



**СБОРНИК ТРУДОВ ВСЕРОССИЙСКОЙ  
КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ**

**Материалы молодежной прикладной  
IT школы «Математические методы  
и модели в экологии»**

Барнаул, 2018

АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ ВОДНЫХ И ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ СО РАН  
АГРОФИЗИЧЕСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
ИНСТИТУТ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА РЕГИОНАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ  
ДВО РАН  
ВОСТОЧНО-КАЗАХСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ С. АМАНЖОЛОВА



**Часть I**  
**СБОРНИК ТРУДОВ ВСЕРОССИЙСКОЙ**  
**КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ**  
**с международным участием**

Алгебра и математическая логика  
Геометрия и анализ  
Дифференциальные уравнения  
и математические модели  
Информационные и вычислительные технологии  
Математическое моделирование производственных, экономических и  
социальных систем  
Теория и методика профессионального образования

**Часть II**  
**Материалы молодежной прикладной**  
**IT школы «Математические методы и модели в экологии»**  
**Барнаул, 28 июня – 1 июля 2018**



Барнаул

---

Издательство  
Алтайского государственного  
университета  
2018

**ББК 22.1я431**  
**М 150**

**Главный редактор**  
профессор Н.М. Оскорбин

**Редколлегия:**

А.И. Будкин, А.В. Жариков, Г.В. Кравченко, А.Г. Петрова,  
Е.Д. Родионов, А.Н. Саженов, Л.А. Хворова

**М 150 МАК : «Математики – Алтайскому краю»** : сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием.– Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2018. – 384 с.

Конференция посвящена памяти профессора кафедры дифференциальных уравнений С.С. Кузикова. Выпуск содержит статьи, в которых представлены основные результаты научных исследований преподавателей вузов, научных сотрудников, аспирантов, докторантов и студентов учебных заведений. Конференция «МАК-2018» представляет собой Российско-Казахстанский проект, целью которого является активизация отношений с ВУЗами Казахстана и проведение конструктивного научного сотрудничества по важным для России и Казахстана направлениям в сфере образования и научно-исследовательской деятельности.

Основные научные и образовательные цели конференции – анализ и обобщение опыта научно-исследовательской работы в области перспективных и приоритетных направлений развития математики, прикладной математики, математического моделирования и информационных технологий в социальных, экономических, экологических системах; интенсификация междисциплинарных исследований, развитие научной активности научно-ориентированной молодежи, привлечение ее к решению актуальных задач современной науки и практики; сохранение и развитие научного потенциала Алтайского края и других регионов.

Конференция проводится при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-41-221003 и Благотворительного Фонда В. Потанина, Договор о гранте № ГПК-71/17.

**ISSN: 2500-3453**

© Алтайский государственный университет, 2018

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сергей Семенович Кузиков – это целая эпоха на математическом факультете Алтайского госуниверситета. Он появился на матфаке АГУ в октябре 1976 г. вместе с другими выпускниками аспирантуры мехмата Новосибирского государственного университета и проработал всю свою жизнь на кафедрах математического анализа и дифференциальных уравнений в качестве старшего преподавателя, доцента, профессора, заведующего кафедрой дифференциальных уравнений. Почти 20 лет он работал деканом математического факультета. Многие поколения наших студентов учились у Сергея Семеновича математике, получали важные жизненные уроки.



Как декан математического факультета и заведующий кафедрой дифференциальных уравнений на протяжении многих лет, он внес значительный вклад в развитие факультета, занимаясь разработкой и экспертизой учебных программ, организацией перехода факультета на многоуровневую подготовку специалистов. В течение многих лет он был членом Краевого жюри по математическим олимпиадам и являлся экспертом различных краевых конкурсов для школьников и студентов.

Сергей Семенович был зачинателем и идейным вдохновителем многих совсем «не математических», но не менее важных для факультета дел. Например, организовал на факультете настоящий хор, которым управлял Р. Галямов. Хор через какое-то время распался, но благодаря неумной натуре Сергея Семеновича появился настоящий джаз-банд, в котором были скрипка, фортепиано, ударные, кларнет и труба. Он сам играл в ансамбле на трубе.

Сергей Семенович очень любил активный отдых, являлся движущей силой, можно сказать, мотором баскетбольной команды преподавателей под названием «Интеграл». Команда «Интеграл» успешно участвовала не только в университетских соревнованиях, но и в первенстве города. Нужно отметить, что весь деканат был заставлен призовыми кубками, и Сергей Семенович очень гордился и спортивными победами и творческими достижениями преподавателей и студентов матфака. С 1986 года началась история команды математиков-

сплавщиков по горным рекам при самом непосредственном участии Сергея Семеновича. Все сплавы средства для команды создавали своими руками, и он умел делать практически все, руки у него были золотые. Потом на своих катамаранах во главе с ним команда прошла горные реки высокой категории сложности.

В своём главном профессиональном деле – математическом творчестве Сергей Семёнович был крайне требователен и в первую очередь – к себе. Его научные труды и учебные курсы отличаются самым высоким уровнем строгости изложения и тщательной выверенностью содержания. Он был достойным представителем академической школы гидродинамиков Сибирского отделения Российской академии наук. Его широкая математическая эрудиция и глубокая вычислительная интуиция не раз помогали в решении задач, которые вставали перед коллективом факультета при выполнении различных хоздоговорных работ, осуществлявшихся в стенах университета. Наша ежегодная конференция МАК была одним из пестуемых детищ декана Кузикова Сергея Семёновича, а сам он был бессменным руководителем её секции «Дифференциальные уравнения и математические методы механики».

Сергей Семенович является Заслуженным работником Алтайского государственного университета и Почетным работником высшего профессионального образования Российской Федерации.

Для нас Сергей Семенович был и навсегда останется примером высочайшей порядочности, благородства и справедливости. Природа щедро одарила его многочисленными талантами – математическими, организаторскими, спортивными, музыкальными, которыми он щедро делился с окружающими.

## Секция 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

УДК 512.545

### Об $\alpha$ -аппроксимируемом многообразии $m$ -групп

**Н.В. Баянова**

*АлтГУ, г. Барнаул*

Напомним [1], что  $m$ -группой называется алгебраическая система  $G$  сигнатуры  $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, * \rangle$ , где  $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$  является решеточно упорядоченной группой ( $\ell$ -группой) и одноместная операция  $*$  - автоморфизм второго порядка группы  $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$  и антиизоморфизм решетки  $\langle G, \vee, \wedge \rangle$ , т.е. для любых  $x, y \in G$  выполнены соотношения:

$$(xy)_* = x_*y_*, \quad (x_*)_* = x, \quad (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*, \quad (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*.$$

Свойства реверсивных автоморфизмов второго порядка были изучены в [2]. Как обычно,  $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ ,  $|x| = x \vee x^{-1}$ .

Класс  $\ell$ -групп ( $m$ -групп)  $X$  называется многообразием  $\ell$ -групп ( $m$ -групп), если существует множество  $\Phi$  тождеств сигнатуры  $\ell$  (сигнатуры  $m$ ) такое, что  $X$  состоит из всех  $\ell$ -групп ( $m$ -групп), на которых истинны все тождества из  $\Phi$ . Множество всех многообразий  $\ell$ -групп ( $m$ -групп)  $L$  ( $M$ ) является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, множества  $L$  и  $M$  являются решетками относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий. Основные свойства решетки многообразий  $m$ -групп были указаны М. Жироде и Й. Рахунеком в [1]. Исследование свойств решетки многообразий  $m$ -групп продолжили В.М. Копытов и Й. Рахунек [3], Н.В. Баянова и А.В. Зенков [4], Н.В. Баянова [5].

Многообразие  $m$ -групп  $Y$  накрывает многообразие  $m$ -групп  $X$  в решетке  $M$  если  $X \subset Y$  и для всякого многообразия  $m$ -групп  $Z$ ,  $X \subseteq Z \subseteq Y$ , выполнено  $Z = X$  или  $Z = Y$ .

Если  $G$  - произвольная  $\ell$ -группа, обозначим через  $G^R$   $\ell$ -группу, полученную из  $G$  обращением порядка, т.е.  $b \leq^R a$  в  $G^R$  тогда и

только тогда когда  $a \leq b$  в  $G$ . Пусть  $V$  - произвольное многообразие  $\ell$ -групп обозначим через  $V^R = \{ G^R \mid G \in V \}$ .

В работе [6] доказано, что  $V^R$  является многообразием  $\ell$ -групп и построен нетривиальный автоморфизм второго порядка  $\theta$  решетки многообразий  $\ell$ -групп, определенный по правилу:  $\theta(V) = V^R$ . Согласно [1], многообразие  $\ell$ -групп называется реверсивным, если  $V = V^R$ . Реверсивными многообразиями  $\ell$ -групп являются многообразия  $\ell$ -групп, определяемые тождествами групповой сигнатурой, многообразия  $\ell$ -групп с субнормальными скачками, а также многообразия  $o$ -аппроксимируемых  $\ell$ -групп, определяемое тождеством  $(x \wedge y^{-1} x^{-1} y) \vee e = e$ . Значение реверсивных многообразий  $\ell$ -групп в изучении решетки  $M$  многообразий  $m$ -групп определяется следующей теоремой.

