линейной теории упругости. На границе между жидкой и упругой фазами выполняется условие непрерывности перемещений и условие Рэнкина–Гюгонио. Эта система уравнений дополняется начальными условиями для перемещений и скоростей и условиями неподвижности на внешней границе.

Считается, что жидкость полностью заполняет поры и что размер пор очень мал по отношению к размеру всего пористого тела. В связи с

этим естественным образом в постановке задачи возникает малый параметр $\varepsilon > 0$ – отношение характерных размеров пор и всего пористого тела. Также считается, что обе компоненты двухфазной жидкости являются слабовязкими. Более точно, коэффициенты вязкости пропорциональны квадрату малого параметра, $\mu_1, \mu_2 = O(\varepsilon^2)$, а коэффициент межфазного трения связан с малым параметром линейным соотношением, $K_F = \varepsilon K_F^0$, $K_F^0 = const$.

2. Процедура гомогенизации. Структура пористого тела снабжается периодической геометрией с периодом ε и проводится усреднение (гомогенизация) исходной системы, то есть предельный переход в уравнениях и краевых условиях при $\varepsilon \rightarrow 0$. Процедура усреднения (гомогенизации) основана на систематическом применении метода двухмасштабной сходимости Аллера–Нгуетсенга [1, 2] и математически строго обоснована.

Определённая сложность при предельном переходе возникает в связи с тем, что коэффициенты вязкости наряду с ε являются малыми параметрами $\mu_1, \mu_2 = O(\varepsilon^2)$. Это приводит к тому, что пространственные градиенты семейств перемещений, $\nabla_x w_\varepsilon$, не ограничены равномерно по ε в жидкой области. Успешно преодолеть эту сложность позволяет лемма о продолжении [3].

В результате процедуры гомогенизации устанавливается предельная двухмасштабная система интегро-дифференциальных уравнений, содержащая два вида независимых переменных: микроскопические (быстрые) и макроскопические (медленные).

3. Предельные эффективные уравнения Био. Проведена асимптотическая декомпозиция двухмасштабной предельной системы, то есть разделение масштабов. Как результат, выведены эффективные уравнения, независимыми переменными в которых являются только медленные (макроскопические) переменные. Этими уравнениями оказались неклассические интегро-дифференциальные уравнения типа уравнений Био [4]. Доказано, что начально-краевая задача для уравнений Био является корректной.

Работа поддержана грантом РФФИ (код проекта 13-01-00529).

Библиографический список

1. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. – 1992. – Vol. 23. – № 6. – P. 1482–1518.
2. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – Vol. 20. – P. 608–623.

3. Clopeau T., Ferrin J.L., Gilbert R.P., Mikeli'c A. Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part II // Math. Comp. Modelling. – 2001. – Vol. 33. – P. 821–841.

4. Bear J. Dynamics of fluids in porous media. – New York: Dover Publications, 1988. – 784 p.

УДК 517.95 + 532.582

Численное исследование краевой задачи о колебаниях тонкой ледовой пластины

К.А. Шишмарев
АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается движение жидкости в трехмерном канале, покрытом льдом. Канал имеет ширину $2L$, $(-L \leq y \leq L)$ и высоту H , $(-H \leq z \leq 0)$, $(-\infty < x < \infty)$ $(x, y, z$ – декартовы координаты). Лед рассматривается как тонкая вязкоупругая пластина, закрепленная на стенках канала $(y = -L, L)$. Нагрузка движется по пластине в положительном направлении оси x . В результате нагрузки пластина отклоняется от исходного состояния $(z = 0)$ на величину $w(x, y, t)$.

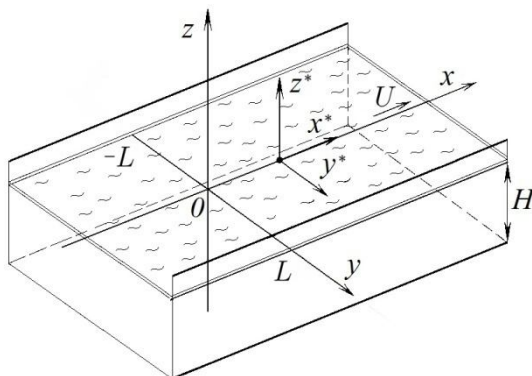


Рис. 1. Схема прямоугольного канала с ледовым покровом

Прогиб ледовой пластины $w(x, y, t)$ описывается уравнением вязко-упругих колебаний ледовой пластины [1] в следующем виде

$$Mw_{tt} + D \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w = P(x, y, t) + p(x, y, 0, t) \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0),$$

здесь $D = Eh_i^3/[12(1 - \nu^2)]$ – изгибная жесткость; E – модуль Юнга; h_i – толщина ледовой пластины; ν – коэффициент Пуассона для льда; $\tau = \eta/E$ – время релаксации; η – вязкость; $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$,

$M = \rho_i h_i$ – масса льда на единицу площади; ρ_i – плотность льда; $p(x, y, 0, t)$ – давление на поверхности жидкости; $P(x, y, t)$ – внешнее давление, создаваемое движением нагрузки; t – время.

Внешняя нагрузка задается гладкой локализованной функцией $P(x, y, t)$. Нагрузка движется прямолинейно по центральной линии канала и описывается следующим образом

$$P(x, y, t) = -P_0 P_1 \left(\frac{x-Ut}{L} \right) P_2 \left(\frac{y}{L} \right) \quad (4)$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L),$$

здесь U – скорость движения нагрузки.

Для определения гидродинамического давления на границе жидкость-лед используется линеаризованное уравнение Бернулли

$$p(x, y, 0, t) = -\rho \varphi_t - \rho g w \quad (5)$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L),$$

где ρ – плотность воды; $\varphi(x, y, z, t)$ – потенциал скорости течения; g – ускорение свободного падения.

Потенциал течения $\varphi(x, y, z, t)$ в области течения в каждый момент времени удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi(x, y, z, t) = 0 \quad (6)$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L, -H < z < 0).$$

Граничные условия для $\varphi(x, y, z, t)$ определяются в соответствии с кинематическим условием на границе раздела между ледовой пластиной и жидкостью, а также условиями непроницаемости на дне и стенках канала и имеют вид

$$\varphi_z = w_t \quad (z = 0), \quad (7)$$

$$\varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \quad (8)$$

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -H). \quad (9)$$

Полагается, что лед приморожен к стенкам канала, т.е. для прогиба $w(x, y, t)$ выполнены граничные условия

$$w = 0, \quad w_y = 0 \quad (y = \pm L). \quad (10)$$

Условия затухания колебаний вдали от движущейся нагрузки для функций $\varphi(x, y, z, t)$ и $w(x, y, t)$ имеют вид

$$\varphi(x, y, z, t), w(x, y, t) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty). \quad (11)$$

Система уравнений (1)-(9) приводится к безразмерному виду. Затем, с помощью преобразования Фурье вдоль канала рассматриваемая задача сводится к задаче относительно профиля волны поперек канала, которая решается методом нормальных мод для каждого значения параметра преобразования с заданным интервалом между значениями параметра. Определяются прогиб и напряжения в пластине.

Задача о прогибе упругой пластины под действием бегущей волны была исследована в [2, 3].

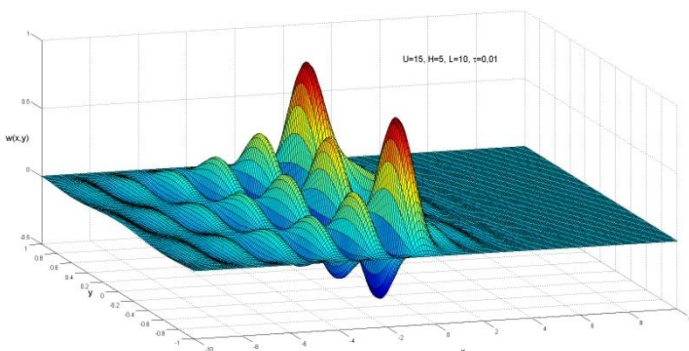


Рис. 2. Пример тестовых расчетов прогиба $w(x, y, t)$ ледового покрова в безразмерных координатах

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ «Взаимодействие ледового покрова с сооружениями при наличии неизвестных областей контакта», № 13-08-01097, и государственного задания Министерства №2014/2.

Библиографический список

1. Жесткая В.Д. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову // ПМТФ. – 1999. – Т. 40, № 4. – С. 243–248.
2. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2012. – Вып. 1/2 (73). – С. 55–59.
3. Коробкин А.А., Хабахпашева Т.И., Папин А.А. Математические модели снежно-ледового покрова. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013. – 116 с.

УДК 532.546+517.958

Задача фильтрации жидкости в тонком слое льда*М.А. Токарева**АлтГУ, г. Барнаул*

Рассматривается математическая модель фильтрации вязкой жидкости в пороупругой среде. Для описания процесса используются законы сохранения масс, закон Дарси, учитывающий движение твердого скелета, реологический закон типа Максвелла и уравнение сохранения импульса системы [1, 2]:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \operatorname{div}((1-\phi)\vec{v}_s) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\phi\rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi\vec{v}_f) = 0,$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{K\phi^n}{\mu}(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}), \quad (2)$$

$$\frac{1}{1-\phi} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\phi^m}{\nu} p_e - \phi^b \beta_\phi \frac{dp_e}{dt}, \quad (3)$$

$$\rho\vec{g} + \operatorname{div}\left((1-\phi)\nu\left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}}\right)^*\right)\right) - \nabla p_{tot} = 0, \quad (4)$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, \quad (5)$$

$$p_e = (1-\phi)(p_s - p_f), \rho = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s,$$

где $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_s, \vec{v}_f$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз; ϕ – пористость, а давление и плотность жидкости связаны следующим соотношением $\frac{dp_f}{d\rho_f} = \frac{1}{\beta_\phi\rho_f}$; $\vec{g} = (0, 0, -g)$ – плотность

массовых сил; k – проницаемость, μ – коэффициент динамической вязкости жидкости; ν, β_ϕ, b, m – параметры твердой фазы; p_{tot} – общее давление. Задача записана в эйлеровых координатах (t, x, y, z) . Истинная плотность твердой фазы ρ_s принимается постоянной.

Искомыми являются величины ϕ , \vec{v}_s , \vec{v}_f , p_f , p_s , ρ_s , ρ , p_{tot} , p_e .

Вопросы разрешимости одномерных задач для этой модели рассматривались в работах [3, 4] в случае постоянства общего давления. В общем случае общее давление является функцией пористости и давления и подлежит определению. В докладе излагаются результаты о разрешимости начально-краевых задач для вышеизложенной модели.

Библиографический список

1. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М., 1971.
2. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // *Geodin. Acta.* – 1998.
3. Папин А.А., Токарева М.А. Модельная задача о движении сжимаемой жидкости в вязкоупругой горной породе // *Известия АлтГУ.* – 2010. – №1.
4. Папин А.А., Токарева М.А. Задача о движении сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде // *Известия АлтГУ.* – 2011. – №1.

УДК 535.529:541.64

Сравнение математических моделей процесса формирования полимерных пленок

Ю.Б. Трезубова, Г.В. Пышнограй
АлтГТУ, г. Барнаул

В жизни современного человека полимерные пленки играют не всегда заметную, но очень важную роль, делая более комфортным наше повседневное существование. Достаточно перечислить лишь несколько областей народного хозяйства, в которых нашли свое применение полимерные пленки, чтобы понять важность этого материала. Так, например, пленки широко используются в медицине, промышленности, сельском хозяйстве.

Существуют два основных способа получения полимерных пленок из растворов или расплавов. Растворный способ является одним из старейших и применяется с полимерами, которые могут не выдержать высокотемпературных процессов. Его суть в том, что растворы полимеров через фильеру наносят на движущуюся ленту или барабан, а

структуру и свойства плёнок регулируют скоростью испарения растворителя.

Экструзия полимерного расплава – более современный, экономически выгодный и технологически целесообразный способ производства полимерных пленок. Он состоит в том, что расплав полимера через плоскощелевую головку экструдирован на приемный (поливной) барабан, на котором охлаждается получающаяся пленка. Этим методом перерабатывают термопластичные полимеры в вязкотекучем состоянии. К сожалению, на сегодняшний день он не может полностью заменить растворную технологию из-за значительного нагревания полимерного сырья для получения расплава.

Математическое моделирование этих процессов является актуальной задачей. Ранее были получены математические модели процессов формования пленок указанными способами, которые оказались в значительной степени похожими. В настоящей работе проведено сравнение математических моделей процессов растворного и расплавного формования полимерных пленок.

В ходе сравнения были выявлены сходства, в частности, в модели получения пленок из растворов полимеров коэффициент диффузии играет роль, аналогичную коэффициенту теплопроводности в модели расплавного формования пленок. То же можно сказать и про коэффициент теплообмена и диффузионный массообмен с окружающей средой. Число Вайсенберга (критерий подобия, характеризующий вязкоупругое течение и выражающийся как соотношение между временем релаксации и сдвиговой скоростью) не существенно влияет на результаты расчетов.

Также были обнаружены различия:

1. В модели расплавной технологии зависимость числа Нуссельта (одного из основных критериев подобия тепловых процессов, характеризующего соотношение между интенсивностью теплообмена за счёт конвекции и интенсивностью теплообмена за счёт теплопроводности) от температуры показательного типа, у растворной – зависимость диффузионного числа Нуссельта (безразмерного числа, характеризующего интенсивность массоотдачи) от концентрации степенная.
2. Граничные условия для температуры в модели расплавной технологии первого рода, так как известны температуры на выходе из экструдера и на барабане. В случае растворного способа необходимо использование смешанных граничных условий. На выходе из фильеры концентрация известна (условия первого рода), на намоточном барабане известна только

установившаяся концентрация (условия второго рода).

3. Наличие в модели расплавленного получения пленок дополнительного слагаемого, связанного с диссипацией энергии при интенсивном растяжении пленки. Последнее различие представляется существенным, поэтому в дальнейшем планируется исследование влияния этого слагаемого на вид получаемых зависимостей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №01-12-00033).

Библиографический список

1. Пышнограй Г.В., Покровский В.Н., Яновский Ю.Г. и др. Определяющее уравнение нелинейных вязкоупругих (полимерных) сред в нулевом приближении по параметрам молекулярной теории и следствия для сдвига и растяжения // Доклады АН. – 1994. – Т. 339, №5. – С. 612–615.
2. Pyshnograï G.V., Gusev A.S., Pokrovskii V.N. Constitutive equations for weakly entangled linear polymers // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2009. – V. 163, №1-3. – P. 17–28.

Секция 4. ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 519.254

Веб-приложение для оценки показателей неопределенности измерений с малым числом наблюдений

*О.А. Ан, С.И. Жилин
АлтГУ, г. Барнаул*

Государственные стандарты, а также подчиненные им методические указания, связанные со статистической обработкой прямых и косвенных измерений (ГОСТ 8.207–76, ГОСТ 8.508–84, ГОСТ 8.563–96, МИ 1317–86, МИ 2083–93 и т.п.) предписывают использовать для оценки истинных значений измеряемых величин, а также оценки показателей их неопределенности теоретико-вероятностные методы математической статистики. В частности, для описания показателей неопределенности (границ случайной и систематической погрешности результатов измерений) рекомендуется использовать доверительные вероятностные интервалы. Однако в ряде случаев применение этих рекомендаций затруднено или невозможно в виду полного отсутствия информации о вероятностных характеристиках распределения погрешности наблюдений и/или недостаточной представительности выборки измерений. Например, в ГОСТ 8.207–76 прямо указывается, что для применения изложенных в нём методик оценивания доверительных границ погрешностей измерения требуется предварительно проверить нормальность распределения результатов наблюдений, что в свою очередь возможно лишь для выборки, содержащей не менее 15 наблюдений.

Вместе с тем в научной и инженерной практике нередко возникает необходимость обрабатывать и существенно более короткие выборки измерений. В подобных ситуациях для оценивания истинных значений измеряемых величин и показателей их неопределенности могут быть использованы методы интервального анализа, опирающиеся на гипотезу ограниченности погрешности и не требующих употребления понятия вероятности. Благодаря работам Г. Бельфорте, Е. Вальтера, А.П. Воцинина, Н.П. Дывака, С.И. Жилина, Л.В. Канторовича,

В.Я. Крейновича, С.И. Кумкова, М. Миланезе, Р.Е. Мура, Дж. Нортон, Н.М. Оскорбина, А.Л. Померанцева, Л. Пронцато, А.С. Подружко, О.Е. Родионовой, С.И. Спивака, В.А. Суханова, С.П. Шарого, П.Е. Эльясберга и др. накоплен довольно богатый математический инструментарий анализа экспериментальных данных с интервальной неопределенностью.

С целью приблизить наработки математиков в области интервального анализа к практикам и обеспечить интервальные методы обработки измерений необходимым правовым статусом в Институте математики и механики УрО РАН С.И. Кумковым совместно с представителями Центра метрологии и сертификации УрО РАН, а также ряда исследовательских и производственных организаций в рамках государственной системы обеспечения единства измерений разработан проект методики расчета показателей неопределенности измерений с ограниченным числом наблюдений, основанной на методах интервального анализа [1]. В методике излагаются необходимые основные понятия и алгоритмы

- оценивания истинного значения и показателей неопределенности при анализе выборки наблюдений единичной физической величины;
- расчёта показателей неопределенности линейной зависимости;
- расчёта показателей неопределенности квадратичной зависимости.

Использование алгоритмов проиллюстрировано простыми примерами.

Отличительной чертой алгоритмов методики является их относительно высокая (по сравнению с используемыми в ГОСТах) трудоёмкость, что делает необходимым использование для вычислений специализированного программного обеспечения. Разработка программного обеспечения для вычислительной поддержки методики расчета показателей неопределенности измерений с ограниченным числом наблюдений является предметом настоящей работы.

Дабы обеспечить постоянную доступность вычислительных средств для поддержки методики, а также избавить пользователя от необходимости инсталляции, обновления и настройки ПО, было принято решение о его реализации в виде веб-приложения [2]. Функциональные возможности приложения позволяют ввести данные или загрузить их из файла и произвести расчет оценок таких показателей, как интервалы неопределенности наблюдений, интервальные оценки истинного значения физической величины (линейной или квадратичной

зависимости), максимальное отклонение наблюдений, меру совместности выборки, матрицу совместности наблюдений и пр. На основе матрицы совместности приложение позволяет определить одиночные выбросы, а также разбить исходную выборку на совместные подвыборки, которые далее могут быть проанализированы отдельно. Кроме того, приложение осуществляет визуализацию выборки интервальных наблюдений, интервальной оценки истинного значений величины или зависимости, позволяя интерактивно на графике указать наблюдения, подлежащие включению в некоторую специальную подвыборку для последующего анализа. Пример визуализации выборки наблюдений значений линейной зависимости приведен на рисунке 1.

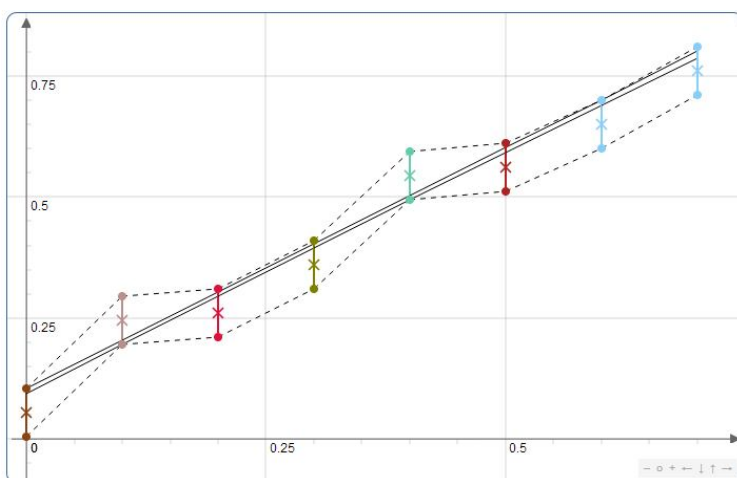


Рис. 1. Пример визуализации выборки наблюдений значений линейной зависимости. Множество допустимых зависимостей показано в виде «коридора» со сплошными границами

Веб-приложение построено на основе технологии JSP. При реализации вычислительных алгоритмов в приложении использована библиотека для интервальных вычислений JInterval [3].

В настоящее время ведется работа над 6-й редакцией проекта методики расчета показателей неопределённости измерений с ограниченным числом наблюдений. В новой редакции ожидаются существенное уточнение и совершенствование терминологии и, возможно, расширение используемых алгоритмов. В свою очередь это может повлечь и модификацию веб-приложения.

Библиографический список

1. Показатели неопределенности измерений с ограниченным числом наблюдений. Методика расчета (проект, 5-я редакция) / Кумков С.И., Игнатенкова Л.А., Чепков В.И. – Екатеринбург, 2011.
2. Оценка показателей неопределенности измерений с ограниченным числом наблюдений – <http://estimator-asuapps.rhcloud.com>.
3. Nadezhin D.Yu., Zhilin S.I. JInterval Library: Principles, Development, and Perspectives // Reliable Computing 19 (3), 2014, pp. 229-247.

УДК 528.85

Адаптация StaMPS на кластере для мониторинга подвижек земной поверхности

В.М. Брыксин, А.В. Евтюшкин, А.В. Филатов
Балтийский федеральный университет им. И.Канта,
г. Калининград

Развитие современных средств спутникового радиолокационного зондирования движется в направлении улучшения характеристик съемочной аппаратуры и увеличения орбитальной группировки для сокращения периода повторной съемки. В связи с этим появляется возможность обработки материалов высоко-периодической многопроходной съемки. Современные исследования в области радиолокационного дистанционного зондирования направлены на разработку новых методов обработки именно массивом разновременных радарных измерений и на достижение высокой точности определения смещений вплоть до первых миллиметров. В частности технология устойчивых отражателей PSI и её модификации StaMPS (Stanford Method for Persistent Scatterers) и SqueeSAR являются в настоящее наиболее эффективной.

Усложнение применяемых методов и огромный объем исходных данных делают необходимым применение распределенных вычислений с использованием высокопроизводительных компьютерных кластеров, в связи с невозможностью расчетов на однопроцессорных вычислительных системах. Методы интерферометрии стабильных отражателей позволяют разделить процесс обработки на небольшие независимые порции, которые выполняются на кластере за конечное время (15-20 минут). Данная схема позволяет значительно сократить время обработки больших объемом радиолокационных данных и рационально использовать вычислительный кластер совместно с другими ресур-

соемками задачами. Коммерческое ПО для интерферометрической обработки, предназначено только для установки на одиночные рабочие станции пользователей, поэтому неспособно обработать большой массив полных радиолокационных кадров.

Метод постоянных интерферометрических отражателей StaMPS для оценки смещений стабильных элементов микрорельефа земной поверхности и техногенных объектов адаптирован для расчетов на высокопроизводительном кластере и апробирован на временных рядах радарных данных в диапазонах L, C и X. Технология StaMPS авторами реализована в среде MatLab путем распараллеливания для расчетов на высокопроизводительном кластере из 128 узлов DELL PowerEdgeM600Server. Производительность повышена в 12 раз по сравнению с однопроцессорными вычислениями.

При длительной разработке нефтегазовых месторождений, угольных, соляных и рудных шахт, эксплуатации подземных хранилищ газа возникают и развиваются следующие природно-техногенные геодинамические явления: горные удары, наведенная сейсмичность, образование мульды оседания в центре, повышение газопроницаемости пород, колебания дневной поверхности, активация разломных зон, повышение напряжения и деформации вмещающих пород. Спутниковый радарный мониторинг позволяет: охватить большой временной интервал при привлечении архивных и оперативных данных, повысить частоту наблюдений, достичь точности сопоставимой с измерениями геодезическими методами за один цикл наземных наблюдений, увеличить площадь контроля, оперативно предоставлять данные широкому кругу пользователей.

На основе метода интерферометрии постоянных отражателей (PSI) обработаны 15 радарных кадров TerraSAR-X на территорию Самотлорского нефтяного месторождения за период с 3.08.2013-4.01.2014. Построено поле скоростей смещений стабильных отражающих объектов, а также временные ряды смещений за время между последовательными съемками. При обработке территории, охватываемой полным кадром размеров 50x30 км, рассчитаны смещения для 89290 стабильных отражателей, в основном представленных техногенными объектами на кустовых площадках Самотлорского месторождения и Нижневартовской ГРЭС [1-3].

На основе метода StaMPS, позволяющего рассчитывать смещения для техногенных объектов и для элементов микрорельефа земной поверхности обработаны 18 радиолокационных кадров ALOS/PALSAR за период 2007-2011 годы. Между результатами полученными на основе двух разных наборов данных (15 кадров TerraSAR-X в интервале 4

месяца и 18 кадров ALOS-1\ALSAR в интервале 5 лет) с применением двух разных методов (PSI и StaMPS) обнаружена корреляция. В первую очередь в расположении основной мульды оседания, образовавшейся в результате разработки Самотлорского месторождения. А также в смещениях на территории Нижневартовской ГРЭС и поселка Излучинск (Усть-Вахская площадь месторождения).

Методы PSI, StaMPS, SqueeSAR+StaMPS проверены на эталонных 25 кадрах спутника ENVISAT\ASAR на территорию города Лас-Вегас с заранее хорошо изученными известными результатами просадок и усканий. Кадры ASAR распространяются как тестовые вместе с коммерческим программным обеспечением SARscape, а смещения на данной территории хорошо изучены и подтверждены наземными измерениями. Значения скоростей смещений, полученные всеми тремя методами, совпали с результатами в программе SARscape. Интерес представляет количество точек (стабильных отражателей), которые были обнаружены и использованы для расчета смещений в каждом методе. Метод PSI – 20770 точек, метод StaMPS – 218625 точек, метод SqueeSAR+StaMPS – 227168 точек. Вследствие значительного времени обработки по методу SqueeSAR даже с применением кластера тестирование выполнено только на небольшом участке.

При совмещении методов StaMPS и SqueeSAR возможно использовать достоинства обеих технологий и получить смещения для более плотной сети точек, таких как техногенные объекты, стабильные элементы ландшафтов и распределенные отражатели.

Для обеспечения многопользовательского доступа при анализе результатов интерферометрической обработки применена технология геопространственной веб-публикации и разработано программное обеспечение для экспорта в формат KML с последующим отображением в GeoServer в режиме on-line с использованием технологии хранения базы данных в СУБД PostgreSQL. Результаты интерферометрической обработки публикуются на геопортале для дальнейшего анализа не только поля скоростей смещений, но также и временных диаграмм смещений для каждого объекта [4]. В ходе работы установлено, что использование предложенного подхода к публикации данных позволяет сократить нагрузки на вычислительные системы и увеличить скорость отображения не менее чем в 100 раз, а при объемах данных более 100 тыс. точек позволило проводить обработку без применения высокопроизводительных систем. Наглядное представление данных в WEB интерфейсе позволяет пользователям с различным уровнем профессиональной подготовки анализировать полученные результаты.