**Теорема 1.** (М.Жирод, Й. Рахунек, [1]) Всякое множество тождеств, определяющих реверсивное многообразие  $\ell$ -групп, определяет многообразие  $m$ -групп.

В [7] введено  $o$ -аппроксимируемое многообразие  $\ell$ -групп  $C$ , которое содержит все  $o$ -аппроксимируемые накрытия многообразия абелевых  $\ell$ -групп и определяется бесконечной системой тождеств:

- 1)  $(x \wedge y^{-1} x^{-1} y) \vee e = e$
- 2)  $\left( \left( \left[ |x|, |x| \vee |y| \right] \vee e \right) \wedge |x| \right)^n \wedge \left( |x| \vee |x|^{\left( (|x| \vee |y|) \right)} \right) =$   
 $= \left( \left( \left[ |x|, |x| \vee |y| \right] \vee e \right) \wedge |x| \right)^n, n \in N.$

Н.Я. Медведев и С.В. Морозова в [8] изучили свойства многообразия  $\ell$ -групп  $C$ , установив, что оно не является реверсивным и показали, что многообразия  $\ell$ -групп  $C$  и  $\theta(C)$  не имеют накрытий в решетке всех  $o$ -аппроксимируемых многообразий  $\ell$ -групп.

В решетке многообразий  $\ell$ -групп  $L$  рассмотрим многообразие  $\theta(C) \vee_L C$ , которое является реверсивным, поскольку

$$\theta(\theta(C) \vee_L C) = \theta^2(C) \vee_L \theta(C) = C \vee_L \theta(C).$$

Согласно теореме 1 множество  $1$  множество  $\ell$ -групповых тождеств, определяющих многообразие  $\theta(C) \vee_L C$ , также задает многообразие  $m$ -групп  $C_m$ .

Обозначим через  $A = \left( \left[ |x|, |x| \vee |y| \right] \vee e \right) \wedge |x|$ ,  
 $B = \left( \left[ \left( |z| \vee |t| \right)^{-1}, |z|^{-1} \right] \vee e \right) \wedge |z|$ .

**Теорема.** В решетке многообразий  $m$ -групп  $M$  многообразию  $C_m$  определяется следующей бесконечной системой тождеств:

- 1)  $(x \wedge y^{-1} x^{-1} y) \vee e = e$
- 2)  $\left| \left( A^n \wedge \left( |x| \vee |x|^{(|x| \vee |y|)} \right) \right) A^{-n} \wedge \left( B^k \wedge \left( |z| \vee |t|^{(|z| \vee |t|)^{-1}} \right) \right) B^{-k} \right| = e$

где  $n, k \in N$  и многообразию  $m$ -групп  $C_m$  не имеет накрытий в решетке  $o$ -аппроксимируемых многообразий  $m$ -групп.

### Библиографический список

1. Giraudet M., Rachunek J. Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J.– 1999. – № 124(49). – P. 743–766.
2. Баянова Н.В., Никонова О.В. Реверсивные автоморфизмы решеточно упорядоченных групп // Сиб. мат. ж. – 1995. – № 4(36). – С. 765–768.
3. Копытов В.М., Рахунке И. Наибольшее собственное многообразие  $m$ -групп // Алгебра и логика.– 2003.–№ 5(42)– С. 624–635.
4. Баянова Н.В., Зенков А.В. О бесконечной дистрибутивности в решетке многообразий  $m$ -групп // Алгебра и логика. – 2015. – № 1(54)– С. 3–15.
5. Баянова Н.В. О решетке многообразий  $m$ -групп // МАК-2017: сборник трудов всероссийской конференции по математике.– Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. – С. 7-9.
6. Huss M.E., Reilly N.R. On reversing the order of lattice-ordered groups // J. Algebra– 1994. – № 9– P. 176–191.
7. Anderson M., Darnel M., Feil T. A variety of lattice-ordered groups containing all representable covers of the abelian variety // Order– 1991. – № 7– P. 401–405.
8. Medvedev N.Ya., Morozova S.V. On covers in the lattice of representable  $\ell$ -varieties // Czech. Math. J.– 1998. – № 123(48) – P. 821–831.

## Независимая аксиоматизируемость квазимногообразий групп

*А.И. Будкин*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Квазимногообразии групп – это класс групп, определяемый специальными формулами, называемыми квазитожествами. В этой работе изучается вопрос о существовании независимых и  $w$ -независимых базисов квазитожеств, интерес к которому возрос в последнее время. Приведём ряд результатов в данном направлении, полученных к настоящему моменту.

В [1] доказано, что если квазимногообразие групп содержит бесконечную циклическую группу и не содержит бесконечного множества групп простого порядка, то оно имеет независимый базис квазитожеств. Следствием этого явилось то, что для квазимногообразий групп без кручения задача о существовании независимого базиса квазитожеств всегда рассматривается в классе групп без кручения. Условия существования независимого базиса квазитожеств в классе групп без кручения найдены [2]. В частности, оказалось, что ряд широко изучаемых квазимногообразий (например, квазимногообразие, порождённое неабелевой свободной разрешимой группой, всех линейно упорядочиваемых групп) являются таковыми. В [3] исследован вопрос о существовании независимых базисов для всех квазимногообразий, являющихся покрытиями абелевых групп в решётке квазимногообразий разрешимых групп. В [4] найдены условия независимой аксиоматизируемости квазимногообразий универсальных алгебр. В [5] показано, что множество квазимногообразий разрешимых групп, не имеющих независимого базиса квазитожеств в классе групп без кручения, имеет мощность континуума. В [6] построены континуальные серии квазимногообразий нильпотентных групп, не имеющих независимых базисов квазитожеств. В [1] построено квазимногообразие групп, не имеющее независимого базиса квазитожеств, которое можно задать независимой системой универсальных формул. В [7] доказано, что свободная 2-нильпотентная группа ранга  $n$ , большего 1, не имеет независимого базиса квазитожеств в классе групп без кручения. В [8] также показано, что аналогичным свойством обладает, квазимногообразие, порождённое неабелевой группой порядка  $p^3$ , где  $p$  – простое число, отличное от 2. Вопрос о существовании независимых базисов квазитожеств подробно изучался в универсальной алгебре. В [9] показано, что любую

конечную решетку можно вложить в конечную решетку, не имеющую независимого базиса квазитожеств. В [10] доказано существование континуума квазимногообразий унар, не имеющих независимого базиса квазитожеств. Аналогичная теорема доказана в [11] для орграфов, в [12] для унарных алгебр специального вида, в [13] для дифференциальных группоидов и точечных абелевых групп, в [14] в случае (неориентированных) графов (без петель), в [15] для антимногообразий унар. Весьма активно изучаются квазимногообразия, не имеющие независимого базиса квазитожеств, но имеющие  $w$ -независимый базис. Отметим, что наличие  $w$ -независимого базиса у данного квазимногообразия влечёт следующее свойство решётки квазимногообразий: существует бесконечное множество квазимногообразий, все попарные пересечения которых совпадают с рассматриваемым квазимногообразием. Мощность множества таких квазимногообразий найдена в [16] для графов, ориентированных графов, унар, точечных абелевых групп. В [17] построен пример квазимногообразия с двумя унарными операциями, не имеющего независимого базиса, но имеющего  $w$ -независимый базис квазитожеств. Там же найдена конечная унарная алгебра, которая не имеет  $w$ -независимого и, следовательно, независимого базиса квазитожеств. В [18] доказано, что существует квазимногообразие унарных алгебр такое, что (а) в решетке его подквазимногообразий есть континуум элементов, не имеющих покрытий (и, следовательно, независимого базиса квазитожеств), (б) среди них есть континуум квазимногообразий, имеющих  $w$ -независимый базис квазитожеств. В [14] установлено, что для любого квазимногообразия графов, содержащего хотя бы один недвудольный граф, существует континуум его подквазимногообразий, не имеющих независимого базиса квазитожеств.

В данной работе доказана следующая теорема.

**Теорема.** Существует множество  $R$  квазимногообразий нильпотентных групп класса не выше двух, не имеющих независимого базиса квазитожеств в классе  $N_{\{2\}}$  нильпотентных групп ступени не выше двух, имеющих  $w$ -независимый базис квазитожеств в  $N_{\{2\}}$ . Совокупность таких множеств  $R$  континуальна.

### Библиографический список

1. Budkin A.I. Independent axiomatizability of quasivarieties of groups // *Mathematical Notes*. – 1982. – V. 31, №6. – P. 413–417.
2. Budkin A.I. Independent axiomatizability of quasivarieties of generalized solvable groups // *Algebra and Logic*. – 1986. – V. 25, №3. – P. 155–166.