Предложенная технология реализована на геопорталах space.gov39.ru и metageo.aimg.kantiana.ru, где представлены результаты мониторинга вертикальных движений устойчивых интерферометрических отражателей по данным ALOS-1\PALSAR на Самотлорскоенефтяное в ХМАО-ЮГРЕ и Губкинское газовое месторождения в ЯНАО, Самбийский полуостров в Калининградской области.

Разработан и протестирован на Самотлорском и Губкинском месторождениях способ обнаружения зон геодинамического риска на основе данных радиолокационного зондирования земной поверхности, использующий корреляционную обработку временных рядов смещений стабильных точечных отражающих объектов [5].

Архивные и оперативные данные высокого разрешения с КА Ресурс-ДК, Канопус-В, Ресурс-П области поступают из НЦОМЗ Роскосмоса на некоммерческой основе в рамках исполнения заказа Правительства Калининградской области на съемку территории области. Снимки используются для уточнения и идентификации природных и техногенных объектов являющихся устойчивыми отражателями для радарных изображений.

Спутниковые данные ALOS-1\PALSAR за 2006-11гг. предоставлены JAXA по грантам RA1 PI-405, RA2 PI-563, RA4 PI-1070 [2, 3]. Данные TerraSAR-X на период с августа 2013 по декабрь 2014 оперативно предоставляются DLR по гранту GEO1978 «Complex study of persistent scatterer technique for subsidence monitoring in geodynamic risk areas on conditions of landscapes seasonal changes». Работа проводится при поддержке РФФИ по проекту 13-07-00419.

Библиографический список

1. Филатов А.В., Евтюшкин А.В., Брыксин В.М., Васильев Ю.В., Юрьев М.Л., Белоносов А.Ю. Использование метода интерферометрии устойчивых отражателей при геодинамическом мониторинге Самотлорского месторождения // Маркшейдерский вестник. – 2012. – № 4. – С. 57–62.

2. Bryksin V.M., Filatov A.V., Yevtyushkin A.V. Using of SAR data and DInSar-PSInSar technique for monitoring Western Siberia and Arctic // Журнал радиоэлектроники. – 2012. – № 6. – С. 1-53.

3. Filatov A., Evtyushkin A., Bryksin V. Some results of long term geodynamic monitoring of oil and gas fields and power engineering infrastructure using ENVISAT and ALOS SAR data // Proceedings of 2013 Asia-Pacific Conference on Synthetic Aperture Radar (AP SAR). Tsukuba, Japan, September 23-27, 2013. P. 181-184.

4. Филатов А.В., Брыксин В.М. Программа представления результатов высокоточной оценки смещений техногенных объектов «TVGeoPub» // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012618325 от 14.09.2012.

5. Филатов А.В., Евтюшкин А.В., Брыксин В.М. Способ обнаружения зон геодинамического риска на основе данных радиолокационного зондирования земной поверхности // Патент РФ №2506606, Опубл. 10.02.2014 Бюл. №4.

УДК 519.688

Алгоритмы решения нечетких отношений равенств

А.В. Гуров, И.В. Пономарев

АлтГУ, г. Барнаул

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ – два конечных множества; $X \times Y$ – прямое произведение; $A \subset X$, $R \subset X \times Y$ – нечеткие подмножества определенные своими функциями принадлежности $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$, $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0,1]$. Подмножество R будем интерпретировать как нечеткое отношение между элементами множеств X и Y . Определена композиция $A \circ R = B \subset Y$ представляющая собой нечеткое подмножество с функцией принадлежности

$$\mu_B(y_j) = \max_{x_i} \left\{ \min \left\{ \mu_A(x_i), \mu_R(x_i, y_j) \right\} \right\}.$$

Задача нахождения нечеткого множества A , исходя из равенства $A \circ R = B$ и известных нечетких множеств B и R , называется задачей решения нечеткой системы отношений равенств.

Понятие нечетких отношений равенств впервые было введено в [1] и является одним из ключевых понятий в теории нечетких множеств. В дальнейшем системы нечетких отношений равенств исследовались многими авторами [2–4].

В данной работе исследуются различные алгоритмы решения систем нечетких отношений равенств, которые реализованы в среде математического пакета MATLAB. Результаты решения задачи сопоставляются как между собой, так и с реальными данными. Оценивается вычислительная сложность рассматриваемых алгоритмов, с целью их использования при моделировании нечетких временных рядов. В

дальнейшем планируется создать полноценное ПО для решения системы нечетких отношений равенств с возможностью выбора необходимого метода решения.

Работа выполнена в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» на 2012-2016 годы «Развитие Алтайского государственного университета в целях модернизации экономики и социальной сферы Алтайского края и регионов Сибири» (мероприятие «Конкурс грантов-2014», № 2014.312.1.4), а также при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (Код проекта 1148).

Библиографический список

1. Sanchez E. Resolution of composite fuzzy relation equations // Information and Control – 1976 – V.30, p. 38–48.
2. Cheng L., Wang P.P. Fuzzy relation equation. I: the general and specialized solving algorithms // Soft Computing – 2002 – V.6, p. 428–435.
3. Cheng L., Wang P.P. Fuzzy relation equations. II: The branch-point-solutions and the categorized minimal solutions // Soft Computing – 2007 – V.11, No.1, p. 33–40.
4. Куркина М.В., Пономарев И.В. Система нечетких отношений равенств в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений : тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 5–12 октября 2008 г.). – Новосибирск : Ин-т математики СО РАН, 2008.

УДК 004.822

Проблемы семантического поиска

А.Ю. Дорофеева
АлтГУ, Барнаул

Одной из актуальных задач в области информационных технологий является поиск информации в больших массивах документов – текстов на естественном языке.

Семантическая паутина (Semantic Web) является расширением традиционного Интернета и нацелена на упрощение поиска и распределе-

ния информации. Данная технология основывается на элементах, построенных с использованием стандартных языков онтологий, таких как OWL. Обычные поисковые системы основываются на поиске ключевых терминов запроса в документе и не могут использовать его смысловое значение для получения результата, поэтому сообщество исследователей семантической паутины предложило использовать семантические поисковые технологии, среди которых OntoSearch, Semantic Wikis, мультиагент P2P, семантические системы маршрутов (запросов), вопросно-ответные системы, использующие онтологии для хранения баз знаний [1].

Хотя семантическая паутина способствует поиску информации в сети, существует несколько нерешенных проблем, которые следует принять во внимание. Первая из них – это огромное количество неструктурированных Интернет-документов, которые должны быть семантически размечены для использования семантическими поисковыми системами. Это непростая задача, так как она, среди прочего, требует развития проблемно-ориентированных онтологий [2].

Полностью автоматизированный процесс разметки существующих данных – еще одна нерешенная задача. Методы, позволяющие автоматизировать процесс преобразования запросов свободной формы к формальному виду и построение отображения онтологий предметных областей на формальные запросы на данный момент только исследуются.

Библиографический список

1. Allemand D., Hendler J. Semantic Web for the Working Ontologist: Effective Modeling in RDFS and OWL // Morgan Kaufmann, 2008.
2. Басипов А.А., Демич О.В. Семантический поиск: проблемы и технологии. Вестник АГТУ. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – №1. – С. 110.

УДК 004.89

Обнаружение автомобилей в системе видеонаблюдения за пешеходными переходами

***М.А. Колосовский**
АлтГТУ, г. Барнаул*

В настоящее время неуклонно растет использование технологий видеонаблюдения, предоставляющих возможность одновременно кон-

тролировать множество удаленных от оператора объектов. Особое место среди таких технологий занимают интеллектуальные системы видеонаблюдения (*intelligent surveillance systems*), способные в автоматическом режиме обнаруживать ситуации, отвечающие целям видеонаблюдения. Такие системы востребованы, прежде всего, потому, что на порядок снижают использование человеческих ресурсов, так как оператору больше не требуется непрерывно просматривать данные с нескольких камер, ему нужно лишь подтверждать корректность найденных системой «особых» ситуаций.

Подкатегорией интеллектуальных систем видеонаблюдения являются системы автоматической фиксации нарушений правил дорожного движения, способные обнаруживать такие нарушения, как превышение скорости, пересечение сплошной или стоп-линии, проезд на красный свет. В данной статье рассматривается исследование, направленное на создание блока обнаружения автомобилей для фиксации непредоставления преимущества пешеходу на нерегулируемом переходе. Выявление таких нарушений требует одновременного отслеживания траекторий пешеходов и автомобилей, что принципиально сложнее, чем фиксация вышеупомянутых нарушений.

Проведя анализ особенностей решаемой задачи видеонаблюдения за пешеходными и переходами и сравнение возможностей существующих алгоритмов обнаружения автомобилей, было решено начать исследовать применимость алгоритмов на основе вычитания фона и последующей фильтрации полученных областей. Это объясняется тем, что в данной задаче имеется только два вида различных объектов (пешеходы и автомобили), которые сильно отличаются друг от друга параметрами получаемых областей, что позволяет надежно классифицировать области на принадлежащие автомобилям и пешеходам.

Для вычитания фона (отделения объектов от статичного фона) существует ряд методов. К основным можно отнести методы на основе среднего значения, медианы/приближенной медианы, разницы соседних кадров, одной гауссианы, смеси гауссиан, корреляции нормированных блоков, оптического потока, фильтров Калмана/ Вейнера. Методы на основе медианы, оптического потока затруднительно использовать из-за большого количества потребляемых ресурсов, так как наряду с вычитанием фона в системе должны работать ряд других более ресурсозатратных алгоритмов (детектор и трекер пешеходов). При применении нормированных блоков, фильтров Калмана или Вейнера необходимо задавать дополнительных параметров в зависимости от условий съемки, чего хотелось бы избежать. Использование смеси гауссиан не оправдано, так как в решаемой задаче видеонаблюдения

редко встречаются объекты, имеющие несколько пиков в гистограмме распределения значений частот. Таким образом, остались методы на основе среднего значения и приближенной медианы, отличающиеся быстродействием и минимумом настройки параметров. Был выбран алгоритм на основе среднего значения, так как метод приближенной медианы требует видимости фона не менее половины времени, что не обязательно будет выполнено в условиях плотного потока дорожного движения. Итак, модель фона строится как усреднение K последних кадров:

$$B_t(x, y) = \frac{1}{K} \sum_{i=t-K}^{t-1} I_i(x, y)$$

где $B_t(x, y)$ – модель фона для t -го кадра видео, $I_i(x, y)$ – i -тый кадр видео. На рисунке 1 продемонстрирована построенная алгоритмом модель фона для одного из тестовых видео.

Маска областей, принадлежащих объектам, строится как бинаризация разницы текущего кадра и построенной модели фона:

$$F(x, y) = |B_t(x, y) - I_i(x, y)| > T$$

где T – порог бинаризации.

Для локализации объектов выполняется сканирование маски объектов окном заданного размера $H \times W$. Все окна, внутри которых доля активных $A(x, y)$ (т.е. отличающихся от фона более чем на T) оказалась более D , заносятся в список кандидатов в объекты C .

$$Q(x, y) = |\{(x', y') \mid x - W + 1 \leq x' \leq x, y - H + 1 \leq y' \leq y: F(x', y')\}|$$

$$A(x, y) = \frac{Q(x, y)}{HW}$$

$$C = \{(x, y) \mid A(x, y) > D\}$$

Для эффективного вычисления количества активных пикселей $Q(x, y)$ применялась схема интегральных сумм. По маске активных пикселей для каждой позиции (x, y) считалось количество активных пикселей $S(x, y)$ в прямоугольнике с углами в $(1, 1)$ и (x, y) , что можно вычислить за $O(\text{размер кадра в пикселях})$ для всех $S(x, y)$:

$$S(x, y) = |\{(x', y') \mid 1 \leq x' \leq x, 1 \leq y' \leq y: F(x', y')\}|$$

После этого количество активных пикселей $Q(x, y)$ вычисляется по $S(x, y)$ за $O(1)$:

$$Q(x, y) = S(x, y) - S(x - W, y) - S(x, y - H) + S(x - W, y - H)$$

Кандидаты перебираются, начиная с тех, где доля активных пикселей выше. Кандидаты с более высокой долей подавляют соседних кандидатов так, чтобы границы окон соответствующих обнаружений были не ближе друг другу, чем на R пикселей:

где $\mathcal{N}(x)$ – множество соседних пикселей, $\mathcal{C}(x)$ – множество соседних кандидатов.

Таким образом, получаем отфильтрованный список обнаруженных автомобилей.

Для сопоставления обнаружений автомобилей на разных кадрах используется метод ближайшего соседа. Кроме того, для сглаживания резких скачков используется фильтр Калмана.

Примеры работы алгоритма представлены на рисунке 1. Видно успешное обнаружение автомобилей. Можно заметить, что обнаруживаются только автомобили находящиеся не далее некоторого расстояния, что однако не является недостатком в контексте данной задачи, так как главное – это, чтобы автомобили обнаруживались близи пешеходного перехода.

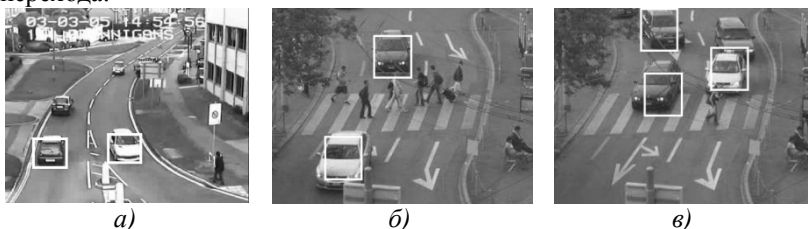


Рисунок 1. Примеры работы алгоритма

Представленный алгоритм имеет ряд недостатков, проявление которых продемонстрировано на рисунке 2. Группа рядом расположенных людей, как и автомобиль, представляет собой большую область активности, которая может быть ошибочно принята за автомобиль (рисунок 2а). Такую ошибку можно частично предотвратить, наложив ограничения на место появления обнаруживаемых объектов, ведь автомобили в кадре появляются и исчезают только в определенных областях. Крупные автомобили создают настолько большую область активности, что могут быть распознаны как несколько автомобилей (рисунок 2б). Можно внести в алгоритм информацию о геометрии сцены, что позволит рассчитывать изменяющийся в процессе движения масштаб объектов. При резком изменении освещения модель фона не успевает адаптироваться к таким изменениям, поэтому активным получается почти весь кадр (рисунок 2в). Для адаптации к быстрым изменениям система дополняется алгоритмом, обнаруживающим быстрые

изменения большей части кадра, что не может быть вызвано мгновенным появлением большого количества объектов на всем кадре, и ускоряет обновление модели фона.

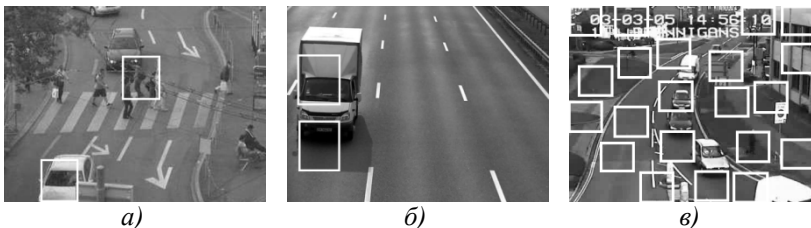


Рисунок 2. Примеры неправильной работы представляемого алгоритма

В результате проведенных экспериментов на различных видеоданных алгоритм показал приемлемое качество работы. Однако для большей надежности подсистемы обнаружения автомобилей она должна быть усилена детектором объектов, что является задачей последующего исследования.

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере (госконтракт №0068 ГУ1/2013).

УДК 004.738.5

Преимущества использования Акторного Пролога для реализации семантического поиска

О.Н. Половикова

АлтГУ, г. Барнаул

В исследовании обозначается проблема выбора инструментария для построения онтологии информационного ресурса в рамках развития проекта Semantic Web. Специфика такого выбора должна определяться системой правил, которая учитывает свойства существующих технологических средств описания семантики ресурса, возможности языков декларирования и характеристики онтологии (модель знаний, тип онтологии, уровень детализации и другие факторы). Язык описания онтологии обуславливает свойства методов и технологий, которые будут использоваться для реализации функций по работе с ней (извлечение, добавление знаний, проверка на непротиворечивость и т.д.). Разные языки опираются на различные модели представления знаний

(деревья, семантические сети, фреймы и т.д.), поэтому создаваемые на их базе семантические конструкции в зависимости от декларативной реализации подчиняются своему набору правил обработки и анализа.

Технологическая база Semantic Web развивается по следующим направлениям [1]:

- Расширяемый язык разметки eXtensible Markup Language, XML.
- Система описания ресурсов — Resource Description Framework, RDF и его надстройка язык *RDFS* — язык описания словарей классов и свойств Web-ресурсов.
- Язык онтологий — Web Ontology Language, OWL.

Правила и практические инструкции по использованию данных языков рассмотрены в работах [1, 2].

Все представленные выше языки описания метаданных ресурсов и онтологий являются декларативными, так как позволяют описать, что представляет собой Web-ресурс, т.е. каковы его свойства и в частности семантика. Следует заметить, что сформированный перечень основных используемых декларативных языков является неполным. Анализ материалов исследований [3, 4] позволил сделать вывод, что разработчики сетевых ресурсов и инженеры знаний определяют также декларативные языки Prolog, Actor Prolog как необходимый инструментарий для реализации проекта Semantic Web. Это, прежде всего, связано с принципиальной особенностью prolog-системы автоматически находить решение поставленной перед ней задачи (если такое имеется) таким образом, как если бы эту задачу решал эксперт-человек. Actor Prolog в дополнение к классическому языку Prolog поддерживает объектно-ориентированную парадигму и обладает развитым аппаратом для разработки интеллектуальных агентов. Возможности языков Prolog, Actor Prolog являются востребованными в Semantic Web.

Анализ информационных источников проекта Semantic Web позволяет сделать вывод, что на сегодняшний день не существует универсальной системы правил, регламентирующих использование той или иной технологии для описания метаданных и онтологии. Именно онтология является ключевым звеном в организации всех этапов работы со знаниями в сети Internet: хранения, поиска, анализа, представления пользователям и программам-агентам, обмена ими и между приложениями.

Онтология определяется как ключевая технология развития Semantic Web, а базовым этапом проектирования онтологии является выбор средства для её спецификации. Соответствие возможностей языка задачам, для решения которых разрабатывается онтология и её

программные агенты, как раз и определяет адекватность такого выбора.

Библиографический список

1. Кудрявцев Д. Технологии применения онтологий [Электронный ресурс] // Бизнес Инжиниринг Групп: сайт. – Режим доступа: http://bigc.ru/theory/km/onto_technologies.php.

2. Добров Б.В. Онтологии и тезаурусы [Электронный ресурс] // Основан на курсе Intuit.ru «Онтологии и тезаурусы: модели, инструменты, приложения». Авторы: Б.В. Добров, В.В. Иванов, Н.В. Лукашевич, В.Д. Соловьев. – Режим доступа: <http://www.intuit.ru/studies/courses/1078/270/info>.

3. Морозов А.А. Об одном подходе к логическому программированию интеллектуальных агентов для поиска и распознавания информации в Интернет [Электронный ресурс] // Журнал радиоэлектроники. – № 10, 2003. – Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/iso/nov03/1/text.html>

4. Морозов А. А., Обухов Ю. В. Акторный Пролог [Электронный ресурс] // электронная книга (версия от 23.01 2004). – Режим доступа: <http://www.cplire.ru/Lab144/aprolog.pdf>, свободный.

УДК 004.896

Алгоритм семантического поиска в больших текстовых коллекциях

В.В. Савченко, Е.Н. Крючкова
АлтГТУ, г. Барнаул

Проблема поиска в больших текстовых коллекциях является одной из приоритетных в условиях большого и стремительно растущего объема информации [1]. Одним из вариантов поиска является семантический поиск, т.е. поиск по смыслу содержащейся в тексте информации [2–4]. Существующие системы поиска (Google, SearchMonkey, Powerset, Freebase, AskNet) имеют существенные ограничения на длину запроса, демонстрируют снижение качества поиска с увеличением поискового запроса, имеют лишь незначительное улучшение результатов поиска при использовании семантики. Кроме того, большинство таких поисковых систем работают только с английским языком.

Изменчивость синтаксических конструкций и вариативность лексики естественных языков, разнообразие стилей изложения материала существенно усложняют решение данной задачи.

Семантический поиск. В данной работе представлен результат разработки системы семантического поиска для больших текстовых коллекций на русском языке. Ключевая особенность предлагаемой системы – снятие ограничений на величину поискового запроса.

Исходными данными для поиска являются текстовые коллекции и запрос пользователя, который также представляет собой текстовую коллекцию. Логично сделать вывод, что большая текстовая коллекция в общем случае неоднородна по своему содержанию и при поиске интересна лишь ее определенная часть, текст можно разделить на фрагменты. Как правило, такие фрагменты – это страницы, абзацы или наборы из нескольких предложений. Фрагменты будем называть «окнами», таким образом, задача сводится к поиску таких окон.

Для каждого окна запроса и поисковых коллекций строится граф семантических связей – «семантический граф». Семантический граф представляет собой ориентированный граф, вершинами которого являются слова русского языка, представленные в нормальной форме, а ребра характеризуются весом и типом семантической связи. Направление ребра зависит от типа семантической связи, например, дуга может соответствовать отношению «объект – действие», «объект – свойство», «действие – время». Для построения семантического графа каждое предложение из окна коллекции обрабатывается семантическим анализатором. В данной работе используется семантический анализатор RML (<http://www.aot.ru>).

Предложения окна обрабатываются последовательно, для каждого очередного предложения строится семантический граф G_{new} . Все ребра семантического графа G_{new} первоначально имеют вес равный единице. На каждой итерации семантический граф G_i предыдущей итерации объединяется с графом G_{new} обрабатываемого предложения, причем веса ребер нового графа G_{i+1} вычисляются как сумма весов ребер графов G_i и G_{new} , что приводит к увеличению весов однотипных ребер. После этого результирующий семантический граф G_{i+1} используется для следующей итерации.

После обработки всех предложений окна, веса ребер получившегося графа нормируются путем деления на общее количество семантических связей окна.

Для расчета коэффициента релевантности окна запроса и окна коллекции необходимо определить соответствие ребер графа окна и графа коллекции. Однако один и тот же смысл содержится в текстах разного

стилевого оформления, вершины графа запроса и графа окна коллекции могут быть не только синонимами, но и каким-либо образом связанными по смыслу словами, могут содержать обобщающие сведения или только частичную информацию. Например, при обработке запроса, связанного с поиском текста «хищные животные, обитающие в тайге» к хищникам, обитающим в тайге, в том числе относятся и лисы. Однако между хищниками и лисами не должно быть полного отождествления, т.к. хищники – это не только лисы. Отсюда возникает необходимость учета семантической зависимости при поиске соответствующих ребер графов.

Для поиска связанных по смыслу слов был использован словарь, полученный методом автоматической обработки краткого толкового словаря, в котором представлен перечень слов в нормальной форме [5]. Каждому слову сопоставлен набор слов, связанных с ним ассоциативной, синонимичной и т.д. связью. Таким образом, словарь представляет собой направленный граф $G_{\text{word}} = (V_{\text{word}}, U_{\text{word}})$, где вершины V_{word} - это слова в нормальной форме, а ребра U_{word} имеют действительные весовые коэффициенты от 0 до 1. Назовем граф G_{word} графом справочника. За коэффициент связанности слов a_k и a_m - вершин семантического графа запроса G_{request} и семантического графа окна коллекции G_{text} возьмем произведение весов от таких же слов до общего предка в графе G_{word} . При совпадении слов данный коэффициент будет равен 1, иначе будет принадлежать промежутку $[0;1]$, т.к. веса ребер графа G_{word} - действительные числа от 0 до 1.

Граф G_{word} является упрощенной моделью наших знаний о реальном мире, а общий предок слов a_k и a_m в этом графе представляет собой некоторое обобщение соответствующих понятий.

За коэффициент соответствия ребра графа G_{request} и ребра графа G_{text} возьмем произведение коэффициентов связности соответствующих вершин, при условии, что типы семантических связей ребер совпали. Иначе коэффициент соответствия ребер равен 0.

Значение коэффициента релевантности определяем по формуле 1:

$$S = \sum_{k=1}^n \text{MAX}_{t=1}^m (C_t^k l_k j_k), \quad (1)$$

где n – количество ребер графа G_{request} , m – количество ребер графа G_{text} , C_t^k – коэффициент соответствия ребра k графа G_{request} и ребра t графа G_{text} , l_k – вес ребра k семантического графа G_{request} , j_t – вес ребра t семантического графа G_{text} . Определив максимальное значение по всем окнам текстовой коллекции, получим общее значение – коэффициент релевантности запроса и текстовой коллекции.

Тесты и результаты. Для оценки полученной системы были отобраны текстовые коллекции большого объема, удовлетворяющие одному и тому же запросу к поисковой системе google.ru. Поисковый запрос строился исходя из содержания определенных коллекций. Для коллекций, по содержанию которых строился запрос или коллекций аналогичного содержания, значение коэффициента превосходило значение коэффициента других коллекций, отличающихся по содержанию.

Временные затраты на обработку коллекции в зависимости от количества слов в запросе и окне коллекции представлены на рисунке 1.

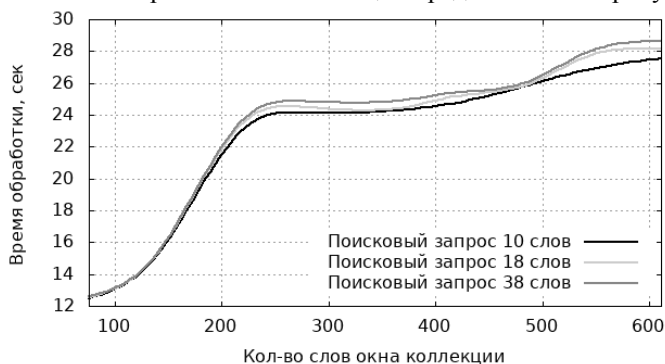


Рис. 1. Временные затраты

Так же было проведено тестирование с добавлением «шума», т.е. добавлением в текст окна предложений из других текстовых коллекций, не соответствующих запросу. Результаты отклонения коэффициента релевантности приведены на рисунке 2.

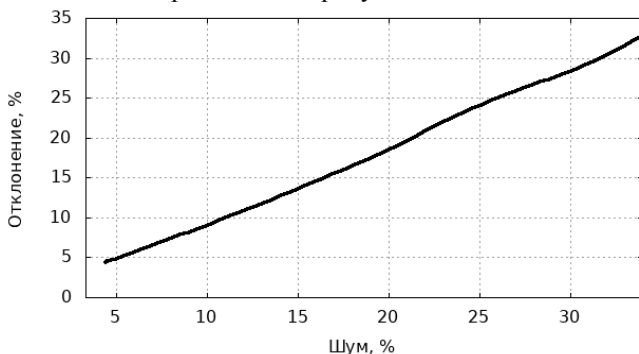


Рис. 2. Отклонение коэффициента релевантности из-за шума

Эксперименты показали, что отклонение коэффициента релевантности линейно возрастает с увеличением шума, т.е. алгоритм расчета коэффициента корректен и действительно отображает соответствие между окном коллекции и поисковым запросом.

Параллельная обработка окон текстовой коллекции на многопоточных и многопроцессорных системах выполняется параллельно, что значительно повышает скорость обработки запроса.

Библиографический список

1. Hannah Bast, Marjan Celikik Efficient Fuzzy Search in Large Text Collections // ACM Transactions on Information Systems, 2010.

2. Mathieu d'Aquin, Enrico Motta Watson, more than a Semantic Web search engine // IOS Press Amsterdam, 2011.

3. K. Elbedweihy, S.N. Wrigley, F. Ciravegna, D. Reinhard, A. Bernstein Evaluating Semantic Search Systems to Identify Future Directions of Research // Second International Workshop on Evaluation of Semantic Technologies, 843, page 25-36, 2012.

4. G. Tsoumakas, M. Laliotis, N. Markantonatos, I. Vlahavas Large-Scale Semantic Indexing of Biomedical Publications at BioASQ // BioASQ Workshop, 2013.

5. Крайванова В.А., Кротова А.О., Крючкова Е.Н. Построение взвешенного лексикона на основе лингвистических словарей // ЗОНТ-2011 : материалы Всероссийской конференции с международным участием. Т. 2. – Новосибирск, 2011. – С. 32–38

УДК 528.236

Пересчет объектов капитального строительства из региональных систем координат в систему координат World Geodetic System

С.И. Суханов

АлтГУ, г. Барнаул

В качестве объектов капитального строительства могут выступать волоконно-оптические линии связи, линии электропередач, электроподстанции, и т.д. У многих крупных предприятий энергетики данные объекты были поставлены на государственный кадастровый учет в нескольких регионах одновременно. В разных регионах России для ведения государственного кадастрового учета были приняты свои сис-

темы координат с обозначением (СК №), причем номер у каждого региона уникальный (для Алтайского края СК 22).

Необходимость инвентаризации объектов капитального строительства привела к созданию их единой базы. При создании базы было решено использовать общеземную (геоцентрическую) систему координат World Geodetic System (WGS-84).

Преобразования из местных систем координат (МСК) в WGS-84 зачастую вызывает серьезные проблемы из-за отсутствия ключей перехода к этим системам. В статье описывается методика преобразования координат из любой МСК в WGS-84.

Конечно, существует целый ряд способов решения данной задачи, но наиболее простой и корректный — использование файла описаний систем координат `mapinfow.prj` [1]. `Mapinfow.prj` это обычный текстовый файл, расположенный в каталоге `MapInfo`.

В данной статье описывается методика реализованная Д. Бирючковым в программе `set4msk.mbx` [2]. Алгоритм заключается в подборе осевого меридиана определенной зоны МСК. Для запуска алгоритма необходимо создать таблицу с проекцией, неважно в какой именно, с двумя точками А и В в районе меридиана М. Для примера, назовем ее `UTM.tab`. Также необходима таблица в системе координат «план-схема» с теми же двумя точками А, В и координатами в метрах — `MSK.tab`.

Затем выполняются следующие действия:

- открывается таблица в проекции `UTM.tab` и в «план-схеме» `MSK.tab` в программе `MapInfo`;
- запускаем программу `set4msk.mbx`;
- задаем погрешность E , например 3 сантиметра, для выполнения расчётов длин отрезков;
- заранее предполагая, что определяемая нами зона трехградусная, в таблице `UTM.tab` отодвигаемся на запад от меридиана М на 2 градуса.

Программа `set4msk.mbx` работает следующим образом: предварительно рассчитав расстояние R_{msk} между точками А и В в таблице `MSK.tab`. Затем от меридиана (М-2) смещаемся на восток всего на 3 градуса с шагом 1 минута. Для каждого шага устанавливается текущий меридиан в качестве осевого, и рассчитывается расстояние R_{prj} между точками А и В в таблице `UTM.tab`. Если $R_{msk} - R_{prj}$ меньше E , происходит смещение по долготе и широте. Текущее значение меридиан плюс смещения и есть претенденты на искомые параметры. Как только расстояние между точками в проекции сравнивается с расстоянием в «план-схеме», в рамках указанной точности, программа считает необ-

ходимые смещения по долготе-широте и выдает результат расчетов. В конце к файлу mapinfow.prj добавляется две строки с параметрами для MSK.tab.

Пересчитанные таблицы MapInfo открываются в программе «Google Earth», которая позволяет в интерактивном режиме отследить все объекты капитального строительства, имеющиеся у предприятия.

Библиографический список

1. MapInfo Professional Версия 8.5 Руководство пользователя 2006 [Электронный ресурс]. http://www.mapbasic.ru/soft/8.5/MI_UG.pdf.
2. Бирючков Д. Set4msk. Определение параметров МСК для MapInfow.prj [Электронный ресурс]. <http://www.mapbasic.ru/set4msk>.

УДК 519.8

О численной реализации метода максимума согласования для восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределённостью

С.П. Шарый, А.С. Кожемякина

*Институт вычислительных технологий СО РАН,
г. Новосибирск*

В работе рассматривается задача восстановления линейной зависимости по неточно измеренным данным (см., к примеру, [1–3]): в выражении

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \quad (*)$$

необходимо определить коэффициенты $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ по данному ряду значений a_i и b , известных с интервальной неопределённостью. Предположим, что интервалы \mathbf{a}_{ij} и \mathbf{b}_i представляют границы входных данных и выходных откликов модели, такие что $a_1 \in \mathbf{a}_{11}, a_2 \in \mathbf{a}_{12}, \dots, a_n \in \mathbf{a}_{1n}, b \in \mathbf{b}_1$ в i -ом эксперименте $i = 1, 2, \dots, m$. Требуется найти x_1, x_2, \dots, x_n , которые наилучшим образом соответствуют выбранной линейной зависимости (*) и имеющимся данным \mathbf{a}_{ij} и \mathbf{b}_i .

Примем следующее популярное определение: набор параметров x_1, x_2, \dots, x_n объекта, описываемого зависимостью (*), называется *согласованным* (совместным) с интервальными данными ($\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in}$) и $\mathbf{b}_i, i = 1, 2, \dots, m$, если для каждого i (т. е. для каждого наблюдения) в пределах измеренных интервалов существуют точечные представите-

ли a_{i1} из \mathbf{a}_{i1} , a_{i2} из \mathbf{a}_{i2} , ..., a_{in} из \mathbf{a}_{in} и b_i из \mathbf{b}_i , такие что выполнено равенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$.

Если $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ – интервальная $m \times n$ -матрица, составленная из m результатов измерений входов, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)$ – интервальный вектор m измерений выходов, то семейство всех векторов параметров $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, согласующихся с интервально заданными экспериментальными данными, может быть представлено в виде

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \text{существуют такие } A \text{ из } \mathbf{A} \text{ и } b \text{ из } \mathbf{b}, \text{ что } Ax = b \},$$

т.е. как множество решений всевозможных точечных систем $Ax = b$ с A из \mathbf{A} и b из \mathbf{b} . Оно называется *информационным множеством* задачи восстановления зависимостей. С другой стороны, это множество является, как известно, *множеством решений* интервальной линейной системы уравнений $Ax = \mathbf{b}$ [4, 6]. Обозначим его $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Для решения задачи восстановления зависимости рассматривается *метод максимума согласования*, предложенный в [3, 5]. В этом методе искомой оценкой параметров $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ берётся точка, доставляющая максимум *распознающего функционала* множества решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, который определяется как

$$\text{Uss}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^n (\text{rad } \mathbf{a}_{ij}) |x_j| - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n (\text{mid } \mathbf{a}_{ij}) x_j \right| \right\},$$

где “mid” и “rad” означают взятие середины интервала и его радиуса. Функционал Uss «распознаёт» точки из $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ знаком своих значений: $x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда $\text{Uss}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$. Кроме того, Uss имеет неплохие свойства как функция от x и \mathbf{A}, \mathbf{b} .

В работе рассматривается численная реализация метода максимума согласования, основанная на использовании алгоритмов негладкой оптимизации и переборе всех областей вогнутости функционала Uss. Обсуждаются пути дальнейшего развития метода.

Библиографический список

1. Вошинин А.П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // Заводская лаборатория. – 2002. – Т. 68, № 1. – С. 118–126.
2. Оскорбин Н.М., Максимов А.В., Жилин С.И. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределённости //

Известия Алтайского государственного университета. – 1998. – № 1. – С. 37–40.

3. Шарый С.П. Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределённостями // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 2. – С. 111–125.

4. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск: XYZ, 2014. – Электронная книга, доступная на <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks>

5. Шарый С.П., Шарая И.А. Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 13, № 3. – С. 80–109.

6. Neumaier A. Interval methods for systems of equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

Секция 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ, ЭКОНОМИЧЕСКИХ И ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 519.83

Нахождение множества оптимальных по Парето решений в игре двух лиц с неполной информацией

Г.И. Алгазин, Е.В. Матюнин

АлтГУ, г. Барнаул

В работе рассматривается игра двух лиц при условии неполной информированности участников, решение которой определяется в рамках нахождения стратегий, оптимальных по Парето.

Зададим игру двух лиц в нормальной форме в виде:

$$G = \langle N, x, k, w, g \rangle,$$

где $N = \{1, 2\}$ – множество игроков;

$k = (k_1, \dots, k_n)$ – вектор контролируемых параметров, где $k \in K \subset R$;

$w = (w_1, \dots, w_m)$ – вектор неконтролируемых параметров. Будем считать, что w_1, \dots, w_m – непрерывные случайные величины, распределенные в соответствии со своими плотностями распределения $f(w_1), \dots, f(w_m)$ на интервалах $[a_i, b_i]$ соответственно, где $a_i < b_i$, ($i=1, \dots, n$). Пусть $\langle \Omega, \Sigma, P \rangle$ – вероятностное пространство, тогда $w: \Omega \rightarrow R$ – измеримая относительно Σ борелевской σ – алгебры функция на R ;

$x = (x_1, x_2)$ – вектор стратегий игроков (в некоторых случаях возможно рассматривать данный вектор как часть множества контролируемых параметров).

Критерии эффективности игроков зададим в виде:

$$\begin{aligned} f_1 &= F_1(x_1, k_1, \dots, k_n, w_1, \dots, w_m) \rightarrow \max_{x_1}, \\ f_2 &= F_2(x_2, k_1, \dots, k_n, w_1, \dots, w_m) \rightarrow \max_{x_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Определим множество оптимальных по Парето решений для задачи (1). В случае рассмотрения моделей с неполной информацией, где неконтролируемые параметры являются непрерывными случайными ве-

личинами, стратегии игроков примут вид элементов функциональных пространств [1]. При этом множество Парето-оптимальных решений $(x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot))$ задается следующим образом: $(x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot)) : \forall x_1(\cdot), x_2(\cdot),$

$$F_1(x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot), k, w) \leq F_1(x_1(\cdot), x_2(\cdot), k, w), \quad F_2(x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot), k, w) \leq F_2(x_1(\cdot), x_2(\cdot), k, w),$$

где $x_1(\cdot) \in X_1 \subset C_{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]}^1$, $x_2(\cdot) \in X_2 \subset C_{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]}^1$ [2].

Зададим информационную обстановку рассматриваемой игры. Нахождение Парето-оптимальных решений не предполагает введения очередности хода игроков и, соответственно, информированности о выборе стратегий игроками. В данном случае участники игры имеют информацию о том, что принципом поведения является определение Парето-оптимальных решений. Игроки также владеют некоторой информацией о неконтролируемых параметрах, входящих в целевые функции [3].

Определим переговорное множество для игры двух лиц с неполной информацией в виде:

$$P = \{f_1(x_1(\cdot), x_2(\cdot)), f_2(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) : f_1 \leq L_1, f_2 \leq L_2\},$$

где \bar{L}_1 – гарантированный выигрыш первого игрока, \bar{L}_2 – гарантированный выигрыш второго игрока.

Определим нижнее значение переговорного множества как [4]:

$$\bar{L}_1 = \min_{x_1(\cdot) \in X_1} \max_{x_2 \leq \bar{x}_2} F_1(x_1(\cdot), x_2, k, w);$$

$$\bar{L}_2 = \min_{x_2(\cdot) \in X_2} \max_{x_1 \leq \bar{x}_1} F_2(x_1, x_2(\cdot), k, w).$$

Таким образом, для упрощения процедуры вычисления гарантированного результата будем считать, что внутренние максимумы \bar{L}_1 , \bar{L}_2 подсчитываются в предположении полной информированности соответствующих игроков. Тогда имеет место следующее выражение:

$$\bar{L}_1 \geq L_1;$$

$$\bar{L}_2 \geq L_2,$$

где $L_1 = \min_{\underline{x}_1 \leq x_1 \leq \bar{x}_1} \max_{x_2 \leq x_2 \leq \bar{x}_2} F_1(x_1, x_2, k, w)$, $L_2 = \min_{x_2 \leq x_2 \leq \bar{x}_2} \max_{\underline{x}_1 \leq x_1 \leq \bar{x}_1} F_2(x_1, x_2, k, w)$ – гарантированные выигрыши игроков в условиях полной информированности.

Запишем гарантированный результат первого игрока в следующей форме [5]:

$$L_1 = M_w [F_1(x_1(\cdot), x_2, k, w)].$$

Значение стратегии $x_1^*(\cdot)$ определяется решением следующей вариационной задачи:

$$\int_{w_1} \dots \int_{w_n} F_1(x_1(\cdot), x_2, k, w) d\Phi_1(w_1) \dots d\Phi_n(w_n) \rightarrow \min_{x_2(\cdot) \in X_2}, \quad (2)$$

где $\Phi_1(w_1), \dots, \Phi_n(w_n)$ – функции распределения непрерывных случайных величин w_1, \dots, w_n .

Необходимые условия оптимальности для задачи (2) записываются для одномерного случая в виде уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (F_1(x_1(\cdot), x_2, k, w)) - \frac{d}{dw} \frac{\partial}{\partial x_1} (F_1(x_1(\cdot), x_2, k, w)) = 0.$$

Для многомерной задачи вариационного исчисления в виде уравнения Эйлера-Остроградского, которое в общем случае записывается следующим образом:

$$F_{x_1(w)} + \frac{\partial}{\partial w_1} F_{x_1(w)w_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial w_n} F_{x_1(w)w_n} = 0.$$

Гарантированный результат второго игрока определяется как:

$$L_2 = M_w [F_2(x_1, x_2(\cdot), k, w)].$$

Нижнее значение для f_1 определим как $f_2^L = \int_w Z_1(k, w, L_1) d\Phi(w)$,

верхнее значение для f_2 определим как $f_1^H = \int_w Z_2(k, w, f_2^L) d\Phi(w)$, где

Z_1 и Z_2 – некоторые функция связи для f_1 и f_2 . Внутренние значения переговорного множества задаются в виде:

$$f_1^I = \int_w Z_2(k, w, f_2^I) d\Phi(w).$$

Таким образом, определив нижнее, верхнее и внутренние значения переговорного множества, мы получили множество Парето-оптимальных решений мощности континуум. Однозначной Парето-оптимальной стратегии при этом не существует. Чтобы получить согласованное решение, выбирается уровень уступки $\gamma \in [0, 1]$, с помощью которого осуществляется дележ совместного выигрыша [6]. При этом устойчивость решения обеспечивается либо механизмом обязующих соглашений, либо механизмом сильных штрафов.

Библиографический список

1. Жариков А.В. Нахождение равновесия Нэша в игре двух лиц для вариантов информационной структуры игроков // Обзорение прикладной и промышленной математики. – М., 2008. – Т. 15, вып. 3. – С. 470.
2. Matyunin E.V., Zharikov A.V. Decision Support problems under conditions of information asymmetry .Youth Academic Conference // Cur-

rent issues in modern economics: a fresh look and new solutions November 26-27, 2012. Publishers Tomsk University, 2013. – P. 161–166.

3. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

4. Матюнин Е.В., Жариков А.В. Математические модели принятия решений при асимметрии информированности // Анализ, геометрия и топология : труды всероссийской молодежной школы-семинара. – Барнаул, 2013. – С. 84–90.

5. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования: монография. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2005. – 250 с.

6. Мамченко О.П., Оскорбин Н.М. Моделирование иерархических систем. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2007. – 317 с.

УДК 004.021; 51.37

Численное решение задач теплового режима почв

А.В. Боярская, А.В. Кистанова

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматриваются алгоритм и численный метод решения двумерной задачи теплового режима почв с границей раздела между двумя участками с различными теплофизическими параметрами. На границе раздела почвенных компартментов задаются условия непрерывности температур и тепловых потоков. Для численного решения задачи применяется численный метод с использованием продольно-поперечной конечно-разностной схемы (метод переменных направлений).

Разработка математических моделей, корректно учитывающих процессы теплопереноса в почве, является сложной и актуальной задачей. Соседствующие почвенные массивы (выделенные единицы управления в рамках одного поля) характеризуются различными теплофизическими величинами (параметрами), которые, в свою очередь, зависят от соотношения твердой, жидкой и газообразной составляющих, текстурных и структурных особенностей грунтов, состояния влаги и температуры.

В подавляющем большинстве современные модели, описывающие продукционный процесс сельскохозяйственных растений, рассматривают однородный фиктивный посев, а стратификация его характеристик производится в единственном вертикальном направлении. В подобных моделях расчет производится отдельно для каждой опорной

точки поля с параметрами, характерными только для данного типа почвы. Все точки считаются независимыми друг от друга, и предполагается, что все окружение данной точки обладает теми же свойствами и, соответственно, никаких горизонтальных перетоков вещества и энергии не происходит [2, 4].

Для целей точного земледелия горизонтальная неоднородность поля является важнейшим фактором, влияющим на выбор агротехники и определяющим результат хозяйствования.

Рассмотрим двумерную модель теплового режима почвы.

Пусть неоднородный почвенный компартмент Ω состоит из двух участков (рисунок 1): $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где

$$\Omega_1 = \{-x_1 \leq x \leq 0; -H \leq y \leq 0\}, \quad \Omega_2 = \{0 \leq x \leq x_2; -H \leq y \leq 0\},$$

значительно отличающихся по влиянию характеристик поля на продукционный процесс посева и на движение почвенных растворов (в действительности свойства почвы меняются от точки к точке непрерывно). Границы участков Ω_1 и Ω_2 полагаются известными и прямолинейными.

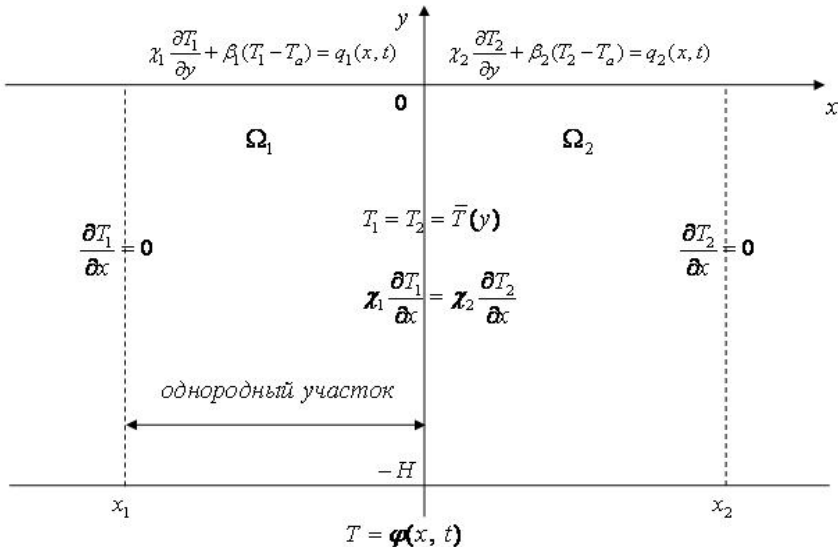


Рис. 1. Почвенный компартмент $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

Пусть система координат выбрана таким образом, что ось $0y$ проходит по границе раздела областей Ω_1 и Ω_2 . Функция T_1 определяет температуру почвы в области Ω_1 , а T_2 – температуру почвы в области Ω_2 . Тогда в силу почвенной однородности областей Ω_1 и Ω_2 можно записать условия:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 \text{ при } x = -x_1; \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0 \text{ при } x = x_2.$$

На границе раздела компартментов Ω_1 и Ω_2 ($x = 0$) должны выполняться условия непрерывности температур и тепловых потоков:

$$T_1 = T_2 \text{ и } \chi_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \chi_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \text{ при } x = 0.$$

Уравнения теплопереноса в двумерном случае будут иметь вид:

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) + f(x, y, t), \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Введем коэффициенты температуропроводности K_i : $K_i = \frac{\chi_i}{\rho_i c_i}$,

которые также будут функциями пространственных координат x , y , и перепишем уравнение (3) в следующем дивергентном виде:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_i c_i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \chi_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho_i c_i} \left(\frac{\partial}{\partial y} \chi_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho_i c_i} f(x, y, t), \quad i = 1, 2.$$

Для численного решения уравнения (4) применяется численный метод с использованием продольно-поперечной конечно-разностной схемы (метод переменных направлений). Согласно [1, 3], схема расчета для областей Ω_1 и Ω_2 записывается в следующем общем виде:

$$\frac{T^{k+\frac{1}{2}} - T^k}{0.5 \cdot \Delta t} = [K T_x]_x^k + [K T_y]_y^{k+1/2} + F^k,$$

$$\frac{T^{k+1} - T^{k+\frac{1}{2}}}{0.5 \cdot \Delta t} = [K T_x]_x^{k+1} + [K T_y]_y^{k+1/2} + F^k.$$

Здесь $F = \frac{K}{\rho c} \left[\frac{\partial(\rho c)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{1}{\rho c} f(x, y, t)$, Δt – шаг по времени.

Для реализации представленной схемы для каждой области Ω_i , $i = 1, 2$ вводится равномерная разностная сетка (x_n, y_m) . Значения сеточной функции $T(x, y, t)$ в узлах сетки обозначим $T_{n,m}^k = T(x_n, y_m, t^k)$. При этом используется следующая разностная аппроксимация для слагаемых:

$$[KT_x]_x \approx \bar{K}_{n+1} \frac{T_{n+1,m} - T_{n,m}}{h_x^2} - \bar{K}_n \frac{T_{n,m} - T_{n-1,m}}{h_x^2}.$$

Здесь $\bar{K}_{n+1} = K_{n+1/2,m}$, $K_{n+1/2,m} = K(x_{n+1/2}, y_m)$,

$$x_{n+1/2} = x_n + 0.5h_x, \quad h_x = h_1 \text{ или } h_x = h_2.$$

В результате требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -a_{n,m} T_{n,m-1}^{k+1/2} + b_{n,m} T_{n,m}^{k+1/2} - c_{n,m} T_{n,m+1}^{k+1/2} &= d_{n,m}, \\ -a_{n,m} T_{n-1,m}^{k+1} + b_{n,m} T_{n,m}^{k+1} - c_{n,m} T_{n+1,m}^{k+1} &= d_{n,m}, \end{aligned}$$

соответствующую (4). Данные системы решаются методом прогонки. При этом в направлении y используется обычный вариант данного метода [1].

Для определения T_1 и T_2 на слое $(k+1)$ используем условия непрерывности температур и тепловых потоков на границе раздела (2) и представление решения (т.е. температуры в каждой из областей) в таком виде, когда $(T_1)_{n,m}$ и $(T_2)_{n,m}$ выражаются через неизвестные значения температуры $(T_1)_{N_1,m} = (T_2)_{1,m}$ на границе раздела $x = 0$. Представления вида

$$(T_1)_{n,m} = \beta_{n,m}^1 + \gamma_{n,m}^1 \cdot \bar{T}_m, \quad (T_2)_{n,m} = \beta_{n,m}^2 + \gamma_{n,m}^2 \cdot \bar{T}_m,$$

где \bar{T}_m – температура на границе раздела областей Ω_1 и Ω_2 , позволяют организовать своеобразную прогонку с параметрами, коими являются граничные значения температуры \bar{T}_m , и найти сначала сами

эти значения, а затем и распределение температуры в областях Ω_1 и Ω_2 .

Общая схема численного решения задачи состоит в осуществлении следующих этапов.

1. Переход на новый временной слой t^{k+1} начинается с расчета температуры $T_1^{k+\frac{1}{2}}$ и $T_2^{k+\frac{1}{2}}$ на промежуточном временном слое $t^{k+\frac{1}{2}}$.

Расчет производится в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 .

2. Затем, с помощью прогонки с параметрами, вычисляются значения температур T_i^{k+1} , $i = 1, 2$, на слое $(k+1)$ одновременно в обеих областях Ω_1 и Ω_2 .

При расчете теплового поля суточные колебания температуры почвы затухают уже на глубине 40–60 см; сезонные же изменения распространяются на значительно большую глубину [4, 5]. В модели нижнюю границу поместили на расстоянии 160 см от поверхности почвы. Это объясняется наличием экспериментальных данных и отсутствием суточного хода температуры. Поэтому нижнее граничное условие по температуре на этой глубине внутри каждых суток считается постоянным.

Численный алгоритм решения задачи реализован для неоднородного почвенного компартмента. Полученные результаты хорошо согласуются с данными по теплофизическим свойствам выщелоченных черноземов Алтайского Приобья. Они близки как по значениям, так и по характеру зависимостей, и отражают объективные почвенно-физические факторы. Результаты моделирования отражают динамику распределения температур по почвенному профилю в течение суток и в течение года. По результатам проведенных расчетов получены следующие выводы:

- коэффициент объемной теплоемкости линейно растет при увеличении влажности;
- коэффициент температуропроводности с увеличением влажности до некоторой пороговой величины возрастает, затем убывает;
- теплофизические свойства почвы закономерно изменяются в зависимости от плотности сложения генетических горизонтов.

Таким образом, применение предложенных аппроксимирующих функций теплофизических параметров почвы и модели в целом,

позволит не только существенно сократить объем экспериментальных исследований, но и получать новые знания в процессе исследования.