3. Budkin A.I. Independent axiomatizability of quasi-varieties of soluble groups // *Algebra and Logic*. – 1999. – V. 30, №2. – P. 81–100.
4. Budkin A.I. On the independent axiomatizability of quasimanifolds of universal algebras // *Mathematical Notes*. – 1994. – V. 56, №4. – P. 1008–1014.
5. Medvedev N.Ya. Quasivarieties of Z-groups and groups // *Siberian Mathematical Journal*. – 1985. – V. 26, №5. – P. 717–723.
6. Budkin A.I. Quasivarieties of groups having no coverings // *Mathematical Notes*. – 1985. – V. 37, №5. – P. 333–337.
7. Fedorov A.N. Quasi-identities of a free 2-nilpotent group // *Mathematical Notes*. – 1986. – V. 40, №5, – P. 837–841.
8. Fedorov A.N. Subquasivarieties of nilpotent minimal non-Abelian group varieties // *Siberian Mathematical Journal*. – 1980. – V. 21, №6. – P. 840–850.
9. Tumanov V.I. Finite lattices having no independent basis of quasi-identities // *Mathematical Notes*. – 1984. – V. 36, №5. – P. 811–815.
10. Kartashov V.K. Quasivarieties of unars // *Math. Notes*. – 1980. – V. 27, №1. – P. 5–12.
11. Sizi S.V. Quasivarieties of graphs // *Siberian Mathematical Journal*. – 1994. – V. 35, №4. – P. 783–794.
12. Kravchenko A.V. Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2016. – V. 13. – P. 388–394.
13. Basheyeva A., Nurakunov A.M., Schwidefsky M.V., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses. III // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2017. – V. 14. – P. 252–263.
14. Kravchenko A.V., Yakovlev A.V. Quasivarieties of graphs and independent axiomatizability // *Siberian Advances in Mathematics*. – 2017. – V. 20, №2 (2017), 80–89.
15. Kartashova A.V. Antivarieties of unars // *Algebra and Logic*. – 2011. – V. 50, №4. – P. 357–364.
16. Basheyeva A.O., Yakovlev A.V. On w-independent bases for quasi-identities // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – V. 14. – P. 838–847.
17. Gorbunov V.A. Algebraic Theory of Quasivarieties // *Siberian School of Algebra and Logic, Consultants Bureau*, 1998.
18. Gorbunov V.A. Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability // *Algebra and Logic*. – 1977. – V. 16, №5. – P. 340–369.

## УДК 512.55

**О графах делителей нуля коммутативных  
локальных колец**

*Е.В. Журавлев<sup>1</sup>, А.С. Монастырева<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>АлтГУ, г. Барнаул; <sup>2</sup>АлтГПУ, г. Барнаул

Пусть  $S$  – коммутативная полугруппа с нулем,  $x \in S$ ,

$$Ann(x) = \{y \in S \mid xy = 0\}.$$

Введем на  $S$  отношение эквивалентности:

$$\forall x, y \in S \quad x \sim y \Leftrightarrow Ann(x) = Ann(y).$$

Класс эквивалентности элемента  $x \in S$  будем обозначать  $[x]$ , а соответствующее фактормножество  $S/\sim$ .

Отношение  $\sim$  является конгруэнцией на  $S$ : для любых  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$  если  $x_1 \sim x_2$  и  $y_1 \sim y_2$ , то  $x_1 x_2 \sim y_1 y_2$ . Следовательно, мы можем рассматривать фактормножество  $S/\sim$  как полугруппу относительно операции  $[x][y] = [xy]$ . Графом делителей нуля  $\Gamma(S/\sim)$  полугруппы  $S/\sim$  будем называть граф, вершинами которого являются элементы  $S/\sim$  и две вершины  $[x], [y]$  (не обязательно различные) соединяются ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда  $[x][y] = [0]$  (равносильно  $xy = 0$ ).

Пусть  $R$  – конечное коммутативное локальное кольцо с единицей,  $J(R)$  и  $R^*$  – соответственно радикал Джекобсона и группа обратимых элементов кольца  $R$  соответственно,  $F = R/J(R) = GF(p^r)$  – конечное поле из  $p^r$  элементов,  $F^* = F \setminus \{0\}$ . Существуют элементы  $m_1, \dots, m_h \in J(R)$  такие, что кольцо  $R$  раскладывается в прямую сумму  $F$ -модулей (см. [1]):

$$R = F \oplus Fm_1 \oplus \dots \oplus Fm_h.$$

причем

$$J(R) = Fm_1 \oplus \dots \oplus Fm_h.$$

Рассмотрим случай, когда  $char R = 2$  и  $\dim_F J/J^2 = 2$ ,  $\dim_F J^2/J^3 = 2$ ,  $\dim_F J^3 = 1$ ,  $J^4 = 0$ ,

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_1 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw,$$

где  $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$  – базис идеала  $J(R)$  над полем  $F$ ,  $u_1, u_2 \in J/J^2$ ,  $v_1, v_2 \in J^2/J^3$ ,  $w \in J^3$ .

В работе [2] классифицированы с точностью до изоморфизма все кольца  $R$  указанного типа. Наша цель – построить графы делителей нуля  $\Gamma(S/\sim)$  одного из таких колец. А именно, рассмотрим кольцо со следующим умножением базисных элементов:

$$u_1^2 = v_2, \quad u_1 u_2 = u_2^2 = v_1, \quad u_1 v_1 = u_2 v_1 = u_2 v_2 = w, \quad u_1 v_2 = z w,$$

где  $z$  – такой элемент  $F$ , что  $z+1 \notin (F^*)^3$ ,  $z \neq 1$  (см. [2], теорема 1, пункт 9). Непосредственным вычислением получаем, что

$$R = [1] \bigcup_{n_i \in F \setminus \{0,1\}} [n_i u_1 + u_2] \bigcup_{k_i \in F} [u_1] \bigcup_{l_i \in F} [u_2 + k_i v_2] \bigcup_{l_i \in F} [u_1 + u_2 + l_i v_2] \\ \bigcup_{m_i \in F} [m_i v_1 + v_2] \bigcup [v_1] \bigcup [w] \bigcup [0],$$

где

$$[n_i u_1 + u_2] = F^*(n_i u_1 + u_2) + F v_1 + F v_2 + F w, \quad n_i \neq 0, 1,$$

$$[u_1] = F^* u_1 + F v_1 + F v_2 + F w,$$

$$[u_2 + k_i v_2] = F^*(u_2 + k_i v_2) + F v_1 + F w,$$

$$[u_1 + u_2 + l_i v_1] = F^*(u_1 + u_2 + l_i v_2) + F(v_1 + v_2) + F w,$$

$$[m_i v_1 + v_2] = F^*(m_i v_1 + v_2) + F w,$$

$$[v_1] = F^* v_1 + F w,$$

$$[w] = F^* w, \quad [0] = \{0\}, \quad [1] = R^*,$$

и для любых  $l_i, m_i, m_j, n_i, k_i \in F$ ,  $i, j \in \{1, \dots, p^r\}$ ,

$$Ann(n_i u_1 + u_2) = \left[ \frac{1+n_i z}{1+n_i} v_1 + v_2 \right] \bigcup [w] \bigcup [0], \quad n_i \neq 0, 1,$$

$$Ann(u_1) = [z v_1 + v_2] \bigcup [w] \bigcup [0],$$

$$Ann(u_2 + k_i v_2) = [u_1 + u_2 + (1+z)k_i v_1] \bigcup [v_1 + v_2] \bigcup [w] \bigcup [0],$$

$$Ann(u_1 + u_2 + l_i v_1) = \left[ u_2 + \frac{l_i}{1+z} v_2 \right] \bigcup [v_1] \bigcup [w] \bigcup [0],$$

$$Ann(z v_1 + v_2) = [u_1] \bigcup_{m_i \in F} [m_i v_1 + v_2] \bigcup [v_1] \bigcup [w] \bigcup [0],$$

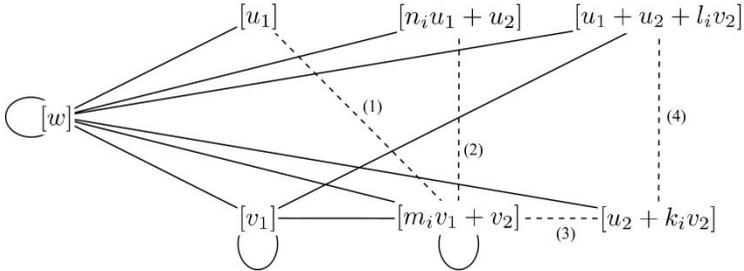
$$Ann(v_1 + v_2) = \bigcup_{k_i \in F} [u_2 + k_i v_2] \bigcup_{m_i \in F} [m_i v_1 + v_2] \bigcup [v_1] \bigcup [w] \bigcup [0],$$

$$Ann(m_j v_1 + v_2) = \left[ \frac{1+m_j}{z+m_j} u_1 + u_2 \right] \bigcup_{m_i \in F} [m_i v_1 + v_2] \bigcup [v_1] \bigcup [w] \bigcup [0], \quad m_j \neq z, 1,$$

$$\text{Ann}(v_1) = \bigcup_{l_i \in F} [u_1 + u_2 + l_i v_1] \cup \bigcup_{m_i \in F} [m_i v_1 + v_2] \cup [v_1] \cup [w] \cup [0],$$

$$\text{Ann}(w) = J.$$

На рисунке 1 представлено геометрическое изображение графа  $\Gamma(S/\sim)$ , за исключением вершин  $[0]$  и  $[1]$  ( $[0]$  смежна со всеми вершинами, а  $[1]$  смежна только  $[0]$ ).



$$n_i \neq 0, 1$$

- 1) если  $m_i = z$ ;
- 2) если  $1 + m_i + m_i n_j + n_j z = 0$ ,  $m_i \neq 1, z$ ;
- 3) если  $m_i = 1$ ;
- 4) если  $l_i = (1 + z)k_j$ .

Рисунок 1 – Геометрическое изображение графа  $\Gamma(S/\sim)$

В данном изображении вершины  $[n_i u_1 + u_2]$ ,  $[u_1 + u_2 + l_i v_2]$ ,  $[m_i v_1 + v_2]$ ,  $[u_2 + k_i v_2]$  это группы вершин графа  $\Gamma(S/\sim)$ , причем пунктирные ребра означают смежность вершин графа при выполнении некоторых условий, указанных внизу рисунка.

### Библиографический список

1. Raghavendran R., Finite associative rings // *Compositio Math.* – 1969. – V. 21. – P. 195–229.
2. Zhuravlev E.V. On the classification of finite commutative local rings // *Siberian Electronic Mathematical Reports.* – 2015. – № 12. – С. 625–638.

### Замечание о гомоморфизмах мультипликативных векторных пространств

*А.В. Кислицин<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*ОмГУ им. Ф.М. Достоевского, г. Омск;* <sup>2</sup>*АлтГПУ, г. Барнаул*

Ю.П. Размыслов в работе [1] ввел понятие ассоциативно-ливевой пары  $(A, L)$ , где  $L$  – алгебра Ли,  $A$  – ее ассоциативная обертывающая, и изучал тождества таких пар.

Пусть  $F$  – произвольное поле. И.М. Исаевым и автором по аналогии введено понятие мультипликативной векторной пары  $(A, V)$ , где  $V$  – векторное пространство над полем  $F$  и  $A$  – линейная ассоциативная алгебра, порожденная пространством  $V$  как линейная алгебра, а также изучены тождества таких пар [2, 3]. При изучении мультипликативных векторных пар и их тождеств с одной стороны прослеживается аналогия с понятием линейных алгебр и тождеств алгебр, а с другой стороны привычные свойства алгебр могут нарушаться при попытках перенести их на пары [2, 4].

В категории пар можно ввести многие понятия, аналогичные классическим теоретико-кольцевым конструкциям [2, 3, 4]. Приведем здесь некоторые из них.

Пусть  $F$  – произвольное поле,  $A$  –  $F$ -алгебра,  $V$  – векторное пространство над полем  $F$  и  $(A, V)$  – мультипликативная векторная пара. Пара  $(A_1, V_1)$  называется подпарой пары  $(A, V)$ , если  $A_1$  – подалгебра  $A$  и  $V_1$  – подпространство  $V$ . Гомоморфизмом  $\varphi$  пары  $(A, V)$  в пару  $(A_1, V_1)$  называется такой гомоморфизм линейных алгебр  $\varphi: A \rightarrow A_1$  при котором  $\varphi(V) \subseteq V_1$  [3]. Заметим, что если положить  $A = V$  и  $A_1 = V_1$ , то получим определения подалгебры и гомоморфизма линейных алгебр.

Определим понятие идеала мультипликативной векторной пары. А именно, подпару  $(I, E)$  пары  $(A, V)$  будем называть идеалом пары  $(A, V)$ , если  $I \triangleleft A$ . Эквивалентным образом идеал пары  $(A, V)$  можно определить как такую подпару  $(I, E)$ , что  $ev, ve \in I$  для всех  $e \in E$  и  $v \in V$ . Если в этом определении положить  $A = V$  и  $I = E$ , то получим определения идеала линейной алгебры.

Хорошо известно, что в категории линейных алгебр ядра гомоморфизмов линейной алгебры исчерпываются идеалами этой алгебры. В категории мультипликативных векторных пар это не так.

**Утверждение.** Ядра гомоморфизмов мультипликативной векторной пары не исчерпываются идеалами этой пары.

Действительно, рассмотрим пары  $(A_1, V_1)$  и  $(A_2, V_2)$  и гомоморфизм  $\varphi: (A_1, V_1) \rightarrow (A_2, V_2)$ . Напомним, что  $\varphi$  является гомоморфизмом алгебр  $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$ . Положим  $E = V_1 \cap \text{Ker } \varphi = \{x \in V_1 \mid \varphi(x) = 0\}$ ,  $I = \langle E \rangle$  – алгебра, порожденная пространством  $E$ , и рассмотрим пару  $(I, E)$ . Легко проверить, что  $I \triangleleft A_1$  и  $I \subseteq \text{Ker } \varphi$ . Однако, в общем случае  $I \neq \text{Ker } \varphi$ . Для доказательства этого факта достаточно найти такие элементы  $u, v \in V_1 \setminus E$ , что  $uv \in \text{Ker } \varphi$ , т.е. ядро гомоморфизма  $\varphi$  (как гомоморфизма линейных алгебр) не порождается множеством элементов пространства  $V_1$ , обращающихся в нуль под действием данного гомоморфизма.

Например, пусть  $F$  – поле,  $A_1 = F[x]$  – алгебра многочленов от одной переменной над полем  $F$ ,  $V_1 = \langle 1, x \rangle_F$ ,  $A_2 = F[x]/(x^2)$ ,  $V_2 =$

$\langle \bar{1}, \bar{x} \rangle_F$  и  $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$  – естественный гомоморфизм -алгебр. Очевидно, что  $\varphi(V_1) \subseteq V_2$ , т.е.  $\varphi$  является гомоморфизмом мультипликативных векторных пар. При этом  $E = V_1 \cap \text{Ker } \varphi = (0)$ , откуда следует, что  $I = (0)$  и  $(I, E)$  – нулевая пара. Однако,  $\text{Ker } \varphi \ni x^2 \neq 0$ , т.е.  $\text{Ker } \varphi \neq (0)$ .

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-11-10002).*

### Библиографический список

1. Размыслов Ю.П. О конечной базирюемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. – 1973. – Т. 12. – № 1. – С. 83–113.
2. Исаев И.М., Кислицин А.В. Тожества векторных пространств и примеры конечномерных линейных алгебр, не имеющих конечного базиса тождеств // Алгебра и логика. – 2013. – Т. 52. – № 4. – С. 435–460.
3. Исаев И.М., Кислицин А.В. О тождествах векторных пространств, вложенных в конечные ассоциативные алгебры // Вестник НГУ. Серия математка, механика, информатика. – 2015. – Т. 15. – № 3. – С. 69–77.
4. Кислицин А.В. О шпехтовости L-многообразий векторных пространств // Алгебра и логика. – 2017. – Т. 56. – № 2. – С. 548–558.

## Класс Леви, порожденный квазимногообразием $qH_2$

*В.В. Лодейщикова*

*АлтГТУ им. И.И. Ползунова, г. Барнаул*

Для произвольного класса групп  $M$  классом Леви, порожденным  $M$ , будем называть класс всех групп  $G$ , в которых нормальное замыкание  $(x)^G$  любого элемента  $x$  из  $G$  принадлежит  $M$ .

Классы Леви были введены в работе Л.К. Каппе [1] под влиянием работы Ф. Леви [2], из которой следует, что класс Леви, порожденный многообразием абелевых групп, является многообразием 2-энгелевых групп.

Р.Ф. Морсом [3] доказано, что класс Леви, порожденный многообразием групп  $M$ , также будет многообразием групп. А.И. Будкин в работе [4] получил аналогичный результат для квазимногообразий групп.

Введем некоторые обозначения:  $qK$  – квазимногообразие, порожденное классом групп  $K$  (если  $K=\{G\}$ , то пишем  $qG$ ),  $F_2(N_2)$  – свободная группа ранга 2 в многообразии нильпотентных групп ступени не выше 2.

А.И. Будкин [4] доказал, что если  $K$  – произвольное множество нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядков 2 и 5, и в каждой группе из  $K$  централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой, то класс Леви, порожденный  $qK$ , содержится в многообразии нильпотентных групп ступени не выше 3. В работе А.И. Будкина и Л.В. Тараниной [5] данный результат был усилен и доказана аналогичная теорема для произвольного множества нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядка 2.

Рассмотрим группы, имеющие следующие представления в многообразии нильпотентных групп ступени не выше 2:

$$H_p = \text{gr}(x, y \mid [x, y]^p = 1), \quad H_{p^s} = \text{gr}(x, y \mid [x, y]^p = x^{p^s} = y^{p^s} = 1),$$

где  $s$  – натуральное число,  $p$  – простое число.

Набор  $qH_{p^s}$  (исключая  $qH_{2,1}$ ),  $qH_p$ ,  $qF_2(N_2)$  ( $p$  – простое число), представляет собой полный список почти абелевых квазимногообразий нильпотентных групп (т. е. неабелевых квазимногообразий нильпотентных групп, все собственные подквазимногообразия которых абелевы).

В работах [6-8] найдены описания классов Леви, порожденных почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп (исключая класс Леви, порожденный  $qH_2$ ). С.А. Шахова [9, 10] показала, что квазимногообразия Леви, порожденные классом  $qH_{p^s}$ , конечно аксиоматизируемо.

В [11] установлено существование класса  $K$  такого, что во всякой группе из  $K$  централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, – абелева подгруппа, но класс Леви, порожденный  $qK$  содержит нильпотентную группу ступени 4. В [12] построена нильпотентная ступени 3 группа, которая принадлежит классу Леви, порожденному  $qH_2$ .

В работах [13, 14] установлено, что для класса Леви, порожденного квазимногообразием  $qH_2$  справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Всякая 2-порожденная группа  $G$ , принадлежащая классу Леви, порожденному квазимногообразием  $qH_2$ , нильпотентна ступени не выше 3.