Библиографический список

1. Гончарова О.Н. Моделирование микроконвекции в жидкости, заключенной между теплопроводными массивами // ПМТФ. – 2011. – Т. 52, № 1. – С. 84–91.
2. Хворова Л.А. Математические модели в теории и практике точного земледелия // Известия АлтГУ. – 2011. – №2. – С. 123–128.
3. Хворова Л.А. Модель теплового режима почвы в пространственно-дифференцированных технологиях точного земледелия // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2011. – №4(128). – С. 101–106.
4. Хворова Л.А., Топаж А.Г. Динамическое моделирование и прогнозирование в агрометеорологии. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2010. – 263 с.
5. Хворова Л.А., Жариков А.В. Численное моделирование составляющих теплового режима почв Алтайского Приобья // Известия АлтГУ. – 2013. – № 1/2. – С. 126–130.

УДК 519.216.3

Численный метод расчета полезности инвестиционных проектов после проведения экспертизы

Е.В. Данько

АлтГУ, г. Барнаул

Рассмотрим задачу с условиями, определенными в [1]. Исходный отрезок неопределенности $[a; b]$ для величины NPV после проведения экспертизы делится на три области: $[a; a_1^{Un}]$, $[a_1^{Un}; b_1^{Un}]$, $[b_1^{Un}; b]$.

Для вычисления полезностей всех решений, шаг разбиения отрезка $[a; b]$ обозначим как h . Значение h выберем таким образом, чтобы получалось целое число отрезков длиной h внутри $[a; b]$. При таком подходе, разбиение отрезка $[a; b]$ можно рассмотреть с двух сторон: $x_j^a = a + (j-1) \cdot h, j = 1, 2, \dots, N$; $x_j^b = b - (j-1) \cdot h, j = 1, 2, \dots, N$.

В случае а), значения a_1^{Un} и b_1^{Un} , вычисленные по формулам заменяются их численными оценками следующим образом: при

$x_j^a < a_1^{Un}$; $x_{j+1}^a > a_1^{Un}$, обозначим $x_j^a = a_1^{Un}$; при $x_j^a < b_1^{Un}$; $x_{j+1}^a > b_1^{Un}$, обозначим $x_j^a = b_1^{Un}$. Для случая б), численные оценки получим так: при $x_j^b > a_1^{Un}$; $x_{j+1}^b < a_1^{Un}$, обозначим $x_j^b = a_1^{Un}$; при $x_j^b > b_1^{Un}$; $x_{j+1}^b < b_1^{Un}$, обозначим $x_j^b = b_1^{Un}$.

При использовании дискретной модели а), априорную полезность для области $[a; a_1^{Un}]$ вычислим так: $J_R^{aE} = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} J_j^{aR} \cdot \int_a^{a_1^{Un}} p(x) dx$;

$$N_1 = \frac{a_1^{Un} - a}{h}; J_j^{aR} = -\beta \cdot \frac{1}{k_j} \int_{x_j^a}^{x_{j+1}^a} xp(x) dx, k_j = \int_{x_j^a}^{x_{j+1}^a} p(x) dx.$$

Для этой же области при расчете по сетке б) имеем:

$$J_R^{bE} = \frac{1}{N - N_2} \sum_{j=N_2}^N J_j^{bR} \cdot \int_a^{a_1^{Un}} p(x) dx; N_2 = \frac{b - a_1^{Un}}{h};$$

$$J_j^{bR} = -\beta \cdot \frac{1}{k_j} \int_{x_{j+1}^b}^{x_j^b} xp(x) dx, k_j = \int_{x_{j+1}^b}^{x_j^b} p(x) dx.$$

Априорную полезность для области $[b_1^{Un}; b]$ при использовании моделей а) и б) соответственно вычислим так:

$$J_A^{aE} = \frac{1}{N - N_2} \sum_{j=N_2}^N J_j^{aA} \cdot \int_{b_1^{Un}}^b p(x) dx, N_2 = \frac{b_1^{Un} - a}{h}; J_j^{aA} = \frac{1}{k_j} \int_{x_j^a}^{x_{j+1}^a} xp(x) dx, k_j = \int_{x_j^a}^{x_{j+1}^a} p(x) dx.$$

$$J_A^{bE} = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} J_j^{bA} \int_{b_1^{Un}}^b p(x) dx, N_1 = \frac{b - b_1^{Un}}{h}; J_j^{bA} = \frac{1}{k_j} \int_{x_j^b}^{x_{j+1}^b} xp(x) dx, k_j = \int_{x_j^b}^{x_{j+1}^b} p(x) dx.$$

Априорные полезности для принятия и отклонения области $[a_1^{Un}; b_1^{Un}]$ согласно сеткам а) и б) вычислим так:

$$J_{a(b)UnA}^E = \frac{1}{N_2 - N_1} \sum_{j=N_1}^{N_2} J_j^{a(b)UnA}, J_{a(b)UnR}^E = \frac{1}{N_2 - N_1} \sum_{j=N_1}^{N_2} J_j^{a(b)UnR}$$

$$J_j^{a(b)UnA[R]} = (1 + \beta)[- \beta] \int_{x_j^a(x_{j+1}^b)}^0 xp(x) dx + [- \gamma] \int_0^{x_{j+1}^a(x_j^b)} xp(x) dx, \text{ если } \begin{cases} x_j^a(x_{j+1}^b) < 0, \\ x_{j+1}^a(x_j^b) > 0; \end{cases}$$

$$J_j^{a(b)UnA[R]} = (1 + \beta)[- \beta] \frac{C}{Z}, \text{ если } \begin{cases} x_j^a(x_{j+1}^b) < 0, \\ x_{j+1}^a(x_j^b) \leq 0; \end{cases} C = \int_{x_j^a(x_{j+1}^b)}^{x_{j+1}^a(x_j^b)} xp(x) dx, Z = \int_{x_j^a(x_{j+1}^b)}^{x_{j+1}^a(x_j^b)} p(x) dx.$$

$$J_j^{a(b)UnA[R]} = [-\gamma] \frac{X}{S}, \text{ если } \begin{cases} x_j^a(x_{j+1}^b) \geq 0, \\ x_{j+1}^a(x_j^b) > 0; \end{cases} X = \int_{x_j^a(x_{j+1}^b)}^{x_{j+1}^a(x_j^b)} xp(x)dx; S = \int_{x_j^a(x_{j+1}^b)}^{x_{j+1}^a(x_j^b)} p(x)dx.$$

Функция полезности для всех введенных формул определена в [2]. Полезность проекта после экспертизы по сеткам а), б) находится так:

$$J_a^E = J_A^{aE} + J_R^{aE} + \max(J_{aUnA}^E; J_{aUnR}^E); J_b^E = J_A^{bE} + J_R^{bE} + \max(J_{bUnA}^E; J_{bUnR}^E).$$

Среднее арифметическое значений J_a^E и J_b^E определит полезность J^E представленным численным методом.

Библиографический список

1. Данько Е. В. Об ожидаемой полезности инвестиционной экспертизы // Труды всероссийской молодежной школы-семинара «Анализ, геометрия и топология» (Барнаул, 2–4 октября, 2013) : в 2 ч. – Барнаул : ИП Колмогоров И.А., 2013. – Ч. 2. – С. 41–46.

2. Боговиз А.В., Данько Е. В., Оскорбин Н.М. О функции ожидаемой полезности инвестиционных проектов в условиях риска // [Электронный ресурс]. Режим ссылки: http://www.ukrnauka.ru/DN/28-03-2012_A4_tom-82.pdf.

УДК: 51-7+556

Анализ морфодинамики береговой линии Новосибирского водохранилища

В.В. Журавлева, Т.В. Дьякова

АлтГУ, г. Барнаул

В России создано более 2 тысяч водохранилищ, ресурсы которых используются в интересах гидроэнергетики, водоснабжения, водного транспорта, сельского хозяйства, рыбного хозяйства и др. Актуальность задач моделирования и исследования транспорта наносов на береговой линии водохранилищ связана со значимостью экологического и социально-экономического ущерба, который наносится естественным разрушением берегов водохранилищ [1].

В данной работе рассматриваются ведущие процессы формирования берегов водохранилищ и их модели, реализованные в приложении «Береговой Инженерный Калькулятор» (ИВЭП СО РАН). Объект ис-

следования – сегмент правого берега Новосибирского водохранилища около с. Быстровка (разбит на четыре участка различной экспозиции).

По каждому из активных румбов был произведен расчет параметров волн. При определении волновых нагрузок использованы данные для повторяемости ветра по градациям скорости и активным румбам за период с 1990 г. по 2010 г., полученные в работе [2]. С использованием этих данных для каждого участка береговой линии были рассчитаны годовые емкости потока наносов по направлениям (слева-направо и справа-налево) и итоговое значение емкости в интервале крупности транспортируемого материала 0,1–1 мм. Результаты отражены на рисунке 1. По мере движения от 1-го участка к 4-му происходит уменьшение потока наносов. Причем значения всех потоков отрицательны, что приводит к накоплению излишнего материала в береговой зоне (аккумуляции).

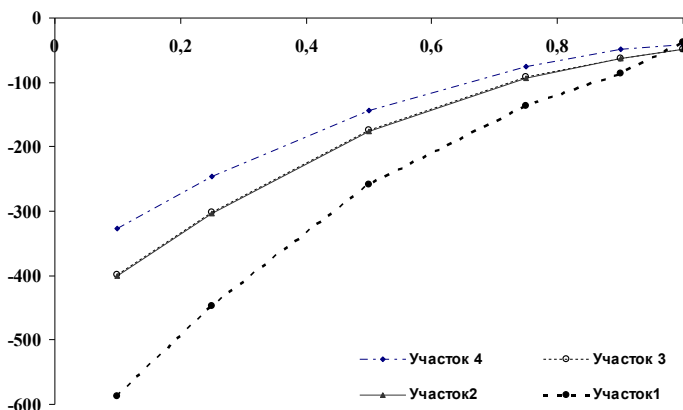


Рис. 1. Емкости среднего годового потока наносов (м³/год) по участкам при различной крупности материала (1990–2010 гг.)

Интенсивность процессов размыва и аккумуляции оценивается величиной удельного дефицита вдольберегового потока наносов [1]:

$$dq = (Q_{вх} - Q_{вых})/L,$$

где dq – удельный дефицит (–) или профицит (+) потока наносов, м³/(год·м); L – длина участка, м; $Q_{вх}$ и $Q_{вых}$ – емкости результирующего потока наносов на входе и выходе с участка, м³/год.

Значения удельного дефицита вдольберегового потока наносов по участкам при некоторых значениях крупности материала приведены в таблице 1. На участках 2 и 4 значения удельного дефицита вдольберегового потока наносов положительные, что соответствует аккумуляции материала. Размер величин позволяет сделать вывод, что отложение нано-

сов невелико. Участок 3 практически стабилен. Полученные результаты достаточно хорошо согласуются с наблюдениями.

Таблица 1

Удельный дефицит вдольберегового
потока наносов (1990–2010 гг.)

d_{50} , мм	Участок 2			Участок 3			Участок 4		
	$Q_{вх}$	$Q_{вых}$	dq	$Q_{вх}$	$Q_{вых}$	dq	$Q_{вх}$	$Q_{вых}$	dq
0,10	588	400	0,194	400	399	0,001	399	327	0,116
0,25	447	304	0,148	304	302	0,002	302	247	0,089
0,50	258	176	0,085	176	175	0,001	175	144	0,050
0,75	137	94	0,044	94	91	0,003	91	75	0,026
1,00	38	49	-0,011	49	49	0,000	49	41	0,013

Результаты расчетов сравнивались с аналогичными для периода 1959–1986 гг. Величины среднегодовых емкостей потока наносов, рассчитанные за этот период, на порядок превосходят значения за период 1990–2010 г.г. и, кроме того, имеют противоположное направление (что соответствует процессам размыва берега).

Таким образом, сделан вывод о существенном замедлении процессов размыва берега Новосибирского водохранилища в районе с. Быстровка.

Библиографический список

1. Хабидов А.Ш., Леонтьев И.О., Марусин К.В., Шлычков В.Л., Савкин В.М., Кусковский В.С. Управление состоянием берегов водохранилищ. – Н-ск: Изд-во СО РАН. – 2009.
2. Журавлева В.В., Дьякова Т.В. Исследование повторяемости ветров на Новосибирском водохранилище // Известия АГУ. – 2012. – №1/2(73).

Оценка точности измерения технологической эффективности производственной системы на основе DEA-моделей

Д.В. Курочкин, Е.В. Понькина
АлтГУ, г. Барнаул

Непараметрический метод обволакивающей поверхности (*Data Envelopment Analysis – DEA*) предложен в 1978 г. [1] и получил широкое распространение в экономических исследованиях для оценки экономической эффективности производственных систем. DEA основан на приближении границы эффективности линейной комбинацией входов и выходов путем решения совокупности задач математического программирования. В качестве целевой функции моделей рассматривается показатель продуктивности факторов производства (*Total Factor Productivity – FTP*) как отношение линейной комбинации выходов и входов:

$$TFP_o = \frac{\text{взвешанные выходы}}{\text{взвешанные входы}} = \frac{\sum_{r=1}^R v_r y_{or}}{\sum_{s=0}^S u_s x_{os}} \rightarrow \max_{(v_r, u_s) \in Q_o} . \quad (1)$$

Задача максимизации функционала (1) при гипотезе о том, что для сравниваемых объектов выполнено условие $TFP_j \leq 1$, образует базовую модель оценки эффективности (CCR-model), названную в честь авторов А. Чарнза (*A. Charnes*), У. Купера (*W. Cooper*) и Е. Родоса (*E. Rhodes*) [1]:

$$E_o = h_o(v, u) = \frac{\sum_{r=1}^R v_r y_{or}}{\sum_{s=0}^S u_s x_{os}} \rightarrow \max_{(v_r, u_s) \in Q_o} , \quad (2)$$

$$Q_o = \left\{ (u, v) \in R_+^S \times R_+^R : 0 < \varepsilon \leq \frac{\sum_{r=1}^R v_r y_{jr}}{\sum_{s=0}^S u_s x_{js}} \leq 1; j = 1, \dots, n \right\} ,$$

где y_{jr} , x_{js} – наблюдаемые для j -го объекта выходы и входы; u_s, v_r – переменные, характеризующие вес каждого входа и выхода в общей эффективности; ε – малое положительное число.

Проблемы решения задачи (2) заключаются в дробно-линейности целевой функции, в связи с этим получена трансформация модели (2) в эквивалентную модель линейного программирования при условии

$\sum_{s=0}^S v_s x_{os} = 1$ позволила получить CCR-input модель вида:

$$Z_o = \sum_{r=1}^R u_r y_{or} \rightarrow \max_{(u,v) \in Q_o}, \quad (3)$$

$$Q_o = \left\{ (u, v) \in R_+^R \times R_+^S : \sum_{r=1}^R u_r y_{jr} - \sum_{s=1}^S v_s x_{js} \leq 0; \sum_{s=1}^S v_s x_{os} = 1; j = 1, \dots, n \right\}.$$

Решение задач (3) позволяет получить оценку технологической эффективности объектов по Фарреллу при гипотезе детерминированной природы отклонений от границы эффективности.

В литературе показано, что точность оценки эффективности на основе DEA-моделей существенно зависит от способа измерения входов и выходов, кроме того при наличии в выборке объектов существенно различающихся по масштабам производства уровень эффективности подвержен эффекту убывающей отдачи. Обзор литературы, освещающий вопросы применения DEA-моделей для оценки эффективности хозяйствующих объектов показал разнообразие подходов к измерению входов и выходов. Однако среди общего многообразия выделяются два способа: измерение входов и выходов в исходном масштабе и приведение входов и выходов на единицу масштаба производства. Ранее авторами выполнен сравнительный анализ двух способов использования исходных данных для оценки эффективности сельскохозяйственного производства [2, 3]. Первый – измерение входов и выходов приведено в расчете на 1 га площади посева (на единицу масштаба деятельности в растениеводстве). Второй – оценка эффективности с учетом фактических масштабов производства (показатели на всю площадь). Сравнительный анализ двух вариантов расчета показал, что граница эффективности – зависимость граничной продуктивности от граничных затрат на производство – более четко сформирована при учете масштабов производства и можно утверждать, что данные оценки более объективны. Кроме того, группировка предприятий в этом случае более объективно отражает их упорядочивание по величине рентабельности. Поэтому предпочтительным вариантом формирова-

ния исходных данных является их измерение в исходном масштабе деятельности.

Целью работы является оценка точности измерения технологической эффективности при использовании следующих форм измерений: В1 – измерение в исходном масштабе (x, y) и В2 – измерение в расчете на единицу выхода ($x/y; 1$). Для исследования рассмотрим 10 объектов с различными комбинациями входов и выходов (табл. 1). Предположим, что граница эффективности этих объектов описывается в соответствии с производственной функцией Кобба-Дугласа вида:

$$y = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{2}{5}}. \quad (4)$$

Исходные данные сформированы таким образом, чтобы пять объектов были точно расположены на границе эффективности и являлись технологически эффективными, а остальные пять объектов неэффективны и расположены вне границы, при этом все объекты имеют различный масштаб производства (от единицы выпуска, до 500). Базовой моделью оценки эффективности выступает CCR-Input (3). Главный исследовательский вопрос заключается в том, чтобы оценить влияние существенной вариации входов и выходов и способа измерения входных данных на оценку технологической эффективности на основе модели CCR-Input.

Таблица 1

Экспериментальные данные

№	В1: исходный масштаб производства			В2: масштабирование в расчете на единицу выхода		
	x1	x2	y	x1/y	x2/y	y/y
1	1,0	1,0	1	0,98	1,02	1
2	9,9	10,2	10	0,99	1,02	1
3	49,6	50,5	50	0,99	1,01	1
4	99,6	100,5	100	1,00	1,01	1
5	500,0	500,0	500	1,00	1,00	1
6	1,0	1,0	1	1,00	1,01	1
7	9,9	10,2	10	0,99	1,02	1
8	55,6	56,5	50	1,11	1,13	1
9	124,6	125,5	100	1,25	1,26	1
10	650,0	650,0	500	1,30	1,30	1
Максимум	650	650	500	1,3	1,3	1,0
Минимум	1	1	1	1,0	1,0	1,0
Среднее	150,1	150,5	132,2	1,1	1,1	1,0

Вариация	154%	153%	149%	11%	11%	0%
-----------------	-------------	-------------	-------------	------------	------------	-----------

Результаты расчета технологической эффективности приведены в таблице 2.

Таблица 2

Результаты оценки технологической эффективности (ТЕ)
на основе модели CCR-Input

№	Фактическая ТЕ	В1		В2	
		ТЕ	Погрешность	ТЕ	Погрешность
1	1	1	0	1	0
2	1	1	0	1	0
3	1	1	0	1	0
4	1	1	0	1	0
5	1	1	0	1	0
6	0,993	0,993	2,3E-06	0,993	-8,5E-06
7	0,999	0,999	8,9E-06	0,999	-8,9E-06
8	0,893	0,893	1,5E-06	0,893	-3,4E-06
9	0,800	0,800	1,3E-06	0,800	-7,6E-06
10	0,769	0,769	-2,1E-13	0,769	3,0E-13

Анализ результатов показал, что, во-первых, идентификация объектов, лежащих на границе, выполнена точно при обоих подходах подготовки данных, во-вторых, при использовании исходных данных с учетом масштабов деятельности оценки эффективности точнее. Таким образом, измерение входов и выходов в исходном масштабе является предпочтительным, т.к. в этом случае более корректно учитываются различия в масштабах деятельности и точность оценок выше.

Библиографический список

1. Charnes A., Cooper W., Rhodes E. Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*. 1978. Vol. 2. Pp. 429–444.
2. Понькина Е.В., Курочкин Д.В. Практико-ориентированное DEA-моделирование эффективности производства зерна // *Вестник Алтайского государственного аграрного университета*. – 2013. – № 9 (107). – С. 133-139.
3. Лобова С.В., Понькина Е.В. Практические аспекты измерения эффективности производства зерна на основе методологии DEA // *Финансовая аналитика: проблемы и решения*. – 2013. – №44(182). – С. 2-10.

Прогнозирование стоимости фирмы в условиях неопределенности

Н.А. Липинский
АлтГУ, г. Барнаул

Безрисковое вложение средств подразумевает, что инвестор гарантировано получит доход. Абсолютно безрисковых вложений не бывает, поэтому можно говорить лишь об относительном отсутствии риска. В качестве безрисковой ставки обычно используется ставка дохода по долгосрочным государственным долговым обязательствам [1]. Также возможно использование ставки по депозитам наиболее надежных банков страны. При оценке стоимости компании следует учитывать риски в ставке дисконтирования или риски в денежных потоках.

Чем выше доход компании, тем больше, при равных условиях, ее рыночная стоимость. Также чем больше прибыль, тем меньше риск банкротства, при стабильной работе предприятия.

При оценке стоимости компании специфические особенности ее бизнеса могут быть отражены либо в денежном потоке, либо в ставке дисконтирования. При этом на первый план выходит валютный риск. В экономической науке были выработаны два альтернативных способа учета влияния валютного риска на стоимость компании [2]:

1. Учет валютного риска в ставке дисконтирования.
2. Учет валютного риска в денежных потоках.

Для первого подхода было проведено множество эмпирических исследований. В одних эмпирических исследованиях была обнаружена положительная зависимость между рыночными доходностями акций и колебаниями валютного курса. В других работах связь между аналогичными показателями для других компаний и других временных интервалов оказалась отрицательной. В третьей группе исследований связи не было выявлено.

Второй метод подходит в том случае, когда денежные потоки в национальной валюте фиксированы и не зависят от валютного курса.

Неопределенность будущих валютных курсов, учтенная в денежных потоках, приводит к размытой оценке стоимости компании, что вызвано влиянием валютного риска на стоимость компании.

В докладе представлена математическая модель стоимости компании, основанная на дисконтировании денежных потоков, свободных к распределению между всеми инвесторами компании.

Модель сосредотачивает в себе полную информацию о деятельности компании, а также о ее подверженности различного рода рискам, в том числе и валютному. Дается обоснование, что методологически верным и удобным с точки зрения риск-менеджмента способом учета валютного риска является оценка подверженных валютному риску денежных потоков на основе прогнозных валютных курсов, в связи с тем, что в прогнозируемом валютном курсе заложена оценка самого валютного риска [3].

Библиографический список

1. Кожевникова Е.А. Доходный метод: что нужно учесть? // Справочник экономиста. – 2012. – № 6. – С. 15-27.
2. Бобровская М.С. Оценка влияния валютного риска на стоимость - компании // Корпоративные финансы. – 2012. – №1(21). – С. 71–83.
3. Липинский Н.А. Влияние рисков на оценку стоимости фирмы // Анализ, геометрия и топология : материалы Всероссийской молодежной школы-семинара. Барнаул, 2-4 октября 2013. – Барнаул, 2013. – С. 73-79

УДК 519

О проблемах создания динамических моделей в системе Anylogic на примере модели симбиотической фиксации азота

Ю.Б. Лямкина
АлтГУ, г. Барнаул

Азот является абсолютно необходимым элементом для всех живых организмов. Основным резервуаром азота служит земная атмосфера. Наибольший вклад в биологическую азотфиксацию вносят клубеньковые бактерии (ризобии).

Фиксация азота в симбиотических азотфиксирующих системах осуществляется в результате сложного взаимодействия микроорганизма и высшего растения.

Симбиотическая азотфиксация играет существенную роль в обеспечении бобовых культур, связанных азотом. Азотфиксирующая система – сложная динамическая система, а сам процесс симбиотической фиксации азота является результатом действия большого числа процессов. Первая в отечественной литературе модель симбиотической фиксации азота соей разработана В.И. Чуприниным [1]. Используя теоретические основы, заложенные в [1], была разработана и реали-

зована модель симбиотической фиксации азота клубеньковыми тканями корней люцерны [2]. Модель описана в статье [3].

Для создания модели симбиотической фиксации азота будет применена система имитационного моделирования AnyLogic.

Пакет AnyLogic – отечественный профессиональный инструмент нового поколения, который предназначен для разработки и исследования имитационных моделей.

AnyLogic был разработан на основе новых идей в области информационных технологий, теории параллельных взаимодействующих процессов и теории гибридных систем. Благодаря этим идеям чрезвычайно упрощается построение сложных имитационных моделей, имеется возможность использования одного инструмента при изучении различных стилей моделирования [4].

Задача исследования – разработка блока минерального питания сои, включающего модель процесса симбиотической фиксации азота, в системе AnyLogic.

Библиографический список

1. Чупринин В.Г. Модель фиксации молекулярного азота для оптимизации пищевого режима сои на орошении // Режимы орошения и способы полива сельскохозяйственных культур на Северном Кавказе. – Новочеркасск, 1983.
2. Хворова, Л.А. Моделирование влияния азотного питания на продукционный процесс посева люцерны : дисс. ... к.т.н. – СПб, 1992.
3. Лямкина Ю.Б. Моделирование продукционного процесса бобовых растений на примере сои // Известия АлтГУ, 2010. – №1. – С. 93–96.
4. Киселева М.В. Имитационное моделирование в системе Anylogic : учебно-методическое пособие. – Екатеринбург, УГТУ-УПИ, 2009.

УДК 519.8

Институциональные факторы при моделировании товарных рынков

А.С. Маничева, П.В. Комаров

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается товарный рынок, представляющий собой социально-экономическую систему, доступ в которую сопряжен с преодолением

ем барьеров, под которыми понимаются различные экономические, институциональные и прочие факторы. Под институциональными факторами в экономической литературе понимается группа факторов, связанных с управлением, регулированием отдельных сфер и областей, экономических и общественных отношений.

Влияние входных барьеров на функционирование участников рынка исследовалось ранее в работах [1, 2].

Воздействие институциональной среды на функционирование социально-экономических систем может быть прямым (объем субсидий, ставки субсидий на производство продукции) или косвенным (развитие инфраструктуры транспортного сообщения способствует увеличению торговой активности).

С позиции системного подхода рассматриваемая социально-экономическая система описывается конструктом вида:

$$CES = \langle W, X, Y, f(\cdot) \rangle, \quad (1)$$

где W – множество факторов, оказывающих существенное воздействие на результат функционирования системы, $W = \{w \in R^N : w \in [\underline{w}, \bar{w}]\}$, $[\underline{w}, \bar{w}]$ – интервал определенности факторов; X – множество вариантов решений по управлению системой; $X(w) = \{x \in R^L : G(x, w) = 1\}$, $w \in W$ – множество решений при определенном состоянии факторов внешней среды; $Y = \{y \in R^K : y = f(x, w), \forall x(w) \in X(w), \forall w \in W\}$ – множество результатов функционирования системы.

Множество W содержит как институциональные, так и неинституциональные факторы. Институциональные факторы оказывают влияние на систему и препятствуют входу на товарные рынки новых участников со стороны государственного и муниципального управления, социальных институтов, финансово-экономической сферы, сферы безопасности и страхования рисков, рыночной инфраструктуры.