Теорема 2. Если нильпотентная ступени 4 группа принадлежит классу Леви, порожденному квазимногообразием  $qH_2$ , то она будет нильпотентной ступени не выше 3.

Теорема 3. Класс Леви, порожденный квазимногообразием  $qH_2$ , содержится в многообразии нильпотентных групп ступени не выше 3.

Данная работа продолжает исследование квазимногообразия Леви, порожденного  $qH_2$ .

Рассмотрим квазимногообразие  $N$ , заданное в многообразии нильпотентных групп ступени не выше 2 следующим бесконечным множеством формул:

$$(\forall x)(\forall y)\left([x,y]^2 = 1\right), (\forall x)(\forall y)\left(x^2=1 \rightarrow [x,y]=1\right), \\ (\forall x)\left(x^q=1 \rightarrow x=1\right), (\forall x)\left(x^4=1 \rightarrow x^2=1\right),$$

где  $q$  пробегает множество простых чисел ( $q \neq 2$ ).

Через  $M$  обозначим квазимногообразие, заданное в многообразии нильпотентных групп ступени не выше 3 следующим бесконечным множеством формул:

$$(\forall x)\left(x^q=1 \rightarrow x=1\right), (\forall x)\left(x^4=1 \rightarrow x^2=1\right), \\ (\forall x)(\forall y)\left([x,y,x]^2 = 1\right), (\forall x)(\forall y)\left(x^2=1 \rightarrow [x,y,x]=1\right),$$

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_k)\left(x^{2\delta} = \prod_{i=1}^k [x, x_i]^{-2\varepsilon_i} [x, x_i, x]^{-\varepsilon_i \delta} \rightarrow \prod_{i=1}^k [x, x_i, x] = 1\right),$$

где  $q$  пробегает множество простых чисел ( $q \neq 2$ ),  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$  ( $i=1, \dots, k$ ),  $\delta$  и  $k$  пробегают множество натуральных чисел.

Теорема 4. Пусть  $K$  – произвольный класс групп из  $N$ , содержащий неабелеву группу. Тогда класс Леви, порожденный квазимногообразием  $qK$ , совпадает с квазимногообразием  $M$ .

Следствие. Класс Леви, порожденный квазимногообразием  $qH_2$ , совпадает с квазимногообразием  $M$ .

### Библиографический список

1. Карпе L.C. On Levi-formation // Arch. Math. – 1972. – №6 (23). – P. 561–572.

2. Levi F.W. Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic condition // J. Indian Math. Soc. – 1942. – V. 6. – P. 87–97.

3. Morse R.F. Levi-properties generated by varieties // The mathematical legacy of Wilhelm Magnus. Groups, geometry and special functions (Contemp. Math., 169), Providence, RI, Am. Math. Soc. – 1994. – P. 467–474.

4. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сибирский математический журнал. – 1999. – №2 (40). – С. 266–270.

5. Будкин А.И., Таранина Л.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. – 2000. – №2 (41). – С. 270–277.

6. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Известия Алтайского государственного университета. – 2009. – №1 (61). – С. 26–29.

7. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. – 2010. – №6 (51). – С. 1359–1366.

8. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты  $ps$  // Алгебра и логика. – 2011. – №1 (50). – С. 26–41.

9. Шахова С.А. Об аксиоматическом ранге квазимногообразия  $M^{p^2}$  // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – №1/2 (85). – С. 179–182.

10. Шахова С.А. Об аксиоматическом ранге класса Леви, порожденного квазимногообразием  $qH_{ps}$  // МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2016. – С. 10–11.

11. Лодейщикова В.В. Об одном квазимногообразии Леви экспоненты 8 // Известия Алтайского государственного университета. – 2010. – №1/2 (65). – С. 42–45.

12. Лодейщикова В.В. О классе Леви, порожденном почти абелевым квазимногообразием нильпотентных групп // Известия Алтайского государственного университета. – 2016. – №1 (89). – С. 148–151.

13. Лодейщикова В.В. Об одном свойстве класса Леви, порожденного квазимногообразием  $qH_2$  // МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. – С. 20–23.

14. Лодейщикова В.В. О некоторых свойствах класса Леви, порожденного квазимногообразием  $qH_2$  // Сборник научных статей международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования» – 2017 [Электронный ресурс] / АлтГУ; отв. ред. Е. Д. Родионов. – Электрон. текст. дан. – Барнаул: ФГБОУ ВО "Алтайский государственный университет", 2017. – С. 383–385.

## УДК 512.54.01

### О базисе класса Леви квазимногообразия, порождённого конечной р-группой

*С.А. Шахова*

*Алтайский государственный университет, г. Барнаул*

Для произвольного класса групп  $M$  обозначим через  $L(M)$  класс всех групп  $G$ , в которых нормальное замыкание  $(a)^G$  каждого элемента  $a \in G$  принадлежит квазимногообразию  $M$ . Класс  $L(M)$  называется классом Леви, порождённым классом групп  $M$ .

А.И. Будкин установил в [1], что если  $M$  – квазимногообразие, то  $L(M)$  также является квазимногообразием. Изучению классов Леви квазимногообразий нильпотентных групп посвящены работы [2–7]. В работе [7] возникли классы Леви квазимногообразий, порождённых конечными группами, заданные бесконечными системами квазитожеств.

Совокупность квазитожеств, задающих квазимногообразие, называется базисом этого квазимногообразия. Говорят, что квазимногообразие имеет бесконечный аксиоматический ранг, если его нельзя задать базисом от конечного числа переменных.

Зафиксируем простое число  $p, p \neq 2$ , и обозначим через  $F_2$  свободную в многообразии нильпотентных ступени  $\leq 2$  групп экспоненты  $p$  группу ранга 2, а через  $F_2 \boxtimes G$  прямое сплетение группы  $F_2$  с группой  $G$ .

Доказана следующая теорема.

**Теорема.** Для произвольной конечной  $p$ -группы  $G$  класс Леви  $L(qF_2 \boxtimes G)$  имеет бесконечный аксиоматический ранг.

### Библиографический список

1. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сибирский математический журнал. – 1999. – № 2 (40). – С. 266–270.
2. Будкин А.И. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами // Алгебра и логика. – 2000. – № 6 (39). – С. 635–647.
3. Будкин А.И., Таранина Л.В. // О квазимногообразиях Леви, порождённых нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. – 2000. – № 2 (41). – С. 270–277.
4. Лодейщикова В.В. Об одном квазимногообразии Леви экспоненты 8 // Известия Алтайского государственного университета. – 2010. – № 1/2 (65). – С. 42–45.
5. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порождённых нильпотентными группами // Известия Алтайского государственного университета. – 2009. – № 1 (61). – С. 26–29.
6. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. – 2010. – № 6 (51). – С. 1359–1366.
7. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты  $p^s$  // Алгебра и логика. – 2011. – Т. – № 1 (50). – С. 26–41.

## Секция 2. ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ

УДК 517.9:514.1:514.7

### Двухточечный инвариант группы движений симплициального пространства II типа

*Р.А. Богданова*

*Горно-Алтайский государственный университет,  
г. Горно-Алтайск*

В 1988 г. В.Х. Левом [1] была построена классификация трехмерных геометрий локальной максимальной подвижности, воспроизведенная в монографии [2] и дополненная В.А. Кыровым. Она содержит как хорошо известные, так и малоизвестные геометрии, одной из которых является симплициальное пространство I типа. В работе [3] для нее найдена группа движений, являющаяся результатом действия группы Ли  $SL_2(R) \otimes SL_2(R)$ .

Целью данной работы является нахождение полной системы невырожденных двухточечных инвариантов группы движений симплициального пространства I типа, как решение соответствующего функционального уравнения.

Трехмерные геометрии максимальной подвижности задаются на трехмерном многообразии  $\mathcal{M}_3$  гладкой невырожденной метрической функцией  $f: \mathfrak{S}_f \rightarrow R$ , где  $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathcal{M}_3 \times \mathcal{M}_3$ , сопоставляющей паре точек  $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$  число  $f(i, j) \in R$ . Ее локальное координатное представление имеет следующий вид:

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j, z_j). \quad (1)$$

Эта функция, в отличие от обычной метрики, удовлетворяет только естественным математическим требованиям гладкости класса  $C^2$ , невырожденности и определенности почти всюду в [2].

**Определение.** Гладкое локально обратимое преобразование, то есть локальный диффеоморфизм, многообразия  $\mathcal{M}_3$

$$x' = \lambda(x, y, z), \quad y' = \sigma(x, y, z), \quad z' = \tau(x, y, z), \quad (2)$$

удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial(\lambda(x, y, z), \sigma(x, y, z), \tau(x, y, z))}{\partial(x, y, z)} \neq 0, \quad (3)$$

называется *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \tau(i), \lambda(j), \sigma(j), \tau(j)) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), \quad (4)$$

где, например,  $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i, z_i)$ ,  $\sigma(i) = \sigma(x_i, y_i, z_i)$ ,  $\tau(i) = \tau(x_i, y_i, z_i)$ .