Анализ институциональных и прочих факторов на основе предложенной модели (1) позволит выбрать параметры, необходимые для дальнейшего исследования товарных рынков и влияния входных барьеров на функционирование участников рынка.

Библиографический список

1. Понькина Е.В., Маничева А.С., Комаров П.В. Модель рассредоточенного рынка с барьерами на вход // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – №1/2 (73). – С. 104-109.

2. Маничева А.С., Комаров П.В. Частный случай модели рассредоточенного рынка с барьерами на вход // МАК-2013 : сборник трудов

УДК 519.677, 519.688

Решение задачи параметрической идентификации динамических моделей продуктивности агроэкосистем

*К.А. Немчикова, Л.А. Хворова**АлтГУ, г. Барнаул*

1. Постановка задачи параметрической идентификации

Пусть $\mathfrak{Z} = \overline{\mathfrak{Z}}(X, S, P, \Sigma, L)$ – упрощенный образ системы (модель), $x_i \in X$, $i = \overline{1, n_x}$ – совокупность входных переменных; $s_i \in S$, $i = \overline{1, n_s}$ – совокупность переменных состояния модели; $p_i \in P$, $i = \overline{1, n_p}$ – совокупность параметров модели; $\sigma_i \in \Sigma$, $i = \overline{1, n_\sigma}$ – совокупность внутренних связей в модели между переменными (структура модели). Функция $L = \{L_1, \dots, L_{n_s}\}$ – разрешающий оператор совокупности математических соотношений, позволяющий по заданным входам $x_i \in X$, $i = \overline{1, n_x}$, находить функции $s_i \in S$, $i = \overline{1, n_s}$, на интервале $t_0 \leq t \leq t_n$: $S(t+1) = L(X(t), S(t), P, \Sigma, t)$. Данная зависимость – закон функционирования модельной системы \mathfrak{Z} .

Задача *параметрической идентификации* сводится к оцениванию параметров $p_i \in P$, $i = \overline{1, n_p}$. Решение поставленной многомерной задачи достигается методами глобальной оптимизации [1] и заключается в следующем:

$$Z(P^*) = \min_{P \in D} |S(P) - S_{real}|, \quad (1)$$

где P^* – вектор оптимальных значений параметров, $S(P)$ – переменные состояния модели, S_{real} – фактические значения переменных состояния,

$$D = [a, b] = \{P \in \mathbb{R}^n : a(j) \leq P(j) \leq b(j), 1 \leq j \leq n_p\}. \quad (2)$$

Будем предполагать, что целевая функция (1) является многоэкстремальной, недифференцируемой, заданной в форме черного ящика и

удовлетворяющей в области поиска $D \subset \mathbb{R}^n$ условию Липшица с неизвестной константой Липшица $0 < L < \infty$:

$$|Z(P') - Z(P'')| \leq L \|P' - P''\|, \quad P', P'' \in D, \quad 0 < L < \infty, \quad (3)$$

где $a, b \in \mathbb{R}^n$ – заданные векторы, $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Определение оптимальных значений параметров является задачей поиска глобального минимума функционала (1) и представляет собой достаточно сложную и трудоемкую задачу. Определение оптимальной комбинации параметров аналитически не представляется возможным в силу сложности модельной структуры *Agrotool*: блочный характер описания процессов, взаимосвязь и взаимозависимость информационных потоков внутри модели, поэтому возникает необходимость применения численных методов.

В свою очередь проблема численного решения задачи оптимизации (1)–(3) сопряжена со значительной размерностью вектора идентифицируемых параметров модели P , многоэкстремальностью и недифференцируемостью целевой функции (1). На рисунке 1 приведена двумерная многоэкстремальная целевая функция невязки для влажности почвы. Поведение целевой функции отличается очень узкими и глубокими пиками и впадинами, которые могут находиться между точками вычислений. Для успешного решения оптимизационной задачи (1)–(3)

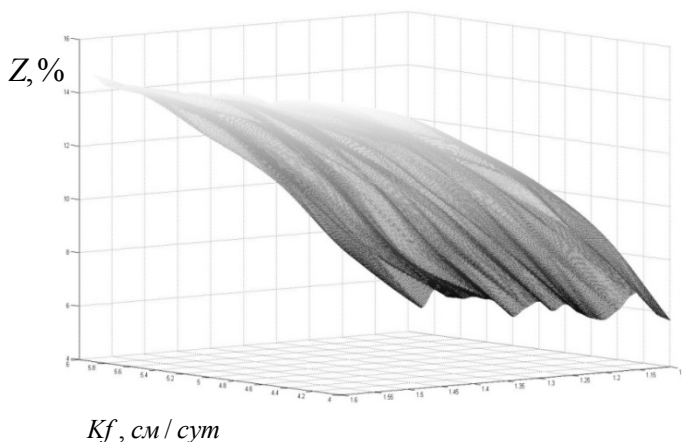


Рис. 1. Двумерная многоэкстремальная целевая функция невязки для влажности почвы

использование методов нелинейной локальной оптимизации оказывается недостаточным в силу наличия нескольких локальных миниму-

мов, имеющих разные значения целевой функции. «Локальные методы, как правило, оказываются не в состоянии покинуть зоны притяжения локальных оптимумов и, следовательно, упускают глобальный экстремум» [1].

2. Методы и алгоритмы глобальной оптимизации

Если минимизируемая функция имеет больше одного экстремума и нужно найти наименьший из них, то ни один из классических методов и алгоритмов поиска локального экстремума не решит поставленную задачу. Ввиду высокой сложности поиска глобального решения многоэкстремальной задачи используют эффективные алгоритмы, например, *диагональный подход* [1] или *метод имитации отжига* [2].

При использовании диагонального подхода для целей идентификации в (2) были определены три гиперинтервала D_i (для параметров трех блоков модели: динамики влажности почвы, фенологического развития и продуктивности посева). Каждый D_i разбивается на множество гиперинтервалов D_i^k , $i = 1, 2, 3$ – для параметров трех блоков модели, $1 \leq k \leq M_i$ – число гиперинтервалов в каждой области D_i . Целевые функции $Z_i(P)$, $i = 1, 2, 3$, вычисляются в двух вершинах, a_i и b_i , главной диагонали каждого гиперинтервала D_i^k . В работе [1] описаны различные диагональные стратегии разбиения, и приведены вычислительные схемы диагональных алгоритмов, которые авторы статьи применили в своем исследовании.

3. Результаты параметрической идентификации с помощью оптимизационных процедур

В результате проведенного исследования построена оптимизационная процедура параметрической идентификации блоков модели: динамики влажности почвы, фенологического развития и продуктивности посева [3, 4]. В каждой области D_i , $i = 1, 2, 3$, была построена неравномерная сетка, уплотняющаяся в окрестности глобального минимума.

Результаты идентификации блока влагопереноса в почве

В основу модели влагопереноса в модели *Agrotool* [5] положено уравнение Ричардса:

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k^w(P_s) \frac{\partial P_s(x, t)}{\partial x} - 1 \right) - f(x, t),$$

где t – время; x – пространственная координата; θ – объемная влажность почвы; P_s – капиллярно-сорбционный потенциал почвенной вла-

ги; $k^w(P_s)$ – функция влагопроводности: $k^w(P_s) = Kf \cdot (-P_s)^C$, Kf – коэффициент фильтрации (см/сут), C – эмпирический параметр; $f(x,t)$ – функция стока.

Коэффициент фильтрации Kf и показатель степени C определяются диагональным методом глобальной оптимизации. Целевая функция (1) принимает вид (4):

$$Z_1(Kf, C) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} |\theta_{soil}(i, j) - \theta_{real}(i, j)| \rightarrow \min_{Kf, C \in P} \quad (4)$$

Здесь $\theta_{real}(i, j)$ – фактические значения влагозапаса, $\theta_{soil}(i, j)$ – расчетные значения, $i = \overline{1, m}$ – номер года, m – общее число лет, за которые производится компьютерный эксперимент, $j = \overline{1, k_i}$ – число фактических замеров влагозапаса в почве в течение m лет.

Для *тяжелосуглинистых почв* минимальная средняя погрешность по формуле (4) – 5,4% достигнута при оптимальных значениях $Kf = 5,9$ и $C = 1,1$. График средней относительной погрешности приведен на рисунке 2.

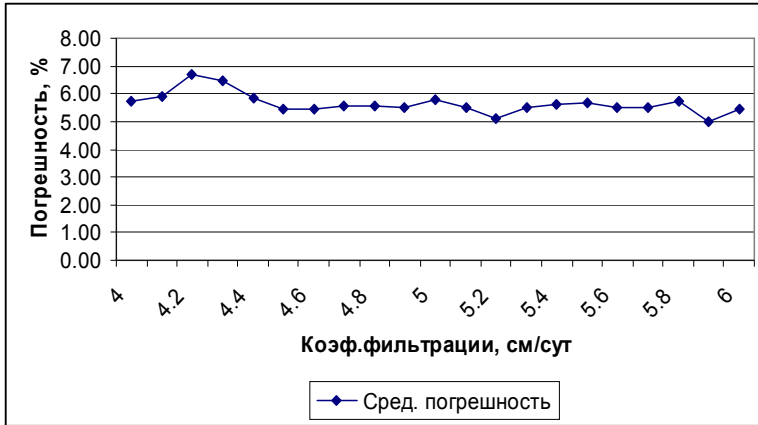


Рис. 2. График средней относительной погрешности вычисления запасов влаги в почве в зависимости от величины коэффициента фильтрации, $C = 1,1$ (суглинок тяжелый)

Для *среднесуглинистых почв* минимальная погрешность составила 7% при оптимальных значениях $Kf = 61,2$ и $C = 1,4$. Координаты точки

глобального минимума при идентификации параметров блока динамики влажности в почве определены при помощи вычисления значений невязок на сетках с различными шагами для Kf и C . Разбиение двумерного (суженного) гиперинтервала D_1^k потребовало выполнения 1920 вычислительных процедур прежде, чем был найден глобальный минимум, k – индекс текущего разбиения области D .

Определение допустимых границ изменения параметров блоков осуществлялось с помощью методов теории чувствительности. В процессе исследования определены функции чувствительности модели как функции влияния изменений параметров на решение задачи [6]. Показано, что для тяжелосуглинистых почв допустимый интервал изменения Kf – (4.0–6.0); значения C не только сильно влияют на динамику влажности почвы, но и на величину урожая и поэтому требования к величине C достаточно жесткие: $C = 1.1$. Аналогичная ситуация наблюдается и для легкосуглинистых почв: Kf – (40–65), $C = 1.4$. Анализ на чувствительность модели осуществлен также к другим гидрофизическим параметрам почвы и начальному состоянию модели.

Результаты идентификации блока фенологического развития

Задачами этого блока являются: расчет так называемого «физиологического времени», измеряемого в градусо-днях, и сроков наступления фенологических фаз. В модели *Agrotool* приращение физиологического времени в день k вычисляется по формуле:

$$\Delta\tau(k) = \Delta\tau_0(1 - \Delta\tau_0/c_1) \cdot \text{Str}(\psi_s),$$

где

$$\Delta\tau_0(k) = \begin{cases} (T_{av}(k) - T_0) & \text{при } T_{av}(k) \geq T_0, \\ 0 & \text{при } T_{av}(k) \leq T_0, \end{cases}$$

$T_{av}(k)$ – среднесуточная температура воздуха в день k , $k = \overline{1, 365}$; T_0 – биологический нуль, c_1 – константа; ψ_s – потенциал воды в почве;

$$\text{Str}(\psi_s) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_s \geq \psi_{opt}, \\ 1 + (S_0 - 1) \frac{\psi_s - \psi_{opt}}{\psi_w - \psi_{opt}}, & \text{если } \psi_s \leq \psi_{opt}, \end{cases}$$

ψ_w – потенциал воды в почве, соответствующий влажности завядания. Величина прироста биологического времени определяется по формуле

$$\tau(k) = \sum_{j=k_0}^k \Delta\tau(j), \text{ где } k_0 \text{ – номер дня сева; } k \text{ – номер текущего дня.}$$

Очередная фаза наступает при достижении величиной $\tau(k)$ некоторо-

го порогового значения $T_{Ph}(IPh)$, зависящего от порядкового номера фазы IPh : $\tau(k) \geq T_{Ph}(IPh)$.

При идентификации пороговых значений определялось минимальное расхождение между расчетными и фактическими датами наступления фенофаз. В таблице 1 приведены оптимальные значения биологических порогов.

Таблица 1

Результаты идентификации пороговых значений

Название фазы	Пороговые значения
Всходы	82
Кущение	176
Выход в трубку	214,2
Колошение	363,4
Цветение	420
Молочная спелость	540
Восковая спелость	700
Полная спелость	805

Результаты идентификации блока продуктивности растений

Результатом окончательной идентификации параметров модели является величина урожайности культуры. Для ОПХ им. Докучаева Алтайского края расчетные и фактические величины урожаев яровой пшеницы представлены в таблице 2. Средняя относительная погрешность составила 12%.

Численные эксперименты с использованием описанных оптимизационных процедур поиска глобального минимума в задаче идентификации параметров модели и анализа на чувствительность позволили: 1) разработать критерии точности задания областей допустимых значений параметров модели; 2) выявить особенности в настройке параметров блоков (среди почв с текстурой суглинок средний и суглинок тяжелый выделены почвы с текстурой – суглинок легкий, что существенно сказалось на качестве поиска глобального минимума; параметры блока фенологического развития зависят от типа почвы и сорта культуры (в модели такие зависимости не предусмотрены); параметры

Таблица 2

Расчетные и экспериментальные величины урожаев, ц/га

Урожайность		
Годы	Фактическая	Расчетная
1999	12,2	13,2
2000	22,2	22,0
2001	20,2	19,6
2002	22,1	23,3
2003	15,4	14,1
2004	14,1	10,2
2005	14,1	19,0
2006	25,4	20,4
2007	17,6	17,4
2008	18,9	20,1
2009	35,5	38,5
2010	19,4	21,6

продуктивности посева напрямую зависят от сорта культуры (в модели параметры одинаковые для всех сортов)). Учет особенностей в настройке параметров показал достаточно высокую эффективность описанного оптимизационного подхода к поиску глобальных минимумов в задаче идентификации параметров и позволил дать высокую качественную оценку применимости модели *Agrotool* для прогноза урожайности зерновых культур в условиях Алтайского края.

Библиографический список

1. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
2. Шарый С.П. Стохастические подходы в интервальной глобальной оптимизации // Труды XIII Байкальской межд. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т. 4 «Интервальный анализ». – Иркутск, ИСЭМ СО РАН, 2005.
3. Хворова Л.А. Идентификация параметров модели фенологического развития зерновых культур в условиях Алтайского края // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2010. – Т. 17. – Вып. 3.
4. Хворова Л.А. Оптимизация процесса структурно-параметрической идентификации моделей продуктивности агроэкосистем // Известия АлтГУ. – 2012. – №1.

5. Хворова Л.А., Топаж А.Г. Построение моделей агроэкосистем и их адаптация к конкретным условиям // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2011. – №1(115).

6. Хворова Л.А. Методы исследования чувствительности моделей продуктивности агроэкосистем // Известия АлтГУ. – 2013. – №1.

УДК 330.131.7

Исследование влияния параметров перестрахования накопительной части пенсии на эффективность НПФ

С.П. Пронь, Л.В. Сидун, Д.Ю. Сидун

АлтГУ, г. Барнаул

В [1] представлены модели перестрахования для трех инструментов, которые предлагались некоторыми НПФ до реформы, и неизбежно будут применяться с 2015 года уже реформированными ОАО НПФ. Первый – получение пенсионного капитала в виде шарового платежа в установленный срок, второй – расходование пенсионного капитала пенсионером в виде конечной ренты т.е. рентными платежами за определенный срок, и третий – в виде бесконечной ренты, т.е. пожизненными рентными платежами. В моделях предполагается, что ответственность ОАО НПФ делится с перестрахователем-государством в пропорции $p:q$ ($p+q=1$), т.е. часть p комиссии за обслуживание капитала переходит к перестраховщику, а часть q является премией НПФ. При этом часть q непосредственно участвует в обеспечении обязательств НПФ перед пенсионером, а часть p используется при однократном возвращении номинала накоплений при банкротстве НПФ. То, что государство готово выступить в качестве перестраховщика в управлении накопительной частью пенсионного капитала граждан, следует из проведенной в 2013 году пенсионной реформы. Для снижения появляющихся рисков государство готово выступить в облигаторном страховании как перестраховщик, но с ответственностью только за номинальный объем накоплений и с огромной франшизой в размере собственного капитала НПФ. Тем не менее, облигаторное по выбору цессионария цессия может быть факультативной для цедента по инструментам снижения рисков собственного удержания [2].

В докладе представлены результаты исследования, проведенного с использованием имитационного моделирования, влияния параметров p и q на величину современной стоимости ренты постнумерандо – пен-

сионной надбавки за счет накопительного компонента с учетом инфляции и среднерыночной интенсивности роста капитала. Показано, что моделирование распределения страховой премии между cedentом (ОАО НПФ) и цессионарием (государством) позволяет найти пороговые значения p и q , которые предопределяют банкротство НПФ при фиксированном значении других параметров ренты.

Библиографический список

1. Пронь С.П., Сидун Л.В., Сидун Д.Ю. О влиянии модели перестрахования накопительной части пенсии на эффективность УК и НПФ // Ломоносовские чтения на Алтае : сб. научных статей международной школы-семинара, Барнаул, 5–8 ноября, 2013: в 6 ч. – 2013. – Ч. I. – С. 233–235.
2. Артамонов А.П., Дедиков С.В. Проблема страхового интереса в договорах перестрахования // Законы России: опыт, анализ, практика. – 2011. – №11. – С. 76–81.

УДК 517.938

Визуальное моделирование и анализ нелинейной хаотической системы

***К.В. Рощупкин**
АлтГУ, Барнаул*

В последние годы интерес исследователей привлекают динамические хаотические системы, обладающие рядом полезных свойств. Эти преимущества обусловлены структурой и свойствами хаотических аттракторов. В частности, для существенного изменения состояний этих систем достаточно незначительного определённого воздействия на управляющий параметр [1].

Указанный класс моделей позволяет анализировать не только природные, но и социальные системы с множеством агентов. Перспективной для исследования является модель Лотки-Вольтерра, хорошо известная, как модель взаимодействия двух видов типа «хищник – жертва», которая исследовалась в работе [2].

В нашей работе проводится моделирование процесса структурирования групп людей, расчёты возможных траекторий системы и визуализация результатов с помощью программного пакета Matlab 7.12.0.

Исследуемая модель (1) описывает взаимодействия между несколькими объектами (группами лиц) и показывает, как группы сливаются в более крупные формирования, поглощая друг друга. Её особенностью является то, что она относится к классу хаотичных систем [2–3].

$$\begin{aligned} u' &= a(u - u^{st}) - \alpha uv - \beta uw; \\ v' &= -b(v - v^{st}) + \alpha uv - \gamma vw - \delta vs; \\ w' &= -c(w - w^{st}) + \beta uw + \gamma vw - \mu ws; \\ s' &= -d(s - s^{st}) + \delta vs + \mu ws, \end{aligned} \quad (1)$$

при $u_0 = 4, v_0 = 4,8, w_0 = 7, s_0 = 4$

где коэффициенты u, v, w, s – описывают изменения состояний групп, коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ – параметры взаимодействия, $u^{st}, v^{st}, w^{st}, s^{st}$ – стационарные значения переменных, к которым релаксирует система при отсутствии взаимодействия.

Для расчёта решения системы использовался метод Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка с точностью 0,000001. Анализировалась система при изменении контрольного параметра c . Одной из проблем являлся поиск значений параметров системы, при которых возникали бы бифуркации [4–5]. В результате расчётов были показаны вид и параметры модели.

На рисунке 1 видно, что данная модель имеет схожее строение со странным аттрактором Рёсслера – компактным подмножеством фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности. В зависимости от значения параметра c изменяется форма аттрактора. Так, к примеру, если в интервале от 12 до 14 колебания носят периодический характер, то при больших значениях в системе начинают наблюдаться хаотические изменения.

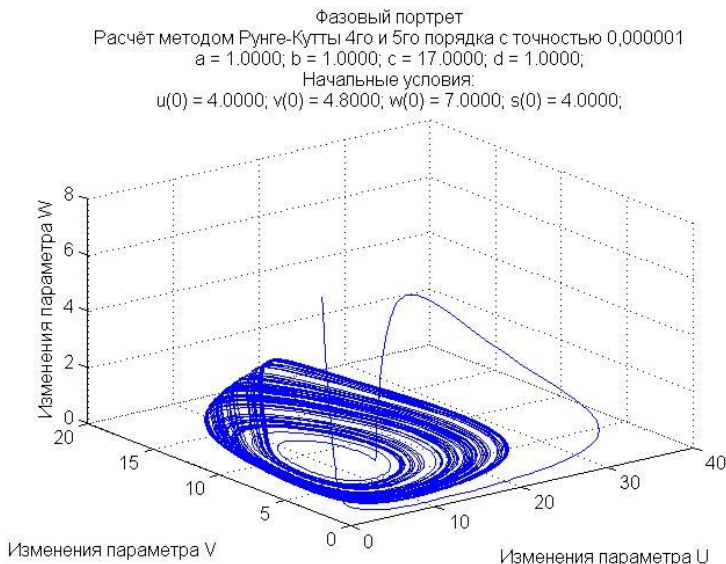


Рис. 1. Вид аттрактора системы (1) в плоскостях (u, v, w)

Проведённые исследования позволяют отыскивать множество значений параметров модели (1), в которых проявляются характерные свойства хаотических систем. Кроме того результаты показывают возможность и перспективы данной модели для описания процесса структурирования групп людей, при котором повышается эффективность их деятельности.

Библиографический список

1. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент / изд. 6-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 312 с.
2. Буланicheв В.А., Серков Л.А. Самоорганизация экономических систем с детерминированным хаосом // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19, № 4. – С. 116-126.
3. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс: учебное пособие / изд. 4-е, испр. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 152 с.
4. Постнов Д.Э., и др. Методы нелинейной динамики: учебное пособие для студентов физ. фак. – Саратов, 2008. – 120 с.: ил.
5. Прошин Ю.Н., Еремин И.М. Вычислительная физика (Практический курс): учебно-методическое пособие. – Казань: Казанский государственный университет, 2009. – 180 с.

УДК 519.237

О ранжировании показателей по степени важности и их влиянии на кластерную структуру множества

А.С. Сазонова, С.В. Дронов

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается задача определения информационной важности статистических показателей объектов некоторого множества.

Пусть имеется n объектов, каждый из которых имеет p числовых показателей X_1, \dots, X_p , и q качественных категоризованных показателей Y_i с s_i категориями соответственно, $i=1, \dots, q$. Предположим, имеется некоторое значимое с точки зрения практики разбиение рассматриваемых объектов на m кластеров. Нам не важно, как именно построен каждый из кластеров, но нам известен его «объективный» ранг, который мы временно примем за числовую метку соответствующего кластера.

Подобно тому, как в [1], определим для каждого из объектов значение кластерной переменной. А именно, поставим каждому из объектов в соответствие номер того кластера, в который он отнесен. Т.о., построено отображение f из набора номеров объектов $\{1, \dots, n\}$ на множество всех имеющихся кластеров, и, тем самым, каждому объекту придана новая числовая характеристика. Значение $f(j)$ этой характеристики для j -го объекта будем называть кластерной переменной.

Рассмотрим задачу определения информационной важности показателей $X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q$, а также их ранжирования в соответствии со степенью важности. Для решения такой задачи предлагается предварительно произвести оцифровку качественных показателей Y_1, \dots, Y_q , т.е. присвоить категориям качественных показателей цифровые метки, которые будут отражать истинные различия между категориями. Потребуем, чтобы задаваемые метки были согласованы с совместными частотами встречаемости каждого из сочетаний категорий признаков. Такие метки назовем частотно-согласованными, следуя терминологии, предложенной в [2].

Способ построения меток, согласованных с таблицами сопряженности, известен под названием анализ соответствий. Подробное изложение этого способа можно найти, например, в [3]. В результате работы анализа соответствий каждая из категорий показателей может получить векторную метку размерности до $s = \min_{1 \leq i \leq m} \{s_i\} - 1$ включительно.

Поскольку координаты векторных меток формируются в порядке степени их разброса, то мы, как и в [2], выберем в качестве числовых меток первые координаты получающихся векторных меток (как наиболее информативные). После этого у каждого из рассматриваемых объектов будет иметься $p+q$ числовых показателей $X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}$. Здесь через X_{p+1}, \dots, X_{p+q} обозначены «числовые варианты» первоначально заданных категорированных качественных показателей Y_1, \dots, Y_q .

Наиболее часто применяемым показателем взаимозависимости двух случайных величин является парный коэффициент корреляции. Воспользуемся этой характеристикой для решения нашей задачи. Вычислим коэффициенты корреляции ρ_j между показателем X_j и кластерной переменной f , $j=1, \dots, p+q$. Составим убывающий ряд из модулей найденных коэффициентов корреляции. Будем ранжировать значимость показателей по убыванию $|\rho_j|$, т.е. будем считать, что чем раньше в данном ряду встречается коэффициент, соответствующий какому-либо показателю, тем более важную роль в построении кластеров играет этот показатель.

Для верификации результата исследования можно применить метод оценки степени влияния числового показателя на вид кластерной структуры, предложенный в [2]. Показатели ранжируются там по величине коэффициента кластерных различий разбиений, получаемых по полному набору показателей и после удаления из этого набора изучаемого показателя. Изучаемый показатель оказывается тем важнее, чем больше вычисленный коэффициент отличается от единицы. В случае не подтверждения результата исследования можно предположить, что такое влияние существенно нелинейно. Тогда, сохраняя установленный экспертом порядок следования кластеров, откажемся от равномерной шкалы их меток. В качестве метки для j -го кластера будем использовать значение $f(j)$, $j=1, \dots, m$. Назовем функцию $f(j)$ функцией перехода. Если при выборе какой-то конкретной функции перехода f модуль коэффициента корреляции показателя X_i окажется статистически значимым, это укажет на линейный характер влияния $f^{-1}(X_i)$ на номер кластера.

Итак, пусть нам удалось найти строго монотонно возрастающую функцию с наибольшим по модулю коэффициентом корреляции $\rho = \rho(X, f)$ между показателем X и кластерной переменной, на j -м кластере равной значению $f(j)$. Тогда

$$f(j_A) = \rho \frac{S_f}{S_X} (X_A - \bar{X}) + \bar{f},$$

где j_A – номер кластера, к которому относится объект A , X_A – значение показателя X на этом объекте. Поэтому для нахождения по значению X_A номера того кластера, к которому относится объект A , следует вычислить величину

$$Z_X = f^{-1} \left(\rho \frac{S_f}{S_X} (X_A - \bar{X}) + \bar{f} \right).$$

Естественно, это можно сделать и для каждого из $p+q$ показателей. Полная прогностическая функция строится суммированием отдельных таких Z_X . Для более высокой точности можно учесть абсолютные величины коэффициентов корреляций, например, строя прогностическую функцию по формуле

$$\delta = \sum_{k=1}^{p+q} |\rho_k| Z_{X_k},$$

где ρ_k – соответствующий максимальный по модулю коэффициент корреляции для k -го показателя. Таким образом, мы получили некоторое число, с помощью которого после его нормировки (для попадания в интервал между $f(1)$ и $f(m)$) и округления до ближайшего целого, можно интерпретировать результат, т.е. мы получим номер кластера, к которому относится рассматриваемый объект.

Таким образом, используя априорную информацию о порядке следования кластеров, был предложен метод ранжирования определяющих показателей объектов. Поскольку было заранее известно, что каждый из исследуемых показателей существенно влияет на формирование кластеров, то предполагается существование «достойной» дискриминационной функции перехода, правильно разделяющей объекты по имеющимся кластерам. Нами разработан алгоритм, позволяющий для каждого показателя определить вид функции перехода, посредством которой его влияние выделяется наиболее «правильным» образом.

Работа выполнена в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» на 2012-2016 годы «Развитие Алтайского государственного университета в целях модернизации экономики и социальной сферы Алтайского края и регионов Сибири» (мероприятие «Конкурс грантов-2014», № 2014.312.1.4).

Библиографический список

1. Дронов С.В., Герасимова А.С. К проблеме оцифровки кластерной переменной // Анализ, геометрия и топология : труды всероссийской

молодежной школы-семинара. – Барнаул: ИП Колмогоров И.А., 2013. – С. 54-58.

2. Герасимова А.С. Кластеризация объектов с качественными признаками и её использование для оценки силы их связи. // Известия Алтайского государственного университета. – 2013. – Вып. 1/2(77). – С. 66-69.

3. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.

УДК 519.237

МГК для анализа данных успешности обучения

Л.Л. Смолякова

АлтГУ, г. Барнаул

Проблема анализа функциональной зависимости по эмпирическим данным встает перед многими исследователями в различных отраслях науки. В настоящее время активно развиваются методы углубленного анализа данных, в результате которых выявляются не только разнородные наблюдения, ошибки регистрации данных, статистические закономерности, но и более глубокие характеристики исследуемых процессов, такие как скрытые (латентные) факторы, существенно определяющие параметры функционирования исследуемых систем.

Одним из перспективных и широко исследуемых методов детального анализа данных является метод главных компонент (МГК). Судя по литературе, использование данного метода, позволяет выявить главные факторы, определяющие исследуемые процессы. Они выступают агрегатами исходных наблюдений, и прямое воздействие на которые позволяет обосновывать управленческие решения по повышению качества исследуемых процессов.

В данной работе описывается опыт применения данного метода к анализу процессов обучения бакалавров математического факультета Алтайского государственного университета.

В качестве основных факторов наблюдения были рассмотрены следующие показатели, которые, по мнению автора, влияют на успешность обучения, это:

1. Данные по базовой подготовке ЕГЭ (математика, физика или информатика и русский язык) (баллы).

2. Блок формирования показателей «целесообразности» студентов (посещения лекций, посещения практических занятий, выполнения текущих заданий, активности студента на занятиях) (%).
3. Блок формирования показателей текущей "активности" студентов (уровень математической культуры и знание истории математики, степень осознанности в выборе математического образования, экспертная оценка по целевой установке) (%).

Сбор данных был осуществлен с помощью анкетирования, в котором, в качестве респондентов, участвовали студенты первого курса направления «Математика. Компьютерные науки» и преподаватели, ведущие занятия по профильным предметам. Фрагмент, полученных данных приводится в таблице 1.

Таблица 1

Результаты анкетирования студентов
математического факультета

№	X11	X12	X13	X21	X22	X23	X24	X31	X32	X33
1	56	46	60	100	100	100	100	85	40	40
2	40	52	57	70	80	60	80	85	0	25
3	70	45	90	70	70	50	40	85	0	-20

В данной таблице: X11 – результаты ЕГЭ по математике, $X11 \in [20, 80]$.

X12– результаты ЕГЭ по информатике или физике, $X12 \in [40, 90]$.

X13 – результат ЕГЭ по русскому языку, $X13 \in [40, 90]$ (Все данные по результатам поступления на МФ в 2012 году).

Второй блок: X21 – процент посещения лекций (количество посещенных студентом лекций, поделенное на количество всех лекционных занятий и умноженное на 100), $X21 \in [0, 100]$;

X22 – процент посещения практических занятий (количество посещенных студентом практик, поделенное на количество всех практических занятий и умноженное на 100), $X22 \in [0, 100]$;

X23 – процент выполнения текущих заданий (количество выполненных студентом заданий, поделенное на количество всех заданий и умноженное на 100), $X23 \in [0, 100]$;

X24 – процент активности студента на занятиях (оценивает эксперт-преподаватель, ведущий профильные занятия с данным студентом), $X24 \in [0, 100]$.

Третий блок: где X31 – уровень математической культуры и знание истории математики $X31 \in [-50, 50]$;

X_{32} – степень осознанности в выборе математического образования, $X_{32} \in [-50, 50]$;

X_{33} – экспертная оценка по целевой установке, $X_{33} \in [-50, 50]$.

Обработка эмпирических данных МГК проведена в среде Matlab. Данные по вкладу каждой компоненты отражены на рисунке 1. Следует, отметить, что использование трех главных компонент объясняет около 80% вариаций факторов. Для возможности анализа информативности главных компонент проведено вычисления в среде Excel структурных переменных V_1, V_2, V_3 . Связь главных компонент и структурных компонент изучалось с использованием матрицы корреляции (таблица 2).

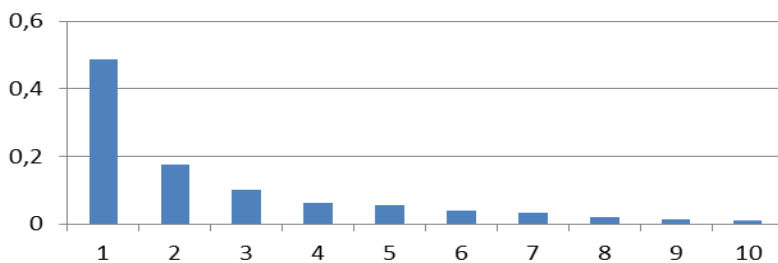


Рис. 1. Доля, объясненной дисперсии главных компонент

Следует, отметить, что использование трех главных компонент объясняет около 80% вариаций факторов. Данные по вкладу каждой компоненты отражены на рисунке 1. Для возможности анализа информативности главных компонент проведено вычисления в среде Excel структурных переменных V_1, V_2, V_3 . Связь главных компонент и структурных компонент изучалось с использованием матрицы корреляции (таблица 2).

Проведен анализ возможностей использования МГК для идентификации структурных факторов. Диаграмма распределения скрытых факторов представлена на рисунке 2, а диаграмма трех первых компонент – на рисунке 3.

Таблица 2

Матрица коэффициентов корреляции

	V_1	V_2	V_3
ГК1	0,67	0,91	0,90
ГК2	0,67	-0,08	-0,03
ГК3	0,03	0,15	-0,29

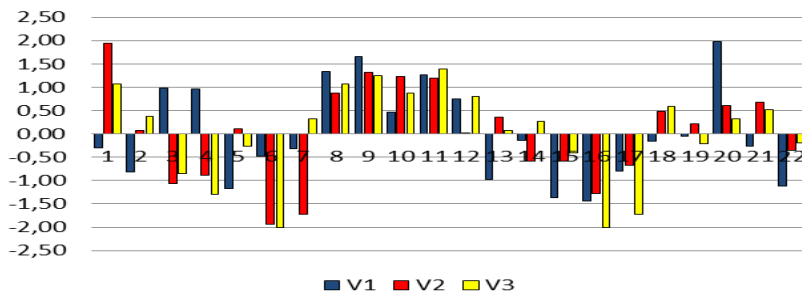


Рис. 2. Диаграмма распределения латентных переменных по экспериментальным данным

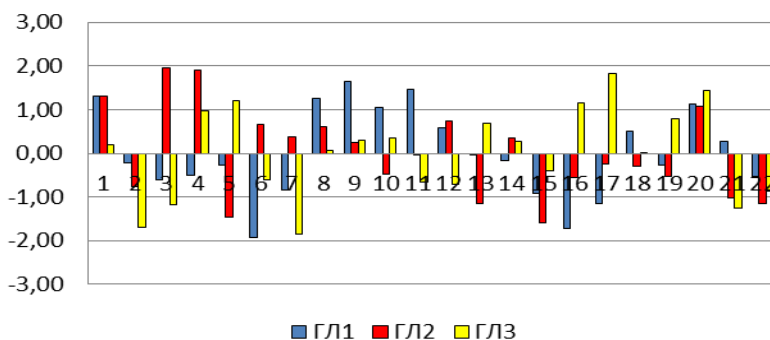


Рис. 3. Диаграмма распределения главных компонент по экспериментальным данным бакалавров МФ

Визуальный анализ указанных диаграмм, с учетом экспериментальных (анкетных) данных показывает их качественные совпадения. Наиболее информативной для обобщенного анализа факторов является первая главная компонента (ГК1). Если принять границу успешности в условных единицах за ноль и полагать, что «+» положительную успешность, а «-» отрицательную успешность, то для всех 22 студентов, первая главная компонента безошибочно классифицирует студентов. Этот вывод согласуется с фактическими экспериментальными данными (экспертными оценками). Другим выводом является, невозможность использования МГК для отдельной оценки трех латентных переменных. Для этих целей лучше подходят данные представленные на первой диаграмме рисунок 2. Данный вывод подтверждается совместным анализом диаграмм на рисунках 2, 3 и сравнением этих данных с фактическими, реальными данными.

Таким образом, для анализа факторов успешности обучения студентов предлагается использовать первую главную компоненту для классификации студентов и трехфакторную модель для углубленного анализа структурных переменных по каждому обучаемому. Результаты на наш взгляд могут быть использованы для обоснования решений по совершенствованию профориентационной работы, а также для разработки мероприятий по воспитательной работе среди студентов первого курса.

УДК 330.131.7

Зарубежный опыт создания пенсионного капитала в модели пенсионной системы России после реформы 2014-2015

Л.С. Сюльдина
АлтГУ, г. Барнаул

Российская Федерация после отхода от распределительной пенсионной системы, пытается построить новую модель, используя опыт других стран.

Первым шагом к построению новой пенсионной системы стала реформа 2002 г. Трудовая пенсия стала включать три части: базовая часть пенсии, страховая и накопительная. Введение накопительной части должно было послужить катализатором в формировании инвестиционного потенциала для экономического сектора, а также развитию финансовых рынков, повышению уровня пенсионной культуры граждан и их ответственности за свое благосостояние в старости.

К сожалению, пенсионная реформа 2002 г. не выполнила поставленных задач. Дефицит Пенсионного фонда России с каждым годом возрастает и покрывается за счет государственного бюджета. Поэтому со стороны государственных органов стали звучать предложения о полном или частичном демонтаже накопительного компонента в рамках системы трудовых пенсий.

Начиная с 2012 г. Правительство России рассматривало различные предложения по реформированию пенсионной системы. В конце 2013 г. был принят закон о реформе пенсионной системы [1]. С 1 января 2015 г. в России вводится новый порядок формирования пенсионных прав граждан и начисления пенсии в системе обязательного пенсионного страхования.

В новой модели права на страховую пенсию будут учитываться в пенсионных коэффициентах (баллах), исходя из уровня заработной платы (уплаченных с нее страховых взносов), стажа, возраста выхода на пенсию и других установленных законом параметров.

Установлены пороговые значения основных параметров. Условием получения страховой пенсии по старости является наличие стажа уплаты страховых взносов не менее 15 лет и наличие величины индивидуального пенсионного коэффициента не менее 30. Требования по стажу и величине коэффициента будут увеличиваться поэтапно, и достигнут обозначенных значений к 2025 году.

Пенсионный возраст остается прежним: 60 лет – для мужчин, 55 лет – для женщин. Но стимулируется поздний выход на пенсию: за каждый год более позднего обращения за пенсией страховая пенсия будет увеличиваться на соответствующие премиальные коэффициенты.

Накопительная часть пенсии выделяется в самостоятельный вид пенсии и может формироваться гражданами добровольно как за счет работодателя по желанию граждан – 6% от размера «белой» заработной платы, так и за счет самостоятельных взносов, например, по программе софинансирования.

Формула расчета страховой пенсии при обобщенном подходе без учета многочисленных частных случаев имеет вид:

$$СП = (ФВ \times КПВ_1) + (ИПК \times КПВ_2 \times СПК) \quad [2]$$

где:

СП – страховая пенсия в году назначения пенсии;

ФВ – фиксированная выплата;

ИПК – индивидуальный пенсионный коэффициент, равный сумме всех годовых пенсионных коэффициентов гражданина;

СПК – стоимость одного пенсионного коэффициента в году назначения пенсии;

КПВ – премиальные коэффициенты за выход на пенсию позже общеустановленного пенсионного возраста.

В докладе рассмотрены модели пенсионных систем в других странах мира и учет опыта их применения в реформе пенсионной системы РФ 2014–2015 гг.

Например, в Казахстане также действует смешанная пенсионная система, которая состоит из солидарной и накопительной частей. В настоящее время в Казахстане также реформируется пенсионная система, планируется повышение пенсионного возраста женщин и создание Единого накопительного пенсионного фонда, а также ряд других изменений.

Пенсионная система Германии также основана на принципе солидарности поколений – выплаты нынешним пенсионерам происходят за счет отчислений работающих граждан в госфонд.

Выделяют три уровня формирования пенсии в Германии:

1. Обязательное государственное страхование.
2. Производственное страхование.
3. Приватное (частное) страхование.

Взнос в пенсионный фонд составляет примерно 20% от заработной платы, и данное обязательство делится пополам между работником и работодателем.

В Швеции пенсия состоит из трех частей. Первая часть – условные деньги (обязательства), размер которых зависит от зарплаты работника. Она складывается из взносов (16% от зарплаты). Накопительная часть (2,5% от зарплаты) – реальные деньги, которые направляются на индивидуальный счет, которые потом инвестируются. По сравнению с россиянами работник может выбрать как один, так и несколько пенсионных фондов, что снижает риски инвестирования. Гарантированная пенсия (фиксированная выплата) назначается только тем, у кого нет накоплений в первых двух частях или они слишком малы.

Широко распространены, в отличие от РФ, добровольные профессиональные системы, которые охватывают не менее 90% работников.

В США накопление пенсионного капитала в большей степени основано на личном пенсионном страховании населения, при этом существуют и государственные и частные пенсионные программы, которые работают по принципу накопительных систем.

Фактически человек может обеспечить себе три независимых компонента пенсии: государственный, корпоративный и частный. Способы обеспечения существенно отличаются от российских.

Государственная пенсионная распределительная система предназначена для гарантированной выплаты пенсий пенсионерам.

Работники имеют право участвовать в дополнительных пенсионных системах, организуемых по месту работы.

Каждый американец также может открыть свой личный пенсионный счет в коммерческих и сберегательных банках, паевых фондах, страховых компаниях. Средства со счета нельзя снять до достижения возраста 59 с половиной лет.

Исследование модели пенсионной системы России и сравнение её структуры с моделями пенсионных систем других стран приводит к выводу, что российским гражданам предоставлена возможность самостоятельно формировать свою пенсионную основу, накапливая пенсионный капитал, как в рамках трудовых отношений с работодателям,

так и в страховых компаниях по программам накопительного страхования жизни.

Библиографический список

1. Федеральный закон от 28.12.2013 N 400-ФЗ «О страховых пенсиях».
2. Сайт Пенсионного Фонда России <http://www.pfrf.ru/pensions/>.

Секция 6. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 375

Организация проектной деятельности студентов в системе Moodle

Г.В. Кравченко
АлтГУ, г. Барнаул

Переход к компетентностному образованию определил широкий и всесторонний интерес к активным методам обучения, в том числе и к методу проектов который развивает у учащихся исследовательские и коммуникативные умения, а также навыки совместной работы. Сегодня организация проектной деятельности стала возможна не только в очном обучении, но и в электронном с помощью информационно-коммуникационных технологий: чатов, форумов, электронной почты, видеоконференций.

Как нельзя лучше, по нашему мнению, для проектной деятельности подходит система дистанционного обучения Moodle, которая реализует философию «педагогике социального конструкционизма», разработана под концепцию активного учения и предполагает активное взаимодействие всех участников учебного процесса.

Нам видится, что сущностью информационно-проектного метода обучения является организация самостоятельной работы студентов, в которой компетенции формируются в процессе планирования и выполнения, постепенно усложняющихся практических профессионально-значимых заданий – проектов, выполняемых с применением информационно-коммуникационных технологий на основе электронной системы обучения Moodle.

Под учебным информационным проектом мы понимаем совместную учебно-познавательную, исследовательскую или творческую деятельность учащихся, организованную на основе информационно-коммуникационных технологий, имеющую общую проблему, цель, согласованные методы, способы деятельности, направленную на достижение совместного результата деятельности.

Для организации проектной деятельности студентов факультета математики и информационных технологий по курсу «Современные компьютерные технологии» на Едином образовательном портале Алтайского государственного университета (<http://portal.edu.asu.ru>) соз-

дан электронный курс с одноименным названием. Разработанный курс содержит: краткую аннотацию, перечень предлагаемых проектных работ (задания трёх уровней), блок теоретических и справочных материалов, которые предоставляют студентам возможность углубленного изучения проблемы, знакомят их с возможными путями решения проектных задач.

Подготовленные теоретические справочные материалы, необходимые для работы над проектами, включают:

- лекционные материалы, разработанные преподавателями, проводящими обучение;
- теоретические материалы из других источников, дополняющие лекционные материалы;
- ссылки на электронные образовательные ресурсы по данной теме.

Обучение студентов осуществляется по следующему плану: выбор учащимися проектной темы, изучение теоретической части курса, решение контрольных вопросов и тестов, поиск путей реализации выбранной проектной работы на базе освоенной теоретической части курса и справочных материалов, практическая работа студентов над выбранным проектом и представление её результатов в системе дистанционного обучения Moodle.

Самостоятельная работа по курсу «Современные компьютерные технологии» строится как последовательность уровневых проектных заданий.

Задания первого уровня – информационные проектные задания – нацелены на сбор информации, её анализ и обобщение, а также ознакомление участников проекта с этой информацией. Результатом выполнения заданий является: освоение студентами совокупности приёмов и операций работы в системе Moodle, подчиненных решению конкретной задачи, поставленной преподавателем, а также освоение содержания курса; формирование общеучебных умений: воспринимать, структурировать, преобразовывать, запоминать научную информацию, уметь оформлять и представлять результат своей работы.

Задания второго уровня (творческие проектные задания) отличаются повышенным уровнем сложности и носят междисциплинарный характер. Такие задания охватывают различные дисциплины, формируют единые конструктивно-технические, расчетно-измерительные, вычислительные, экспериментальные умения и знания межпредметного характера.

Задания третьего уровня (междисциплинарные проекты) представляют собой самостоятельную учебно-исследовательскую работу и предполагают углубленное изучение студентами отдельных проблем

профессиональной деятельности. Результатом выполнения заданий по курсу «Современные компьютерные технологии» является разработка новых или совершенствование уже существующих математических моделей, при этом идет закрепление знаний и умений, направленных на развитие профессиональных компетенций студентов.

Остановимся подробнее на этапах организации проектной деятельности в среде Moodle при обучении студентов курсу «Современные компьютерные технологии».

На первом этапе (планирование) происходит выбор основных содержательных элементов будущего проекта (выбор темы проекта, его типа, количества участников), получение инструкций от преподавателя.

На втором этапе (мониторинг) происходит распределение студентов на микрогруппы средствами ресурса платформы Moodle – «Опрос» в соответствии с их интересами; распределение задач по группам; обсуждение возможных методов исследования, поиска информации, творческих решений. Здесь уместен «мозговой штурм» с последующим коллективным обсуждением посредством ресурса «Групповой форум». Для этого рекомендуется:

- приветствовать любые идеи, даже если они вначале кажутся сомнительными или абсурдными (обсуждение и оценка идей проводится позднее), стараться создавать как бы цепные реакции идей;
- не допускать критики и не прекращать обсуждение ни одной идеи;
- создавать атмосферу, которая способствует генерации новых идей и освобождает студентов от лишней скованности;
- любая предложенная идея обсуждается и не отбрасывается при ее очевидной бесперспективности.

Для генерирования, отражения, структурирования, классификации идей, а также в качестве вспомогательного средства при групповом написании документов, принятии решений студентами могут использоваться ментальные карты (интеллект-карты, карты памяти) – это диаграммы, на которых отражают слова, идеи, задачи или другие элементы, расположенные радиально вокруг основного слова или идеи. Этот веб-инструмент позволяет коллективно работать над одной картой и идеально подходит для выполнения образовательного проекта в малых группах. На этом этапе студенты знакомятся с возможностями платформы Moodle.

В рамках третьего этапа (внедрение) каждая микрогруппа самостоятельно работает над заданием до тех пор, пока все её участники разберутся в нём и успешно его выполнят. Успех в выполнении общего за-

дания зависит от результатов деятельности каждого участника микро-группы.

Совместная работа над заданием осуществляется с помощью ресурса «Вики», позволяющего: иметь множество авторов; возможность многократно править текст посредством самой вики-среды, без применения особых языков программирования; появление изменений сразу после их внесения; разделение информации на страницы, где у каждой своё название; возможность загружать файлы; учёт изменений текста и возможность отката к ранней версии.

На этом этапе также происходят промежуточные обсуждения полученных результатов в группах, защита проектов, оппонирование и размещение материалов групп на платформе Moodle (ресурс «База данных»). Авторы работ при размещении на платформе не указываются, поскольку анонимность обеспечивает объективность оценки проекта.

На четвёртом этапе (оценка) происходит оценивание выступления группы, коллективное обсуждение, формулируются выводы. Кроме того, осуществляется характеристика выступления группы преподавателем, итоговая педагогическая оценка средствами платформы Moodle – «Новостной форум». Оценивание проектов происходит через ресурс «Опрос». По наиболее интересным и хорошо оформленным информационным проектным работам рекомендуется сделать доклады на студенческой конференции.

Результатом данного процесса являются групповые проекты, разработанные студентами и размещённые на платформе Moodle.

Роль преподавателя в этом процессе – общая координация, консультирование и оценка результатов деятельности. Подобная форма обучения требует от него значительной организационной деятельности: необходимы соответствующие усилия для того, чтобы построить структуру электронного курса, сформулировать конкретные задания, четко и своевременно диагностировать проблемы, возникающие в ходе совместной работы студентов.

Таким образом, благодаря использованию системы Moodle при изучении курса «Современные компьютерные технологии» значительно повышается:

- интерес учащихся к проектно-исследовательской деятельности (не маловажную роль играет то, что платформа Moodle изначально была незнакома студентам);
- активность и интенсивность взаимодействия участников проекта (сетевые формы взаимодействия легко осваиваются и принимаются учащимися);

– становится «открытым» для всех участников процесс и результативность продвижения каждого в проекте (все промежуточные и итоговые результаты обучения размещаются в системе Moodle).

В заключение необходимо отметить, что деятельность обучаемых в рамках проектной деятельности наиболее эффективна, если ей предшествует определённый систематический учебный курс, подготавливающий обучаемого к участию в проекте и имеется возможность предоставления студентам дополнительного времени для освоения системы Moodle.

УДК 375

Электронно-методическое обеспечение курса «Методика преподавания математики» в среде Moodle

***Г.В. Кравченко, О.А. Яркова**
АлтГУ, г. Барнаул*

Обновление системы профессионального математического образования сегодня непосредственно связано с использованием информационно-коммуникационных технологий для эффективной организации учебно-познавательной деятельности студентов, для управления и организации учебно-воспитательного процесса, а также для подготовки студентов к использованию информационных технологий обучения математике в будущей профессиональной деятельности.

В качестве информационно-коммуникационных технологий для эффективной организации учебного процесса и обеспечения постоянного доступа студентов и преподавателей к учебным материалам в Алтайском государственном университете используется один из аналогов серверов дистанционного обучения – платформа Moodle, в силу своей доступности, легкости в изучении и использовании.

В среде Moodle для студентов факультета математики и информационных технологий, обучающихся по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки», нами разработано электронно-методическое обеспечение учебного курса «Методика преподавания математики».

Прежде всего уточним, что под методическим обеспечением мы понимаем комплекс нормативных, содержательных, методических документов и изданий, позволяющих организовывать, вести и контролировать образовательный процесс и его результаты в соответствии с

поставленными ФГОС и ООП целями, задачами и требованиями.

Методическое обеспечение должно позволять студентам:

- знакомиться с целью, задачами, общим содержанием, графиком изучения дисциплины, видами и содержанием промежуточного и итогового контроля, методикой формирования итоговой оценки;

- получать непосредственно основной контент по дисциплине в виде электронных изданий или в виде рекомендуемых печатных изданий, а также рекомендации по их изучению;

- подготавливаться к лабораторным работам, практическим занятиям, семинарам и т.п.; к составлению отчетов и их защите;

- знакомиться с требованиями и методическими указаниями по самостоятельной работе;

- подготавливаться к текущему и итоговому контролю: знакомиться с вопросами, заданиями; проходить тренировочное и итоговое тестирование и т.п.

Основной формой методического обеспечения является электронная форма, как обеспечивающая наибольшую доступность, оперативность и возможность обратной связи.

Электронно-методическое обеспечение курса «Методика преподавания математики» в системе Moodle состоит из трех частей: теоретической, практической и методической; имеет модульную структуру и включает в себя: рабочую программу, форум, методические указания по изучению дисциплины, глоссарий, учебные модули, итоговый тест.

Рабочая программа позволяет студентам получить полное представление о данном курсе: тематике модулей, видах учебной деятельности; формах и сроках отчетности. Глоссарий содержит основные определения и справочные материалы по курсу.

Различные элементы и ресурсы Moodle позволяют организовать со студентами различные типы деятельности, направленные на формирование заданных ФГОС компетенций будущих специалистов, сделать методическое обеспечение учебной деятельности студентов более динамичным и вариативным.

Для методического обеспечения формирования коммуникативных компетенций используется элемент «Форум», с помощью которого легко организуются обсуждения, консультаций или дискуссии по вопросам учебной темы.