Равенство (4) при известной группе преобразований симплицеального пространства I типа есть функциональное уравнение на множество двухточечных инвариантов группы преобразований трехмерного многообразия, как функций шести переменных – координат точек  $i$  и  $j$ . Решая это уравнение, находим все возможные невырожденные двухточечные инварианты. Отметим, что автором [4, 5, 6] были разработаны методы решения функциональных уравнений на двухточечные инварианты двумерных «экзотических» геометрий максимальной подвижности и их групп движений.

### Библиографический список

1. Лев В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. – 1988. – Вып. 125. – С. 90–103.
2. Михайличенко Г.Г. Математические основы и результаты Теории физических структур: Монография. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2012. – 146 с.
3. Кыров В.А., Богданова Р.А. Группы движений некоторых трехмерных геометрий максимальной подвижности // Сиб. матем. журнал. – 2018. – Т.9, № 2. – С. 412–421; Siberian Math. J. – 2018 – Vol. 59, No. 2. – Pp. 323–331.
4. Богданова Р.А. Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения // Сиб. журн. индустр. матем. – 2009. – Т. 12, № 4. – С. 12–22.
5. Богданова Р.А. Группа движений симплицеальной плоскости как решение функционального уравнения // Вест. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2014. – № 4(30). – С. 5–13.
6. Богданова, Р.А. Двухточечные инварианты групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий // Вест. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2016. – №1(39). – С. 5–12.

УДК 519.254

## Латентный кластерный анализ для случая двух кластеров

*С.В. Дронов, А.Ю. Шеларь*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Ученый-исследователь в любой области знания обязательно сталкивается с различными множествами объектов и их классификаций. Однако, не всегда возможно однозначно определить класс объекта в случае, когда описания классов лишены полной четкости. Например, производится классификация по шкалам «высокий – низкий», «быстрый – медленный» и т. п., где каждая шкала разбивается на несколько групп. Возникающие группы в силу невозможности их строгого определения будем называть нечеткими категориями. Четким вариантом подобной нечеткой классификации является однозначное отнесение объекта к той или иной категории. При этом четкий выбор категорий можно интерпретировать, как придание конкретного числового выражения некоторому внешнему критерию оптимальности классификации, который раньше мог носить только интуитивный, непосредственно не наблюдаемый характер. Поэтому подобные методы сегодня принято называть методами латентной кластеризации.

Поставим задачу. Пусть есть множество объектов, для каждого из которых известны значения двух числовых признаков. Предполагается, что между этими признаками имеется зависимость. Требуется построить такое разбиение множеств значений каждого из признаков на классы, каждый из которых является четким вариантом одной из нечетких категорий, чтобы таблица сопряженности признаков в наибольшей степени отражала зависимость между ними. Таким образом, в роли внешнего критерия выступает степень зависимости изучаемых признаков.

Рассмотрим вариант задачи, в которой для каждого из признаков требуется построить лишь две категории. Например, можно рассматривать  $X$  – стаж работника,  $Y$  – размер его заработной платы. Предполагая наличие связи между этими признаками, исследователь хочет произвести разбиение значений  $X$  на категории «малый» и «большой» стаж, а  $Y$  на «низкая» и «высокая» заработная плата так, чтобы эта зависимость стала видна наиболее ясно.

Входными данными для проведения анализа будут являться результаты наблюдений над объектами, у каждого из которых известны значения  $X, Y$ . После решения этой задачи конкретные числовые значения признаков предполагается заменить их категориями, тем самым

превратив их в категорированные. При переходе к категориям в нашем случае все значения каждого из признаков, которые меньше соответственной границы, мы заменим на 0, остальные – на 1.

Обозначив за  $a_{i,j}$ ,  $i, j = 0, 1$  количества объектов, у которых  $X$  принял значение  $i$ , а  $Y$ , соответственно,  $j$ , получим после выбора конкретных категорий четырехпольную таблицу с элементами  $a_{i,j}$ .

Нетрудно заметить, что при изменении границ, разбивающих множества значений признаков, будет изменяться и сама таблица. Зависимость признаков означает, что известная категория по  $X$  гарантирует известную категорию  $Y$ , а, следовательно, таблица окажется диагональной. Итак, разбиение множеств значений признаков будет тем более оптимальным, чем больше таблица сопряженности похожа на диагональную.

Пусть  $N$  – количество изучаемых объектов. Имеем оценку вероятности  $F_{ij}$  попадания объекта в  $i, j$  клетку таблицы

$$F_{ij} = a_{ij} / N, \quad i, j = 0, 1.$$

Если  $F_{i\cdot} = F_{i,0} + F_{i,1}$ ,  $F_{\cdot j} = F_{0,j} + F_{1,j}$ , то, в случае независимости признаков, ожидаемые ее элементы будут вычисляться по формулам

$$E_{i,j} = N \cdot F_{i\cdot} \cdot F_{\cdot j}, \quad i, j = 0, 1.$$

Чтобы таблица была похожа на диагональную, все так называемые смещения  $S_{ij} = F_{ij} - E_{ij}$  должны быть сделаны максимально возможно большими. Справедливы утверждения

**Лемма.** Величина  $|S_{00}|$  однозначно определяет все  $|S_{ij}|$ .

**Теорема.** Для произвольных наборов значений двух признаков и любом определении границ категорий максимальное значение  $|S_{00}|$  равно

$$S_{\max} = \frac{1}{N^2} \cdot \left[ \frac{N^2}{4} \right].$$

При этом оно достигается лишь на такой таблице, у которой вне одной из диагоналей расположены нули, а два оставшихся элемента одинаковы.

Согласно лемме, максимально возможное значение  $|S_{00}|$  соответствует самой сильной степени связи между формирующими показателями. Следовательно, можно ввести коэффициент, значение которого позволяет численно оценить силу этой связи (по данным  $N$  выборочным значениям,  $[\cdot]$  – целая часть числа):

$$\kappa = \frac{N^2 S_{00}}{\lfloor N^2 / 4 \rfloor}.$$

Ростовцевым [1] предложен алгоритм, позволяющий, по словам автора, построить такой вариант четких категорий каждого из признаков, которое позволяет достичь максимально возможного значения  $|S_{00}|$  на изучаемом наборе данных. Однако нам удалось обнаружить, что это утверждение не вполне соответствует действительности.

Во-первых, для некоторых наборов данных величина  $|S_{00}|$ , значение которой приведено в теореме, не достигается после применения алгоритма Ростовцева. Во-вторых, то разбиение на категории, которое находит этот алгоритм, не является естественным даже в том смысле, на который указывает постановка задачи.

Действительно, пусть на значениях  $X$  и  $Y$  есть естественный порядок. Тогда образуемые категории должны тяготеть к противоположным концам шкал, т.е. значения каждого из показателей, близкие к началу шкалы должны относиться к 0-категории, а близкие к ее концу – к 1-категории. На подобный ожидаемый результат указывали и все примеры, приведенные в статье [1].

Но в некоторых практических примерах работы этого алгоритма, оказывается, что это далеко не так. Категории по  $X$  могут получаться «разрывными», что не отвечает постановке задачи.

Справедливости ради следует отметить, что в алгоритме Ростовцева построение категорий по  $Y$  всегда получается именно в «естественном» виде – фактически, в алгоритме производится полный перебор таких возможностей.

Значит, когда решается именно задача поиска наилучшей монотонной зависимости, алгоритм нуждается в доработке. При этом найденное значение  $|S_{00}|$  может оказаться ниже, чем у Ростовцева – это плата за «естественность», «неразрывность» категорий.

Перейдем к описанию предлагаемой модификации алгоритма. Пусть имеется разбиение, полученное с помощью алгоритма Ростовцева. Построим по множеству значений  $X$  индикаторный вектор  $I_x = (I_1, \dots, I_n)$ , элементы которого принимают значение 0 в случае если  $i$ -й элемент множества  $X$  нулевой категории, иначе 1. Необходимо преобразовать индикаторный вектор так, чтобы 0 и 1 свободно не чередовались, а распределялись по противоположным «концам» вектора  $I_x$  с минимально возможным уменьшением  $S_{00}$ .

1. Пусть  $I_x$  –  $i$ -е значение в  $I_x$ , где  $i = 1 \dots n - 1$ .  $I_x' = I_x$ .

2. Если  $I_{x_i} = I_{x_{i-1}}$ , то  $i = i + 1$ , и переходим к шагу 1, иначе:
3. Заменяем все значения в  $I_x$  левее  $I_{x_i}$  на  $I_{x_0}$ , справа – на  $1 - I_{x_0}$ .
4. В категорию  $X$  с номером  $I_{x_0}$  относим объекты с начала шкалы до последнего измененного значения. Найдем  $S_{00}$ . Заменяем все элементы правее  $I_{x_{i-1}}$  на элементы из  $I_x'$  правее  $I_{x_{i-1}}'$ .
5. Увеличилось ли  $|S_{00}|$ ? Если да, то запоминаем его,  $i = i + 1$ . К шагу 1. Иначе конец алгоритма.

В докладе рассмотрены соответствующие примеры и представлена программа для ЭВМ, реализующая описанный алгоритм.

### Библиографический список

1. Ростовцев П.С. Черно-белый анализ связи переменных // Социология: 4М (методология, методы, математические модели). – 1998. – №10.