Учебные модули содержат структурированную учебную информацию, соответствующую рабочей программе. Каждый учебный модуль посвящен отдельной теме и содержит следующие ресурсы:

- лекции с элементами деятельности, презентации; публикации (статьи и учебные пособия); адреса веб-сайтов в сети Интернет с ин-

формацией, необходимой для обучения. Основное содержание лекций – изложение теоретических основ методики обучения математики, методических основ изучения отдельных тем школьного курса математики, в том числе альтернативных методик обучения;

– практические задания представлены в виде лабораторных работ и содержат задания по тематике учебного модуля, оформленные с помощью элемента «Задание» и с возможностью загрузки файлов на сервер;

– вопросы и задания для самостоятельной работы. Самостоятельная работа студентов по методике преподавания математики, как правило, носит учебно-исследовательский и научно-исследовательский характер. Результаты самостоятельной работы оформляются в виде рефератов и докладов. Контроль за самостоятельной работой студентов и проверка их знаний проводится с помощью элементов системы Moodle – заданий, тестов, лекций с вложенными вопросами. Также при изучении курса используется метод проектов, реализуемый ресурсом «Вики».

– тестовые задания используются для диагностики учебных достижений обучающихся. Разработанная система тематических тестов позволяет студентам самостоятельно прорабатывать изученный материал, а преподавателю – контролировать уровень усвоения учебного материала.

Для итогового контроля по дисциплине применяется итоговый тест, доступ к которому открывается студенту при успешном выполнении всех заданий и тематических тестов.

Применение платформы Moodle позволяет более эффективно использовать время лабораторных работ. При подготовке к лабораторным работам студенты заранее получают задания, проходят тренировочные тесты и изучают этапы выполнения работ. На аудиторных занятиях преподаватель лишь консультирует студентов по тем вопросам, с которыми они не могли справиться самостоятельно, и принимает выполненные задания.

Выполненные работы учащиеся отправляют преподавателю на проверку прикрепленными файлами любого формата, а преподаватель либо оценивает работу, либо, указав на недостатки в комментариях к работе, возвращает её на доработку.

Таким образом, студенты, получая доступ к дистанционному курсу, имеют возможность углубленно изучить теоретический материал, выполнить задания, а так же пройти тестирование. В рамках курса имеется возможность отработки пропущенного студентом учебного материала (дополнительные задания, рефераты).

Статистика мониторинга учебной деятельности студентов накапливается, обобщается и систематизируется. В частности Moodle создает и хранит портфолио каждого обучающегося: все сданные им работы, оценки и комментарии преподавателя, сообщения на форуме, контроль за посещаемостью и активностью студентов, время их учебной работы в сети. Такая информация позволяет преподавателю реализовать оптимальные образовательные траектории для каждого обучающегося, своевременно влиять на учебную деятельность студентов, корректировать проблемы в обучении, а самое главное развивать у студентов понимание и потребность в систематической самостоятельной работе.

Разработанное электронно-методическое обеспечение курса «Методика преподавания математики» используется для поддержки традиционного обучения студентов факультета математики и информационных технологий АлтГУ, как на лабораторных занятиях, так и в самостоятельной работе учащихся.

Опыт разработки и работы с электронно-методическим обеспечением учебного курса «Методика преподавания математики» в среде Moodle свидетельствует о повышении познавательной мотивации студентов и увеличении их активности во взаимодействиях в электронной среде. Этот вывод базируется на высказываниях студентов в рефлексивных учебных материалах и росте числа студенческой активности в среде. Предварительные результаты обучения и устный опрос студентов дают основание утверждать о перспективности и необходимости создания таких курсов.

УДК 371.315.7

Особенности применения интерактивных систем контроля знаний в классическом ВУЗе

Л.А. Линевиц
МосАП, г. Барнаул

В качестве одной из составляющих современные системы дистанционного образования включают в себя системы интерактивного контроля знаний, приобретаемых учащимися в процессе обучения. На наш взгляд вполне возможно использовать подобные системы вне контекста дистанционного обучения, например, в классических учебных заведениях (ВУЗах). Данный факт порождает новую самостоятельную задачу разработки специализированной системы интерактивного кон-

троля знаний, учитывающей особенности традиционных форм обучения.

В то время как системы дистанционного образования ориентированы на индивидуальное обучение, классические учебные заведения предпочитают групповую форму обучения. Естественно, это касается не только самого процесса обучения, но и процедур контроля знаний, которые обычно также проходят в группах. Эти различия вынуждают пересмотреть существующие подходы к разработке систем интерактивного контроля знаний. Первоочередного решения требует задача анализа и выявления требований к системам интерактивного контроля знаний, предназначенным для применения в классических высших учебных заведениях.

Анализируя особенности использования систем интерактивного контроля знаний в традиционных учебных заведениях мы можем сформулировать ряд требований, которым они должны удовлетворять.

1. Наличие механизмов, препятствующих улучшению результатов аттестации в случае общения ее участников между собой.

2. Наличие механизмов, позволяющих контролировать длительность прохождения аттестации (в том числе длительности ответа на один вопрос).

3. Наличие механизмов оперативного устранения последствий мелких некритичных сбоев (например, восстановление возможности прохождения аттестации для определенного круга участников, принудительная активация регистрационной записи участника аттестации, принудительный допуск к аттестации учащегося, не включенного ранее в список участников, принудительная смена пароля зарегистрированного участника аттестации).

4. Наличие механизмов интеллектуального мониторинга хода аттестации как отдельного участника, так и группы в целом.

5. Наличие механизмов защиты результатов контроля знаний как от попыток их изменения, так и от недобросовестных действий участников аттестации.

Вопрос о требованиях, предъявляемых к автоматизированным системам интерактивного контроля знаний, является предметом многих исследований. Однако, мы рассмотрим данный вопрос через призму использования системы в классическом учебном заведении.

Одной их распространенных форм электронного контроля знаний является тестирование.

При формировании тестов необходимо ориентироваться на множество базовых понятий. Тестовые задания начинают составлять с понятий нижнего, первого уровня. Для каждого понятия определяется во-

прос с несколькими вариантами ответов. После формирования тестовых заданий первого уровня переходят ко второму. Таким образом, тесты составляются по схеме «от простого к сложному». Такой принцип составления тестов позволяет определить тот уровень сложности понятий, который известен студенту.

Тест должен быть построен таким образом, чтобы максимально охватывать весь пройденный материал, а не какую-то его часть. Это вполне понятно. Чтобы объективно оценить знания студента, преподаватель должен выявить уровень освоения им всего учебного материала. Также это позволит самому студенту понять, какая часть пройденного материала им не усвоена, а, следовательно, позволит ему более досконально ее изучить либо самостоятельно, либо с помощью преподавателя.

Не секрет, что одними из главных достоинств компьютерного тестирования являются минимум временных затрат на получение надежных итогов контроля и готовность результатов практически сразу по завершении контролирующего теста. Результаты автоматизированного тестирования лучше поддаются анализу, чем субъективно выставляемые оценки.

Применение компьютерных тестов при проверке знаний учащихся обеспечивает повышение эффективности учебного процесса, объективности оценки уровня знаний и является рациональным дополнением к другим методам проверки знаний.

На сегодняшний день использование системы тестирования для контроля качества знаний учащихся занимает центральное место в системе российского образования. Почти все современные системы тестирования, которые используются в учебном процессе, требуют автоматизированных компьютерных классов, которые оснащены необходимым программным обеспечением. Такие классы есть в каждом учебном заведении, и работают в них в основном учителя информатики. А как проводить тестирование, если Вы являетесь учителем биологии или русского языка?

Наша интерактивная система контроля знаний разработана с учетом перечисленных выше требований. Она не требует от пользователя (как от студента, так и от преподавателя) глубоких знаний компьютерных технологий. Программа проста в использовании, она сама подскажет какие действия требуются от пользователя. Программа может быть установлена в любом компьютерном классе, при этом компьютеры не обязательно должны иметь выход в Интернет, достаточно наличия локальной сети.

Также в интерактивной контролирующей программе тестирование реализовано в двух режимах: в режиме обучения и в режиме контроля.

Режим обучения предназначен для того, чтобы студент мог проверить свои знания по какой-либо теме, уровень своей подготовки, самостоятельно выявить свои упущения и более основательно подготовиться либо к экзамену, либо к контрольному тестированию. В режиме обучения после завершения тестирования студенту сообщалось количество набранных баллов, при этом указывался соответствующий эквивалент по общепринятой пятибалльной системе. Хранение результатов тестирования в режиме обучения не предусмотрено.

Наличие режима обучения позволяет обучаемому самому контролировать уровень полученных знаний, что как нельзя лучше позволяет реализовать систематичность контроля знаний.

Режим контроля предназначен для проверки знаний студента преподавателем. В режиме контроля студенту предоставляются три попытки для получения положительной оценки. Однако при выставлении оценки учитывается номер попытки. Здесь имеется в виду, что при одинаковом количестве правильных ответов, оценка, полученная при первой попытке, будет выше, чем оценка при второй и третьей попытках. В отличие от режима обучения результаты, полученные в режиме контроля, сохраняются в отдельных файлах, в удобном для преподавателя формате. В полном виде данные хранятся в базе данных, из которой преподаватель может получить всю необходимую ему информацию.

К достоинствам разработанной контролирующей программы можно отнести: повышение качества преподавания на основе быстрого оценивания знаний, умений и навыков студентов; мониторинг учебной аудитории; оперативное управление ходом учебного процесса; наиболее эффективную и удобную работу преподавателя; наличие методической поддержки для организации самостоятельной деятельности студентов.

УДК 004

Особенности разработки ЭУМКД для математических специальностей в системе Moodle

Ю.В. Паутова, Л.А. Хворова

АлтГУ, г. Барнаул

Скептическое отношение ко всякого рода активно внедряемым новшествам в нашем ВУЗе побудили создать «временный творческий» коллектив с целью изучения СДО Moodle, освоения основных технологических элементов системы, способствующих «получению новых знаний», «повышению качества учебно-познавательной деятельности студентов, педагогической деятельности профессорско-преподавательского состава и учебно-методического обеспечения учебных дисциплин, внедрению в учебный процесс инновационных достижений науки и практики», когда «студент является уже не пассивным потребителем знания, а в какой-то степени самостоятельным исследователем» [1].

Электронное обучение, широко распространенное в зарубежных странах, является достаточно новой формой образования в России. Современный электронный университет может дать возможность получить образование на бесплатной основе и в удобное время, а Работодатели могут найти таким образом качественно подготовленных работников.

Электронное образование предполагает проведение стандартных занятий в аудитории, но с использованием электронного обучения – презентаций, видеолекций, компьютерных тестов, компьютерных деловых игр по предмету и т.д.

Наиболее продуктивной формой обучения является использование дистанционных образовательных технологий в дополнение к очному обучению. Действительно, Преподаватель из источника знаний может превратиться в главного консультанта проекта, который выполняет Студент. Роль источника знаний отводится при этом образовательному контенту, размещенному в Интернете.

Несомненно, организованное таким образом смешанное обучение имеет особые преимущества: предоставляется возможность обучения лицам с ограниченными возможностями, иностранным студентам, особенно эффективна эта форма при работе с магистрантами. Внесение в обучение элементов электронного образования может способст-

зовать более гибкому и индивидуальному планированию времени, затрачиваемому магистрантом на обучение.

Проблема развития электронного образования становится актуальной и в АлтГУ. Необходимость развития электронного образования связана, прежде всего, с возможностью увеличения контингента обучающихся в вузе и привлечением дополнительных средств в доходную часть бюджета вуза. Задача электронного обучения состоит в том, чтобы успешно интегрироваться с традиционной формой, усилить и модернизировать традиционную модель обучения.

Согласно изученной многочисленной литературе, «Система электронного обучения предоставляет следующие возможности:

- Структурирование учебного материала по урокам и курсам.
- Индивидуальный график обучения: каждому учащемуся может быть предоставлен свой набор уроков и курсов.
- Встроенный механизм тестирования позволяет проверять усвоенные знания.
- Постоянный контакт с преподавателем.
- Возможность отслеживать активность учащихся.
- Выбор удобного времени и места для обучения.
- Удобный анализ результатов обучения – система электронного обучения позволяет сформировать отчеты по тестированию учащихся.
- Система обучения хранит историю учебного процесса каждого учащегося» [2].

Какие же задачи были решены в процессе проведенного исследования?

Задача 1. Рассмотрены и проанализированы инструментальные системы для организации и управления электронным обучением.

В настоящее время существует значительное количество инструментальных систем для организации электронного обучения. Но большее распространение получила среда **Moodle** (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment) – среда дистанционного обучения, предназначенная для создания дистанционных курсов. Именно *свободное распространение программного пакета Moodle* с открытым исходным кодом предопределяет выбор этой технологической среды многими университетами мира для организации электронного обучения [2].

Кроме того, *простота установки и функционирования Moodle* (легко устанавливается на стандартном оборудовании и работает без модификаций в Unix, Linux, Windows, MacOS и любой другой операционной системе, поддерживающей Php), функциональная полнота (**Moodle** позволяет реализовать практически все функции современной

системы удаленного обучения), открытость программного кода позволяет вносить коррективы, расширять возможности **Moodle** своими программными модулями, – не маловажные особенности **Moodle**, являющиеся определяющими для образовательных учреждений при выборе платформы организации электронного обучения:

Задача 2. Изучены особенности разработки ЭУМКД в СДО **Moodle**.

Изучение особенностей **Moodle** и практическая реализация 3-й задачи исследования показали, что система дистанционного обучения **Moodle** в большей степени применима к гуманитарным дисциплинам и дисциплинам, непосредственно связанным с информатикой и информационными технологиями. Использование электронного обучения в этих направлениях эффективно и целесообразно, начиная с первого знакомства с учебным материалом до решения нетиповых профессионально-ориентированных задач. Разработчики ЭУМКД смогут в полном объеме воспользоваться богатым спектром возможностей, предоставляемых системой **Moodle**.

Однако, для многих математических дисциплин электронное обучение может применяться только частично, на этапах формирования профессиональных специфических умений и навыков. Реализация электронного обучения для Студентов-математиков (дневной формы обучения) при изучении сложных математических дисциплин малоэффективно и создает Преподавателю-разработчику различного рода трудности. Эти факторы должны быть учтены при «поголовной мудлизации» дисциплин.

Задача 3. Разработка электронного курса «Методы оптимизации» в системе **Moodle**.

Дисциплина «Методы оптимизации» [3] преподается студентам 4-го курса факультета математики и информационных технологий АлтГУ в цикле общеобразовательных дисциплин. В данном курсе рассматриваются следующие разделы теории оптимизации и оптимального управления: гладкие задачи безусловной оптимизации, гладкие конечномерные задачи с ограничениями типа равенств, гладкие задачи с равенствами и неравенствами, классическое вариационное исчисление, оптимальное управление.

Текущий контроль осуществляется в форме проверки домашних заданий; промежуточный контроль – в виде контрольных работ по трем базовым темам: классическая теория оптимизации, классическое вариационное исчисление, оптимальное управление, а также тестовый письменный опрос по теоретическим аспектам курса. Итоговый контроль практических умений и навыков осуществляется в форме экза-

мена, который предусматривает знание теоретического материала и умение решать задачи.

К разработке ЭУМКД экспертной комиссией предъявляется ряд требований. Выделим лишь некоторые из них, по которым возникает ряд вопросов к составителям требований и «оценщикам» УЭМКД.

1. Наличие тестовых заданий в формате элемента курса «Тест».

Комментарий: количество вопросов в Банке вопросов определяет балл Преподавателю-разработчику УЭМКД!?

2. Наличие заданий для студентов с использованием элементов системы **Moodle**.

Комментарий: количество используемых элементов также определяет балл Преподавателю-разработчику УЭМКД в независимости нужны и удобны ли они для реализации в рамках данного электронного курса!?

3. Наличие лекций.

Комментарий: эксперты оценивают курс, если в наличии не менее 5-ти активных лекций. Причем, засчитываются лекции, состоящие как минимум из 3-х страниц контента и 3-х страниц с контрольными вопросами – по одному после каждой страницы контента. Аналогично, количество таких элементов определяет балл Преподавателю-разработчику!?

В процессе разработки ЭУМКД были использованы следующие модули системы **Moodle**: База данных, Вики, Глоссарий, Задание, Лекция, Форум, Чат, Папка, Страница, Файл.

Задача 4. Оценка эффективности организации учебного процесса с помощью **Moodle**.

В настоящее время повсеместно происходит внедрение электронных технологий в образовательный процесс. Но в большинстве своем такое внедрение является малоэффективным вследствие следующих причин:

- 1) осуществляется не системно;
- 2) требует огромных затрат времени для качественной подготовки материала;
- 3) модули **Moodle** малоэффективны при разработке классических математических дисциплин.

Так, элемент курса «Глоссарий» неудобен в приложении к математическим дисциплинам, так как в определениях используются математические формулы. Ввод формул необходимо осуществлять заново, либо с использованием текстового редактора *TeX*, либо с помощью редактора формул *DragMath*, либо вставлять рисунками.

Элемент курса «Тест» затруднительно использовать по тем же причинам.

Использование элемента «Лекция» так же требует перенабора формул, которые являются основой лекций.

Модуль «Семинар», по своему замыслу, практически не реализуем для математических дисциплин, так как предполагает только коллективное обсуждение некоторой проблемы.

Тем не менее, нами был использован возможный и удобный инструментарий **Moodle**. В настоящее время ЭУМКД «Методы оптимизации» доступен на сайте АлтГУ (<http://portal.edu.asu.ru/course/view.php?id=912>).

В заключение сделаем несколько замечаний:

1. С экономической точки зрения электронное обучение наиболее целесообразно, если имеется большое число широко рассредоточенных учащихся.

2. Невозможно найти инструментарий, идеально подходящий для всех направлений профессиональной подготовки Студентов, реализующий дидактические цели Преподавателей различных областей знаний. Для каждой категории дисциплин нужен свой специально разработанный программный инструментарий.

3. Высокая трудоемкость процесса разработки ЭУМКД! Электронные средства обучения создаются Преподавателями для своих учебных дисциплин практически в одиночку. Прежде, чем ЭУМКД в системе **Moodle** примет «потребный» вид, Преподавателю необходимо затратить не один месяц кропотливой работы!

4. Необходимо помнить, что одно дело – разработать качественно ЭУМКД, и совсем другое дело – эффективно его использовать в своей работе!

Библиографический список

1. Положение об электронном учебно-методическом комплексе дисциплины. http://portal.edu.asu.ru/pluginfile.php/23003/mod_resource/content/1/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5%20%D0%BE%D0%B1%20%D0%AD%D0%A3%D0%9C%D0%9A%D0%94.doc.

2. Соловов А.В. Технологические средства электронного обучения. Саратов: 2008. <http://window.edu.ru/resource/173/56173>.

3. Хворова Л.А., Жариков А.В. Методы оптимизации и вариационное исчисление: учебное пособие. Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013. 180 с.

О методическом оснащении практических занятий по курсу «Высшая математика»

Е.А. Плотникова, Е.В. Саженкова
НГТУ, НГУЭУ, г. Новосибирск

Изучение нового математического материала, даже при достаточно доступном изложении, уже требует серьёзной и глубокой работы мысли. А ведь работа студента над учебником – это всего лишь усваивание чужих мыслей. Когда студент решает задачи, то происходит активное развитие мышления, если преподаватель умело направит движение его мысли. В этом смысле громадна роль подбора задач для практических занятий и их сопровождение методическими рекомендациями преподавателя. Остановимся на некоторых моментах, позволяющих успешно продвигать обучающихся в изучении математической дисциплины.

1. Прежде всего, подбор задач должен быть целенаправленным, Полезно, чтобы перед изучением раздела преподаватель ставил понятные цели и объяснял, при решении каких задач какие умения должны приобрести студенты, в каких задачах, на что надо обратить внимание. Короче говоря, задачи должны быть прокомментированы. Студенты не должны приступать к решению задач вслепую.

2. Необходимо расположить задачи по степени возрастания их трудности и объёмности. Для этого следует внимательно огнестись уже к самому процессу решения задач студентами и при необходимости перестроиться в этом процессе. Поскольку может оказаться, что задачи, которые преподаватель считал не сложными, для данного студенческого контингента таковыми не являются.

3. Дать студенту такие приёмы решения задач, которые приемлемы на базе формул, предлагаемых к использованию теоретическим курсом. То есть научить подходу к задаче, тому, с чего начать, как продвигаться дальше, как использовать формулы, на что обратить внимание, к чему стремиться, Тем самым преподаватель обязан направить мышление студента. Эти указания должны содержать самое существенное математическое ядро рассматриваемого раздела, научить под-разделять сложные объёмные задачи на составные части.

Практические занятия по курсу «Высшая математика» не должны носить характер натаскивания на определённый круг задач, а должны вооружать математическими знаниями, навыками и умениями доста-

точными для решения широкого круга прикладных задач, возникающих в технических и экономических дисциплинах.

Библиографический список

1. Плотникова Е.А., Саженкова Е.В. О формировании системы задач в курсе «Высшая математика» в техническом и экономическом вузах // Ломоносовские чтения на Алтае: сборник научных статей международной школы-семинара, Барнаул; 8–11 ноября 2011 г. – Барнаул: АлтГПА, 2011. – Ч. III. – С. 83-85.
2. Дюбюк П.Е. и др. Сборник задач по курсу высшей математики. – М.: Высшая школа, 1965. – 592 с.
3. Ермаков В.И. и др. Сборник задач по высшей математике для экономистов. – М.: Инфа-М, 2003. – 575 с.
4. Погорелов А.И. Сборник задач по высшей математике: учебно-методическое пособие для студентов-заочников. – М.: Учпедгиз, 1949. – 196 с.

УДК 378.147

Об использовании ЭУМКД в учебном процессе

Е.В. Прокопенко, В.Б. Ким

КузГТУ им. Т.Ф. Горбачева, КемГУ, г. Кемерово

Современный период развития цивилизованного общества характеризует процесс информатизации. Одним из приоритетных направлений процесса информатизации современного общества является информатизация образования – внедрение новых информационных технологий (НИТ) в систему образования. При этом в силу некоторой расплывчатости самого понятия НИТ необходимо каждый раз уточнять, какая сторона указанного процесса имеется в виду.

Простейшей и наиболее распространенной формой автоматизации обучения является применение ЭВМ в учебном процессе. Первоначально компьютеры использовались лишь при изучении математических и компьютерных наук, т.е. играли такую же роль, какую играют пробирки, колбы и прочее оборудование при изучении, например, химии или физики. Сам же учебный процесс при этом оставался неизменным: лекции, семинары, мел, доска, ручка, тетрадь, зачеты, экзамены. В настоящее время мы являемся свидетелями того, как под напором НИТ традиционные формы обучения уступают место новым.

Не распыляя сил на обзор и анализ множества всевозможных аспектов внедрения НИТ в учебный процесс, остановимся подробнее на одной теме – создании и использовании электронных учебно-методических комплексов дисциплин (ЭУМКД)

О важности ЭУМКД говорит тот факт, что согласно аккредитационным требованиям обеспечение всех видов занятий по дисциплинам учебного плана учебно-методической документацией должно составлять 100%. Очевидно, что в отличие от УМК в бумажном исполнении лишь ЭУМКД могут обеспечить доступность и оперативное обновление при сравнительно небольших ресурсных затратах. Тем самым создание ЭУМКД значительно упрощает наполнение библиотечных систем, обеспечение образовательного процесса и сам ход проведения занятий.

Суть любого процесса обучения состоит в передаче информации от одного человека (учителя) другому (ученику). Использование ЭУМКД позволяет автоматизировать и оптимизировать этот процесс и, самое главное, сделать ученика его активным участником, у которого появляется возможность регулировать многие параметры учебного процесса: объем изучаемого материала, уровень сложности и т.п.

Из сказанного понятно, что далеко не каждый ЭУМКД обладает необходимым уровнем обратной связи (интерактивностью). Содержательную основу большинства существующих курсов составляют лекции в виде текстовых материалов и простейших графических объектов (рисунки, фото), блоки контроля знаний в виде тестовых заданий. Соответственно при таком подходе к представлению информации вовлеченность обучаемого в учебный процесс не может быть высокой. Это отрицательно сказывается на усвоении знаний, а также приобретении навыков и умений.

Несомненные плюсы ЭУМКД:

Дифференцированный подход к обучению – студент, может самостоятельно решать, когда и сколько времени в течение семестра ему уделять на изучение основного и дополнительного материала.

Социальное равноправие – равные возможности получения образования независимо от места проживания, состояния здоровья, элитарности и материальной обеспеченности обучаемого. Не случайно в проектах новых ФГОС заложено наличие условий для возможности обучения лиц с ограниченными возможностями

Технологичность - использование в образовательном процессе новейших достижений информационных и телекоммуникационных технологий.

Творчество – комфортные условия для творческого самовыражения обучаемого.

Кроме того, возможность публикации ЭУМКД в глобальной сети, дает возможность полного доступа к материалам курса не только студентам данного факультета, но и всем студентам без исключений. Также, может повышать свои знания любой человек, для которого будет открыт доступ к материалам.

Нельзя не упомянуть о недостатках таких методов обучения.

Их можно разделить на: 1) психологические, связанные с отсутствием «живого» общения с преподавателем, высокими требованиями к самоорганизации и 2) технические, которые обусловлены несовершенством контента, технологий и телекоммуникационной инфраструктуры:

а) отсутствие личного общения с преподавателем, а также общение между обучаемыми. А когда рядом нет человека, который мог бы эмоционально окрасить процесс передачи знания, это значительный минус для процесса обучения. Однако развитие каналов коммуникации, позволяет частично нивелировать данный недостаток за счет применения видеоконференцсвязи, интернет-пейджеров и электронной почты;

б) необходимо наличие сильной мотивации обучающегося, если человек не способен учиться без постоянного надзора преподавателей и не готов проводить много времени в уединении с компьютером. Например, лица с ограниченными возможностями более мотивированы к обучению, чем обычные студенты;

в) недостаточная компьютерная грамотность обучающихся и обучаемых;

г) отсутствие соответствующего технического оснащения. Это, как минимум, персональный компьютер, желателен выход в Интернет, базовые навыки пользователя персонального компьютера и умение ориентироваться в сети Internet;

д) наличие ограничений при выборе осваиваемой дисциплины – невозможно обучиться на расстоянии премудростям медицины, актерскому мастерству и т.д.

К общим проблемам можно отнести следующие:

а) к созданию ЭУМКД необходимо привлекать профессиональный состав разработчиков в области информационного обеспечения учебного процесса;

б) требуется наличие собственных или лицензированных разработок в области прикладного программного обеспечения.