УДК 519.237

## Оценивание силы пост-кластерной связи между формирующими показателями

*С.В. Дронов, К.А. Леонгардт*  
АлтГУ, г. Барнаул

Предположим, что в результате работы некоторого кластерного алгоритма или путем экспертных оценок множество из  $n$  объектов  $A_i, i = 1, \dots, n$ , каждый из которых задан совокупностью своих формирующих показателей  $x_i, i = 1, \dots, k$ , разбито на  $p$  кластеров. Полученное кластерное разбиение будем далее называть основным и считать, что оно является объективно правильным в рамках решаемого круга задач. Другими словами, мы полностью доверяем тому алгоритму или той экспертной группе, в результате работы которых было построено основное разбиение.

Каждому кластеру поставлено в соответствие некоторое число которое условимся называть его меткой. Обозначим этот (внешний для решаемой задачи) набор меток  $A$ . Будем считать, что набор меток  $A$  значимо связан с основным кластерным разбиением и назовем этот набор основным. Предположение о связи основного кластерного разбиения с основным набором меток всегда справедливо, если и разбиение, и набор меток возникают в результате работы одного и того же

алгоритма, и крайне правдоподобно, если присвоение меток производится добросовестным и квалифицированным экспертом уже по готовому разбиению.

После построения системы меток мы можем ввести кластерную переменную  $f$ , которая каждому из объектов ставит в соответствие метку того кластера, к которому этот объект принадлежит. Понятие кластерной переменной, по-видимому, впервые было введено в работе [1].

В [2] предложен метод построения, другой системы  $\mathbf{B}$  меток кластеров  $\bar{f}_i, i=1, \dots, p$ . Если, как и выше, по набору  $\mathbf{B}$  определить кластерную переменную, то  $\mathbf{B}$  является решением задачи на максимум для суммы квадратов коэффициентов корреляции:

$$\sum_{i=1}^k \rho^2(x_i, \bar{f}) \rightarrow \max. \quad (1)$$

Сам способ построения системы меток  $\mathbf{B}$  организован, следовательно, так, что она наилучшим образом согласована с совокупностью формирующих показателей. Ясно, что она не обязана совпадать с системой меток  $\mathbf{A}$ , и даже может оказаться совсем не похожей на нее. Этот факт можно интерпретировать как несогласованность набора формирующих показателей напрямую со структурой основного кластерного разбиения. Основной задачей работы является попытка устранения этого несогласования.

Для этого будем искать некоторое преобразование  $g$  (или систему преобразований – свое преобразование для каждого показателя) такое, что если метки некоторого нового набора  $\mathbf{C}$  будут формироваться с помощью решения задачи (1) после замены  $x_i$  на  $g_i(x_i), i=1, \dots, k$ , то наборы меток  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{A}$  будут, если не совпадать, то быть близкими.

Тогда без ограничения общности можно считать, что преобразованные показатели уже хорошо согласуются с основным набором кластерных меток  $\mathbf{A}$ , а, следовательно, их можно будет считать достаточно хорошо согласованными с основной кластерной структурой. Более того, и корреляционные связи между преобразованными показателями в определенном смысле можно рассматривать как новый вид связи, порождаемой этой структурой.

Тогда  $\rho^2(g_i(x_i), g_j(x_j))$  – мера силы (степени) этой новой связи между  $i$  и  $j$ . Фактически, рассматривая такую меру, мы математически строго вводим новый вид связи между показателями. Это – корреляционная связь их специально подобранных преобразований. Назовем такой тип связи пост-кластерной связью.

Рассмотрим пример. Пусть основное кластерное разбиение строится с применением агломеративного кластерного алгоритма. При этом в качестве расстояния между кластерами  $Q_i, Q_j$  будем использовать

$$d(Q_i, Q_j) = \frac{n_i n_j}{n_i + n_j} \|Z_i - Z_j\|^2, \quad (2)$$

где  $n_i, n_j$  количества объектов кластеров,  $Z_i, Z_j$  – их центры, а через  $\|\cdot\|$  обозначена евклидова норма в  $k$ -мерном пространстве признаков. Предположим, что на старте алгоритма, когда каждый кластер состоит из одного объекта, все они имеют метки 0. На каждом следующем шаге новый кластер образуется как объединение каких-то двух из имевшихся. Метку нового кластера тогда определим как сумму меток объединяющихся кластеров и расстояния  $d$  между ними.

Использование расстояния (2) вместо евклидова рекомендовано в [3] для того, чтобы визуализирующая работу алгоритма дендрограмма не имела самопересечений (в [3] они называются инверсиями). Для нашего примера  $d$  выбрано потому, что полученные описанным образом метки имеют прозрачный смысл.

Поясним это. Для кластера  $Q$  рассмотрим величину

$$S(Q) = \sum_{x \in Q} \|x - Z\|^2,$$

где  $Z$  – центр кластера. Будем называть ее изменчивостью набора формирующих показателей внутри кластера  $Q$ . Название можно объяснить, например, тем, что в случае, когда размерность  $k=1$  и кластер  $Q$  состоит из  $q$  элементов, то  $S(Q)$  совпадает с дисперсией единственного показателя с точностью до множителя  $1/q$ .

**Теорема 1.** *При описанном построении системы меток метка каждого кластера будет равна изменчивости набора формирующих показателей внутри этого кластера,*

Имея в виду доказанную теорему, определим систему преобразований признаков соотношением

$$g_i(x_i) = (x_i - \bar{X}_i)^2, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3)$$

где  $\bar{X}_i$  – среднее значение  $i$ -го показателя по всем изучаемым объектам. Следующее утверждение представляется очевидным.

**Теорема 2.** *Система меток, построенная путем максимизации суммы квадратов коэффициентов корреляции с преобразованными по формулам (3) показателями совпадает с системой меток иерархического алгоритма с точностью до масштабного множителя.*

В докладе приводятся наглядные примеры, иллюстрирующие

утверждение этой теоремы.

Как вытекает из теоремы 2, в случае, когда метки кластеров присваиваются в соответствии с выбранным вариантом иерархического алгоритма, пост-кластерная связь между показателями это корреляционная связь между их преобразованными вариантами (3).

Особо отметим, что фактически вид этой связи определяется не алгоритмом, а именно основной системой меток, а способ построения меток конкретизирован в примере только для того, чтобы обосновать выбор вида преобразований (3).

### **Библиографический список**

1. Сазонова А.С, Дронов С.В. Обратная post-hoc задача кластерного анализа и ее применение к дискриминации данных // Вестник Тюменского государственного университета. – 2014. – № 7.
2. Dronov S.V., Sazonova A.S. Two approaches to cluster variable quantification. // Model Assisted Statistics and Applications. – 2015. – V. 10.
3. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. – М., 1989.

**УДК 579.64**

## **Псевдоримановы эйнштейново-подобные метрические группы Ли с метрикой алгебраического солитона Риччи**

***П.Н. Клепиков, Е.Д. Родионов**  
АлтГУ, г. Барнаул*

Многообразия Эйнштейна являются важным классом (псевдо)римановых многообразий, которые широко используются в геометрии и физике. Известно, что каждое многообразие Эйнштейна имеет параллельный тензор Риччи (т.е.  $\nabla_X r = 0$ ). В последнее время активно изучаются различные обобщения многообразий Эйнштейна, одними из которых являются эйнштейново-подобные (псевдо)римановы многообразия в смысле А. Грея [1].

Определение 1. (Псевдо)риманово многообразие имеет циклично параллельный тензор Риччи (принадлежит к классу А), если

$$(\nabla_X r)(Y, Z) + (\nabla_Y r)(Z, X) + (\nabla_Z r)(X, Y) = 0$$

для любых векторных полей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . Данное условие эквивалентно тому, что тензор Риччи является тензором Киллинга

$$(\nabla_X r)(X, X) = 0$$

для любого векторного поля  $X$ .

Определение 2. (Псевдо)риманово многообразии имеет тензор Риччи, который является тензором Кодацци (принадлежит к классу В), если

$$(\nabla_X r)(Y, Z) = (\nabla_Y r)(X, Z)$$

для любых векторных полей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ .

Многообразия, принадлежащие классам А и В, называются эйнштейново-подобными (псевдо)римановыми многообразиями по А. Грею [1].

Определение 3. (Псевдо)риманово многообразии  $(M, g)$  называется солитоном Риччи, если метрика  $g$  удовлетворяет уравнению:

$$r = \lambda \cdot g + L_X g,$$

где  $r$  — тензор Риччи,  $\lambda$  — действительная константа,  $L_X g$  — производная Ли метрики  $g$  по направлению полного дифференцируемого векторного поля  $X$ .

Изучение однородных солитонов Риччи в общем случае является достаточно трудной задачей, поэтому обычно накладывают некоторые ограничения: либо на размерность пространства [3–5], либо на класс рассматриваемых векторных полей [6–9], либо на (псевдо)риманову метрику [10–12].

В данной работе изучаются группы Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой эйнштейново-подобной метрикой, которые, кроме того, являются солитонами Риччи. Доказано, что данный класс многообразий содержит нетривиальные примеры (т.е. примеры отличные от многообразий Эйнштейна) в случае, если оператор Риччи не является диагонализируемым. Данные исследования являются продолжением предыдущих работ авторов по изучению солитонов Риччи и эйнштейново-подобных метрик на группах Ли [7–11].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00033 мол\_а.