Есть и вопросы, требующие дополнительного обсуждения, например,

а) в какой мере могут использоваться в ЭУМКД пакеты прикладных программ такие как Maple, Matcad? Mathematica;

б) нужно ли учить студентов традиционным дисциплинам (например, начертательная геометрия, черчение, инженерная графика)), если в настоящее время имеется много пакетов прикладных программ и САПР, которые могут быстрее и лучше выполнять конкретные прикладные задачи.

Нет сомнения, что ЭУМКД будет все сильнее входить в нашу систему образования. Этот процесс будет усиливаться по мере развития технологий, которые смогут обеспечить реалистичность виртуального пространства. Следует сказать, что Минобрнауки утвердил перечень направлений подготовки и специальностей, обучение по которым возможно лишь с использованием информационно-коммуникационных технологий.

Психологическая проблема, связанная с необходимостью высокой самоорганизации, мотивации и отсутствием живого общения, скорее всего, будет решаться по мере развития общества.

Библиографический список

1. Московский центр качества образования. Режим доступа: http://mcko.ru/accreditation/doc_dlya_accr/.

2. Воронцов, А. Преимущества и недостатки дистанционного обучения / А. Воронцов, энциклопедия знаний в области информационной поддержки жизненного цикла знаний. Режим доступа: <http://www.redcenter.ru/>.

3. Бизнес – образование в России. MBA (Master of Business Administration) программа профессионального дополнительного высшего образования в сфере управления (менеджмента). Режим доступа: <http://www.curator.ru/>.

УДК 51

Факультативно-кружковая работа по математике со школьниками как средство развития творческих способностей и профессиональной ориентации

А.Н. Саженов, Т.В. Саженова
АлтГУ, г. Барнаул

Факультативно-кружковая работа со школьниками преследует це-

ли:

- подготовка учащихся к успешному решению задач высокого уровня сложности;
- расширение математического кругозора за счет освоения новых, так называемых, олимпиадных разделов математики;
- осуществление индивидуальной и командной подготовки учащихся к олимпиадам, турнирам и другим математическим соревнованиям.

Содержательная математическая составляющая этой работы может быть весьма разнообразной. Рассмотрим несколько приемлемых разделов.

Нестандартные приёмы исследования уравнений, неравенств и систем

Важное внимание здесь предстоит уделить функционально-графическим методам решения задач. Эти методы позволяют показать учащимся достаточно лаконичное и наглядное осуществление решения задач, при аналитическом решении которых велика вероятность проматрива каких-то из возможных случаев.

С другой стороны, для уравнений и неравенств с разнотипными функциями явное решение задачи может оказаться в принципе невозможным.

Классические теоремы элементарной геометрии

Решение геометрических задач даёт замечательную возможность выработки у учащихся хорошего логического и последовательного мышления. Геометрия – это большая игра по определённым аксиоматическим правилам, отражающим определённые закономерности окружающего мира. Решение задач здесь обычно объединяет в себе несколько соображений – очень редко задача решается «в один ход». На таких примерах полезно объяснять школьникам, что – это общий принцип решения задач.

Классические олимпиадные темы

Знакомство с тематикой данного раздела позволяет расширить математический кругозор учащихся. К примеру, весьма распространены задачи на инвариант. Идея инварианта проникает в самые различные области науки. В качестве примера можно обратиться к физике, а именно к законам сохранения энергии, импульса и т. п.

Замечательными математическими объектами являются графы. Они возникают очень часто и оказываются чрезвычайно полезными при решении многих, внешне не похожих друг на друга задач.

А с помощью задач-игр преподаватель может внести в занятие элемент развлечения, соревнования. В то же время такие задачи содержа-

тельны. При их изложении школьники обычно испытывают большие трудности. Ведь в них необходимо, во-первых, грамотно сформулировать стратегию, а во-вторых, доказать, что она действительно ведёт к выигрышу.

Библиографический список

1. Саженов А.Н., Саженова Т.В. Классические олимпиадные темы. Часть 1. Практикум. – Барнаул: Концепт, 2005.
2. Саженов А.Н. Классические олимпиадные темы. Часть 2. Практикум. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2006.
3. Саженов А.Н., Саженова Т.В., Плотникова Е.А. Математическое творчество: классические олимпиадные темы и задачи высокого уровня сложности. Часть 1. Практикум. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, Барнаул, 2013.

УДК 378.14

Об интерактивном обучении математической логике

Т.М. Тушкина

БТИ (филиал) АлтГТУ им. И.И. Ползунова

Математическая логика имеет массу практических приложений, одним из которых является право. Объекты, создаваемые в ходе правового регулирования и научного исследования, выступают как определенные логико-языковые феномены. Это обуславливает возможность и необходимость использования законов, правил, приемов и способов логики.

На протяжении ряда лет автор в учебном процессе по математической логике успешно применяет деловую игру «Суд присяжных». В основе сценария деловой игры лежит определенная логическая задача, под которую придумывается история из современной российской реальности. В качестве базовых были рассмотрены, например, задачи «Карта дорог», «Злоумышленники» [1]. Перед присяжными из числа обучающихся разыгрывается театрализованное представление с участием «судьи», «подсудимых», «адвокатов», «прокурора» и «свидетелей». Задача присяжных заключается в том, чтобы, основываясь на методах формальной логики, решить, могли ли подсудимые совершить то преступление, которое им инкриминируется или нет. В процесс деловой игры при желании можно включить специалистов из других областей знаний, например, информационных технологий, химии, биоло-

гии и др., с целью проведения экспертизы материалов уголовного дела.

Описываемая форма проведения занятий может применяться как в учебном, так и во внеучебном процессе школы и вуза. Сам подход нельзя не признать эффективным по ряду причин. Вполне очевидно, что математическое образование многофункционально и должно ориентировать человека не только на осуществление специализированной деятельности по рациональному использованию математического аппарата, но и способствовать развитию личностных качеств обучающихся. С другой стороны, рассмотрение на учебных занятиях задач практической направленности необходимо для формирования компетенций, необходимых в дальнейшей профессиональной деятельности.

Библиографический список

1. Кольман Э., Зих О. Занимательная логика. – М.: Наука, 1966. – 128 с.

НАШИ АВТОРЫ

Ан Олег Андреевич, студент, Алтайский государственный университет, e-mail: oleg2012g@yandex.ru.

Андреева Вероника Николаевна, магистрант, Алтайский государственный университет, e-mail: andruyscha@mail.ru.

Алгазин Геннадий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, заведующий кафедрой математических методов в социальных науках, e-mail: algaz46@yandex.ru.

Ахмерова Ирина Геннадьевна, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, доцент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: iakhmerova@mail.ru

Баянова Надежда Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: bayanova@math.asu.ru.

Боярская Алина Викторовна, студент, Алтайский государственный университет, e-mail: bosya_241292@mail.ru.

Брыксин Виталий Михайлович, кандидат технических наук, доцент, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, НИИ прикладной информатики и математической геофизики, ведущий научный сотрудник, e-mail: VBryksin@kantiana.ru.

Будкин Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, заведующий кафедрой алгебры и математической логики, e-mail: budkin@math.asu.ru.

Гончарова Ольга Николаевна, доктор физико-математических наук, Алтайский государственный университет, профессор кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: gon@math.asu.ru.

Данько Евгений Викторович, аспирант факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета, e-mail: jai-white@mail.ru.

Дорофеева Алина Юрьевна, аспирант факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета, e-mail: drofane@gmail.com.

Дронов Сергей Вадимович, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, доцент кафедры математического анализа, e-mail: dsv@math.asu.ru.

Дьякова Татьяна Владимировна, магистрант, Алтайский государственный университет, e-mail: Dyakova.1991@mail.ru.

Евтюшкин Аркадий Викторович, кандидат физико-математических

наук, доцент, Балтийский федеральный университет им. И.Канта, НИИ прикладной информатики и математической геофизики, заведующий лабораторией, e-mail: AYevtyshkin@kantiana.ru.

Еремочкин Сергей Юрьевич, ассистент кафедры электротехники и автоматизированного электропривода Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова, e-mail: Vens-1@yandex.ru.

Жданова Евгения Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайская академия экономики и права.

Жданов Евгений Петрович, кандидат экономических наук, доцент Алтайский государственный университет, e-mail: 9zhdanov@gmail.com

Жилин Сергей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, заведующий кафедрой информатики, e-mail: sergei@asu.ru.

Журавлев Евгений Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: evzhuravlev@mail.ru.

Журавлева Вера Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: vvzhuravleva@mail.ru.

Закурдаева Алла Витальевна, студент, Алтайский государственный университет, e-mail: alla2300@bk.ru.

Ильина Дарья Вячеславовна, студентка, Алтайский государственный университет, e-mail: ilina.darya.92@yandex.ru.

Калиниченко Евгения Николаевна, студент, Алтайская государственная педагогическая академия, e-mail: black_heart-90@mail.ru.

Каракулова Ирина Владимировна, магистрант, Алтайский государственный университет, e-mail: mail_for_igina@inbox.ru

Ким Виталий Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Кемеровского государственного университета, e-mail: dekim@kemsu.ru, kim.vitaly2013@yandex.ru

Кистанова Алина Владимировна, студент, Алтайский государственный университет, e-mail: nokia1992a@mail.ru.

Клепиков Павел Николаевич, студент, Алтайский государственный университет, лаборант-исследователь ООС НИОКТР, e-mail: askingnetbarnaul@gmail.com.

Кожемякина Анастасия Сергеевна, студент Новосибирского государственного университета, e-mail: a.s.kozhemyakina@gmail.com.

Колосовский Максим Александрович, аспирант, Алтайский государ-

ственный технический университет им. И.И. Ползунова, факультет информационных технологий, кафедра прикладной математики, e-mail: Maxim.astu@gmail.com.

Комаров Павел Владимирович, аспирант, Алтайский государственный университет, e-mail: zernosbit@mail.ru.

Королев Дмитрий Анатольевич, студент, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, e-mail: aer.astu@ya.ru.

Кравченко Галина Владимировна, кандидат педагогических наук, доцент, Алтайский государственный университет, e-mail: kravchenko@math.asu.ru.

Курочкин Дмитрий Владимирович, аспирант факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета, e-mail: d.igel@mail.ru.

Крючкова Елена Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, профессор кафедры прикладной математики, e-mail: kruchkova_elena@mail.ru.

Кузиков Сергей Семенович, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, доцент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: sskuzikov@mail.ru.

Линевич Любовь Андреевна, кандидат педагогических наук, Московская академия предпринимательства при правительстве г. Москвы, Барнаульский филиал; доцент кафедры гуманитарных, социально-экономических, математических и естественнонаучных дисциплин, e-mail: linevich-l@mail.ru.

Литинский Никита Алексеевич, аспирант факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета, e-mail: nikhailor@mail.ru.

Лодейщикова Виктория Владимировна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова, e-mail: lodeischikova@gmail.com.

Лямкина Юлия Борисовна, преподаватель кафедры информатики, Алтайский государственный университет, e-mail: lyamkina@inbox.ru.

Мадерн Светлана Сергеевна, студентка, Алтайский государственный университет, e-mail: svetlana.madern@mail.ru.

Маничева Анастасия Станиславовна, кандидат технических наук, Алтайский государственный университет, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: manichevaas@gmail.com.

Матюнин Евгений Васильевич, аспирант факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета, e-mail: matyunin@vc.asu.ru.

Немчинова Кристина Алексеевна, студент, Алтайский государственный университет, e-mail: knemchikova@mail.ru.

Никеев Сергей Сергеевич, студент, Алтайский государственный университет, e-mail: nikeev.414@gmail.com.

Отмахов Дмитрий Сергеевич, магистрант, Алтайский государственный университет, e-mail: otmahov.dmitrii@mail.ru.

Оскорбин Дмитрий Николаевич, преподаватель кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, e-mail: oskorbin@yandex.ru.

Павлов Александр Сергеевич, сервисный инженер, ЕЕтЕ техническая поддержка, e-mail: r1d3r_barnaul@mail.ru.

Папин Александр Алексеевич, доктор физико-математических наук, Алтайский государственный университет, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, e-mail: papin@math.asu.ru.

Пастухова Светлана Владимировна, студент, Алтайский государственный университет, e-mail: pastukhova.svetlana.1992@gmail.com.

Паутова Юлия Викторовна, студент, Алтайский государственный университет.

Плотникова Елена Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Новосибирского государственного технического университета, e-mail: pselena@gmail.com.

Поликанова Ирина Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайская государственная педагогическая академия, доцент кафедры геометрии, e-mail: Anix1@yandex.ru.

Половикова Ольга Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, доцент кафедры информатики, e-mail: pon@asu.ru.

Понькина Елена Владимировна, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: ponkinaelena77@mail.ru.

Пономарев Игорь Викторович, кандидат физико-математических наук, Алтайская государственная педагогическая академия, доцент кафедры геометрии и математических методов в экономике, e-mail: igorpon@mail.ru.

Прокопенко Евгения Викторовна, кандидат физико-математических наук, Кузбасский государственный технический университет, доцент

кафедры прикладных информационных технологий, e-mail: rev-05@mail.ru.

Пронь Сергей Петрович, кандидат технических наук, Алтайский государственный университет, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: pspron@mail.ru.

Пышнограй Григорий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайская государственная педагогическая академия, заведующий кафедрой математического анализа и прикладной математики, email: pyshnogra@mail.ru.

Пятков Владислав Дмитриевич, аспирант, Алтайский государственный университет, e-mail: vldpyatkov@gmail.com.

Резанова Екатерина Валерьевна, аспирант факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета, e-mail: katerezanova@mail.ru.

Родионов Евгений Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, профессор кафедры математического анализа, e-mail: edr2002@mail.ru.

Роцупкин Кирилл Валерьевич, аспирант факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета, e-mail: madjagames@gmail.com

Савченко Виталий Валерьевич, аспирант, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, e-mail: 64svv@ Rambler.ru.

Саженков Александр Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, заведующий кафедрой математического анализа, e-mail: san@math.asu.ru.

Саженкова Елена Владимировна, преподаватель Новосибирского государственного университета экономики и управления, e-mail: sazhenkovs@yandex.ru.

Саженков Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, e-mail: sazhenkovs@yandex.ru.

Саженкова Татьяна Владимировна, доцент кафедры математического анализа Алтайского государственного университета, e-mail: sazhenkov_an@mail.ru.

Сазонова Антонина Станиславовна, аспирант факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета, antonina1282@mail.ru.

Сартакова Полина Евгеньевна, студент, Алтайский государственный университет, email: polly064@ Rambler.ru.

Сибин Антон Николаевич, студент, Алтайский государственный университет, e-mail: sibin_anton@mail.ru.

Сидун Дарья Юрьевна, студент, Алтайский государственный университет, dsidun@mail.ru.

Сидун Лариса Викторовна, аспирант факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета, ведущий программист кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: sidun@math.asu.ru.

Славский Виктор Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Югорского государственного университета, e-mail: slavsky2004@mail.ru.

Смолякова Лариса Ленгардовна, старший преподаватель кафедры информатики, Алтайский государственный университет, e-mail: knaus.larisa@gmail.com.

Соркин Кирилл Максимович, магистрант, Алтайский государственный университет, e-mail: 4ебурек1@mail.ru.

Стальная Мая Ивановна, кандидат технических наук, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, профессор кафедры электротехники и автоматизированного электропривода, e-mail: aer.astu@ya.ru.

Суханов Сергей Иванович, кандидат технических наук, Алтайский государственный университет, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: sukhanov-s@yandex.ru.

Сюльдина Лидия Сергеевна, аспирант факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета, ООО ЭЛИТИ, e-mail: lida.plus@mail.ru.

Тарасов Ярослав Александрович, магистрант, Алтайский государственный университет, e-mail: fandelle@mail.ru.

Титова Анастасия Андреевна, студент, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, e-mail: aer.astu@ya.ru.

Токарева Маргарита Андреевна, аспирант факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета, e-mail: tma25@mail.ru.

Трегубова Юлия Борисовна, аспирант Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова, e-mail: jtregubova@gmail.com.

Тушкина Татьяна Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики Бийского технологического института, e-mail: tanyamt@mail.ru.

Устюжанова Алла Владимировна, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, до-

цент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: ustyuzhanova.pgs@math.asu.ru.

Филатов Антон Валентинович кандидат физико-математических наук, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, НИИ прикладной информатики и математической геофизики, ВНС, e-mail: An-Filatov@kantiana.ru.

Хворова Любовь Анатольевна, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, профессор кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: hla@math.asu.ru.

Хромова Олеся Павловна, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, доцент кафедры математического анализа, e-mail: khromova.olesya@gmail.com.

Чешкова Мира Артемьевна, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, профессор кафедры математического анализа, e-mail: сma@math.asu.ru, cheshkov@ab.ru.

Чубарова Галина Эдуардовна, магистрант, Алтайский государственный университет, e-mail: chubarova_galina@mail.ru.

Шарый Сергей Петрович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института вычислительных технологий СО РАН, e-mail: shary@ict.nsc.ru.

Шахова Светлана Александровна, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: sashakhova@gmail.com.

Шефер Мария Валерьевна, студент, Алтайский государственный университет, e-mail: shefermasha21@mail.ru.

Шишмарев Константин Александрович, лаборант-исследователь лаборатории математического моделирования в механике неоднородных сред; младший научный сотрудник ООС НИОКТР, e-mail: shishmarev.k@mail.ru.

Яркова Ольга Андреевна, студент, Алтайский государственный университет.

Содержание

Секция 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА.....	3
<i>Баянова Н.В.</i> О новом классе m -групп	3
<i>Будкин А.И.</i> Об абсолютно замкнутых группах в квазимногообразиях групп.....	4
<i>Журавлев Е.В.</i> О классификации конечных локальных колец	5
<i>Ильина Д.В.</i> Квазимногообразия 2-ступенно нильпотентных групп простой экспоненты	7
<i>Лодейщикова В.В.</i> Об одном классе Леви экспоненты $2p$	7
<i>Отмахов Д.С.</i> О квазимногообразиях групп аксиоматического ранга 28	
<i>Стальная М.И., Еремочкин С.Ю., Королев Д.А.</i> Замечательная таблица степеней четных чисел	9
<i>Стальная М.И., Еремочкин С.Ю., Титова А.А.</i> Замечательная таблица степеней нечетных чисел	11
<i>Шахова С.А.</i> Специальные амальгамированные базисы в квазимногообразиях абелевых групп.....	13
<i>Шефер М.В.</i> О 2-квазитожествах в группах	14
Секция 2. ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ.....	16
<i>Андреева В.Н., Дронов С.В.</i> Визуализация иерархических кластерных алгоритмов	16
<i>Дронов С.В.</i> Единственность сегмента класса N , исчерпываемого всеми своими подсегментами.....	19
<i>Клепиков П.Н., Хромова О.П.</i> О левоинвариантных римановых метриках четырехмерных групп Ли с гармоническим тензором конциркулярной кривизны.....	21
<i>Никеев С.С., Чешкова М.А.</i> Односторонние поверхности.....	24
<i>Оскорбин Д.Н.</i> О вычислении спектра оператора кривизны конформно плоских метрических групп Ли	29
<i>Пастухова С.В.</i> О формулах тригонометрии Лобачевского в терминах рациональной тригонометрии.....	30

<i>Поликанова И.В.</i> О линиях с фиксированным максимумом точек пересечения с гиперплоскостями.....	33
<i>Родионов Е.Д., Славский В.В.</i> Деформации римановых метрик и кривизна	35
<i>Саженков А.Н., Сартакова П.Е.</i> Об оценке площади треугольника замечательных точек.....	36
<i>Чешкова М.А.</i> Обмотка тора и лист Мебиуса.....	37
Секция 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ	41
<i>Ахмерова И.Г.</i> Стабилизация решения нестационарной неизотермической одномерной начально-краевой задачи о движении двухфазной смеси.....	41
<i>Гончарова О.Н., Жилин С.И., Пятков В.Д.</i> Численный алгоритм решения трехмерных задач конвекции на основе параллелизации в методе расщепления по физическим процессам	42
<i>Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Тарасов Я.А.</i> Математическое моделирование конвективных течений жидкости с учетом испарения в приближении тонкого слоя	43
<i>Гончарова О.Н., Павлов А.С., Соркин К.М.</i> Численное моделирование вихревых структур в частично открытой прямоугольной кювете в условиях постоянных касательных напряжений на свободной границе ..	45
<i>Гончарова О.Н., Чубарова Г.Э.</i> Моделирование двухслойных течений жидкости и газа по наклонной подложке: построение точных решений.	47
<i>Жданов Е.П., Жданова Е.М., Каракулова И.В.</i> Задача о распределении температуры в глубоководном озере, окруженном горным массивом с теплым притоком	50
<i>Закурдаева А.В., Резанова Е.В.</i> Численное исследование влияния тепловых режимов на динамику и процессы теплопереноса в сферическом слое со свободными границами.....	54
<i>Калиниченко Е.Н., Пышинограй Г.В.</i> Математическая модель процесса формирования пленок из раствора полимера.....	57
<i>Каракулова И.В.</i> Расчёт гидродинамических процессов водохранилища ГЭС.....	59

<i>Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н.</i> Численное моделирование процесса суффозионного выноса грунта	61
<i>Мадерн С.С., Устюжанова А.В.</i> Численное решение задачи о напряженном состоянии вблизи трещины отрыва	65
<i>Резанова Е.В.</i> Математическое моделирование двухслойных течений с испарением на основе точных решений	67
<i>Саженков С.А.</i> Метод Аллера–Бриана для описания воздушных потоков у поверхности листа растения с учетом влияния опущения ..	69
<i>Саженков С.А., Саженкова Е.В.</i> Просачивание двухфазной жидкости через пористый грунт: вывод нелокальной модели Био методом двухмасштабной сходимости	72
<i>Шиммарев К.А.</i> Численное исследование краевой задачи о колебаниях тонкой ледовой пластины	74
<i>Токарева М.А.</i> Задача фильтрации жидкости в тонком слое льда	77
<i>Трегубова Ю.Б., Пышнограй Г.В.</i> Сравнение математических моделей процесса формирования полимерных пленок	78
Секция 4. ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ	81
<i>Ан О.А., Жилин С.И.</i> Веб-приложение для оценки показателей неопределенности измерений с малым числом наблюдений	81
<i>Брыксин В.М., Евтюшкин А.В., Филатов А.В.</i> Адаптация StaMPS на кластере для мониторинга подвижек земной поверхности	84
<i>Гуров А.В., Пономарев И.В.</i> Алгоритмы решения нечетких отношений равенств	88
<i>Дорофеева А.Ю.</i> Проблемы семантического поиска	89
<i>Колосовский М.А.</i> Обнаружение автомобилей в системе видеонаблюдения за пешеходными переходами	90
<i>Половикова О.Н.</i> Преимущества использования Акторного Пролога для реализации семантического поиска	94
<i>Савченко В.В., Крючкова Е.Н.</i> Алгоритм семантического поиска в больших текстовых коллекциях	96

<i>Суханов С.И.</i> Пересчет объектов капитального строительства из региональных систем координат в систему координат World Geodetic System	100
<i>Шарый С.П.</i> , <i>Кожмякина А.С.</i> О численной реализации метода максимума согласования для восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределённостью	102
Секция 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ, ЭКОНОМИЧЕСКИХ И ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	105
<i>Алгазин Г.И.</i> , <i>Матюнин Е.В.</i> Нахождение множества оптимальных по Парето решений в игре двух лиц с неполной информацией	105
<i>Боярская А.В.</i> , <i>Кистанова А.В.</i> Численное решение задач теплового режима почв	108
<i>Данько Е.В.</i> Численный метод расчета полезности инвестиционных проектов после проведения экспертизы	113
<i>Журавлева В.В.</i> , <i>Дьякова Т.В.</i> Анализ морфодинамики береговой линии Новосибирского водохранилища	115
<i>Курочкин Д.В.</i> , <i>Понькина Е.В.</i> Оценка точности измерения технологической эффективности производственной системы на основе DEA-моделей.....	118
<i>Липинский Н.А.</i> Прогнозирование стоимости фирмы в условиях неопределенности	122
<i>Лямкина Ю.Б.</i> О проблемах создания динамических моделей в системе Anylogic на примере модели симбиотической фиксации азота	123
<i>Маничева А.С.</i> , <i>Комаров П.В.</i> Институциональные факторы при моделировании товарных рынков.....	124
<i>Немчикова К.А.</i> , <i>Хворова Л.А.</i> Решение задачи параметрической идентификации динамических моделей продуктивности агроэкосистем.....	126
<i>Пронь С.П.</i> , <i>Сидун Л.В.</i> , <i>Сидун Д.Ю.</i> Исследование влияния параметров перестрахования накопительной части пенсии на эффективность НПФ	133
<i>Рошупкин К.В.</i> Визуальное моделирование и анализ нелинейной хаотической системы	134

<i>Сазонова А.С., Дронов С.В.</i> О ранжировании показателей по степени важности и их влиянии на кластерную структуру множества	137
<i>Смолякова Л.Л.</i> МГК для анализа данных успешности обучения	140
<i>Сюльдина Л.С.</i> Зарубежный опыт создания пенсионного капитала в модели пенсионной системы России после реформы 2014-2015	144
Секция 6. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ	148
<i>Кравченко Г.В.</i> Организация проектной деятельности студентов в системе Moodle.....	148
<i>Кравченко Г.В., Яркова О.А.</i> Электронно-методическое обеспечение курса «Методика преподавания математики» в среде Moodle.....	152
<i>Линевич Л.А.</i> Особенности применения интерактивных систем контроля знаний в классическом ВУЗе	155
<i>Паутова Ю.В., Хворова Л.А.</i> Особенности разработки ЭУМКД для математических специальностей в системе Moodle	159
<i>Плотникова Е.А., Саженкова Е.В.</i> О методическом оснащении практических занятий по курсу «Высшая математика».....	164
<i>Прокopenко Е.В., Ким В.Б.</i> Об использовании ЭУМКД в учебном процессе.....	165
<i>Саженков А.Н., Саженкова Т.В.</i> Факультативно-кружковая работа по математике со школьниками как средство развития творческих способностей и профессиональной ориентации.....	168
<i>Тушкина Т.М.</i> Об интерактивном обучении математической логике	170
НАШИ АВТОРЫ	172

**Сборник трудов
семнадцатой региональной
конференции по математике «МАК–2014»,
посвященной 40-летию факультета математики
и информационных технологий**

Научное издание

**Оригинал-макет подготовлен
С.С. Максимовой**

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 09.06.2014. Формат 60×84/16
Печать – цифровая. Усл.п.л. 10,39
Тираж 100 экз. Заказ 2014 - __

Отпечатано в типографии АлтГТУ,
656038, г. Барнаул, пр-т Ленина, 46,
тел. (8-3852) 29–09–48

Лицензия на полиграфическую деятельность
ПЛД №28-35 от 15.07.97 г.