### Библиографический список

1. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein // *Geom. Dedi-cata.* – 1978. – V. 7. – P. 259–280.
2. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces // *Contemporary Mathematics.* – 1988. – V. 71. – P. 237–262.

3. Brozos-Vazquez M., Calvaruso G., Garcia-Rio E., Gavi-no Fernandez S. Three-dimensional Lorentzian homogeneous Ricci solitons // arXiv.org. – 2009. – arXiv:0911.1247.

4. Batat W., Onda K. Four-Dimensional Pseudo-Riemannian Generalized Symmetric Spaces Which are Algebraic Ricci Solitons // Results. Math. – 2013. – V. 64, No 3. – P. 253–267.

5. Calvaruso G., Fino A. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous Ricci solitons // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. – 2015. – V. 12, No 5.

6. Cerbo L.F. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. – 2014. – V. 14(2). – P. 225–237.

7. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Об однородных инвариантных солитонах Риччи на четырехмерных группах Ли // «МАК 2015: Математики – Алтайскому краю», сборник трудов всероссийской конференции по математике. Изд-во: Алт. гос. ун-т., Барнаул. – 2015. – С. 21–24.

8. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2015. – № 1/2. – С. 115–122.

9. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Об однородных солитонах Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. – 2015. – Т. 465, № 3. – С. 281–283.

10. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Конформно плоские солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2016. – № 1(89). – С. 123–128.

11. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля // ДАН. – 2017. – Т. 472, № 5. – С. 506–508.

12. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с недиагонализируемым оператором Риччи // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2017. – № 1(93). – С. 87–90.

## УДК 579.64

### О 4-мерных локально-однородных псевдоримановых многообразиях с изотропным тензором Вейля

*С.В. Клепикова, О.П. Хромова*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Работы многих математиков всего мира посвящены как исследованию конформно плоских (псевдо)римановых многообразий (многооб-

разий с тривиальным тензором Вейля), так и изучению многообразий, имеющих нетривиальный тензор Вейля, но при этом тензор имеет нулевой квадрат длины.

В случае многообразий, имеющих размерность 3 изучается тензор Схоутена-Вейля, являющийся аналогом тензора Вейля в данных многообразиях, поскольку тензор Вейля здесь тривиален. В работе [1] тензор Схоутена-Вейля был исследован в случае левоинвариантной лоренцевой метрики на 3-мерных группах Ли. Данное исследование — продолжение исследований Дж. Милнора [2] по левоинвариантным римановым метрикам на 3-мерных группах Ли.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [3, 4], а именно, в ней изучаются 4-мерные локально однородные пространства с левоинвариантной псевдоримановой метрикой с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00033 мол\_а.

### Библиографический список

1. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Левоинвариантные лоренцевы метрики на трехмерных группах Ли с нулевым квадратом длины тензора Схоутена-Вейля. // ДАН. – 2005. – Т. 401, № 4. – С. 459–461.
2. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – Vol. 21. – P. 293–329.
3. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. – 2008. – Т. 419, № 6. – С. 735–738.
4. Khromova O.P., Klepikov P.N., Klepikova S.V., Rodionov E.D. About the Schouten-Weyl tensor on 3-dimensional Lorentzian Lie groups // Электронный ресурс arXiv.org – 2017. <https://arxiv.org/abs/1708.06614>.

УДК 579.64

### Метрики деревьев и псевдоевклидова геометрия

*М.В. Куркина<sup>1</sup>, В.В. Славский<sup>2</sup>, А.С. Тякунов<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск;  
<sup>2</sup>АлтГУ, г. Барнаул

Один из наиболее распространенных методов кластеризации данного конечного множества  $X = \{i\}_{i=1,n}$  является представление его ли-

стями взвешенного дерева  $X \subset \{G, \rho_{ij}\}$ , где  $G$  - связный ациклический взвешенный граф. Расстояние  $\rho_{ij}$  между двумя вершинами дерева – сумма весов ребер на пути между ними. Главная проблема при этом найти граф  $\{G, \rho_{ij}\}$  и метрику дерева, которая была бы наиболее адекватна структуре  $X$ .

Эта проблема, известная как численная таксономии, имеет приложения в различных областях науки, таких как лингвистика и эволюционная биология. Например, в эволюционной биологии метрики дерева представляют ветвящийся процесс эволюции, который приводит к наблюдаемому распределению данных [1]. Естественно, эта проблема привлекла (и привлекает) большое внимание. В данной работе устанавливается связь этой проблемы с псевдоевклидовой геометрией (теорема 3).

Справедлива теорема Бунемана [2]:

Теорема 1. Неотрицательная функция  $\rho: X \times X \rightarrow R^+$  определяет на множестве объектов  $X$  аддитивную метрику дерева в том и только в том случае если выполнено четырех-точечное условие:

1.  $\rho_{ij} = \rho_{ji}, \quad \forall i, j, k, s \in X,$
2.  $\rho_{ij} + \rho_{ks} \leq \max\{\rho_{ik} + \rho_{js}, \rho_{kj} + \rho_{is}\},$
3.  $\rho_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = j.$

(\*)

В этом случае однозначно строится взвешенный граф  $\{G, \rho_{ij}\}$  с множеством листьев  $X$ . Частным случаем аддитивной метрики является ультраметрика:

1.  $\rho_{ij} = \rho_{ji}, \quad \forall i, j, k \in X,$
2.  $\rho_{ij} \leq \max\{\rho_{ik}, \rho_{kj}\},$
3.  $\rho_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = j.$

Замечание 1. Для любой строго монотонно возрастающей числовой функции  $\psi: R^+ \rightarrow R^+$  функция  $\psi(\hat{\rho}_{ij})$  также ультраметрика.

Определение 1. Пусть  $\{\rho_{ji}\}$  – аддитивная метрика преобразованием Farris [3] называется переход к аддитивной метрике вида:

$$\hat{\rho}_{ij} = \rho_{ij} + \lambda_i + \lambda_j,$$

Теорема 1. Пусть  $\{\rho_{ji}\}$  – аддитивная метрика существуют  $\{\lambda_k\}$  и преобразование Farris переводящая её в ультраметрику.

Справедлива теорема [4]:

Теорема 2. Пусть  $\{X, \rho\}$  – конечное ультраметрическое пространство с метрикой  $\rho_{ij}$ , тогда существует изометричное вложение  $\phi: \{X, \rho\} \rightarrow R^{n-1}$  в евклидово пространство  $R^{n-1}$  ( $n$  – число элементов в  $X$ ) такое, что:

- $\rho_{ij} = \|\phi(i) - \phi(j)\|, \forall i, j \in X;$
- $r = \|\phi(i)\|, \forall i \in X,$

где  $r \leq \frac{D}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n-1}{n}}$ . То есть образ  $\phi[X] \subset R^{n-1}$  – лежит на сфере с центром в начале координат радиуса  $r$ , здесь  $D = \max_{i,j} \rho(x_i, x_j)$  – диаметр  $X$ .

Пусть  $M^n = R^{n-1} \times R$  псевдоевклидово пространство, скалярный квадрат вектора  $z = [\vec{x}, \zeta] \in R^{n-1} \times R = M^n$  в котором равен:

$$\langle z, z \rangle = \|\vec{x}\|^2 - |\zeta|^2. \text{ Обозначим через:}$$

$$C^+ = \{z \in M^n : \langle z, z \rangle = 0, \zeta > 0\}$$

изотропный конус в пространстве Минковского  $M^n$ .

Лемма. Для любых двух точек конуса  $z_1, z_2 \in C^+$  и  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  верно равенство:

$$\|\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2\| = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \|z_1 - z_2\|,$$

здесь  $\|z_1 - z_2\|$  расстояние между точками в псевдоевклидовом пространстве  $M^n$ .

Доказательство: Так как  $z_1 = [x_1, |x_1|], z_2 = [x_2, |x_2|]$

$$\|z_1 - z_2\|^2 = (x_1 - x_2)^2 - (|x_1| - |x_2|)^2 = -2(x_1, x_2) + 2|x_1||x_2|$$

значит

$$\|\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2\|^2 = -2\lambda_1 \lambda_2 (x_1, x_2) + 2\lambda_1 \lambda_2 |x_1||x_2| = \lambda_1 \lambda_2 \|z_1 - z_2\|^2$$

Теорема 3. Пусть  $X$  конечное множество с аддитивной метрикой  $\rho: X \times X \rightarrow R^+$ . Тогда существует изометричное вложение  $\phi: \{X, \text{Exp}[\rho_{ij}]\} \rightarrow C^+$  в виде подмножества изотропного конуса в псевдоевклидова пространства Минковского  $M^n$ .

Доказательство: согласно замечанию 1 существует преобразование Farris переводящее аддитивную метрику  $\rho_{ij}$  в ультраметрику  $\hat{\rho}_{ij} = \rho_{ij} + \lambda_i + \lambda_j$ , по замечанию 2 и теореме 1 существует изометричное вложение

$$\phi: \{X, \text{Exp}[\hat{\rho}_{ij}]\} \rightarrow S^{n-1} \subset C^+,$$

или

$$\phi: \{X, \text{Exp}[\rho_{ij}]\text{Exp}[\lambda_i]\text{Exp}[\lambda_j]\} \rightarrow S^{n-1} \subset C^+.$$

Применяя лемму получаем изометричное вложение

$$\phi: \{X, \text{Exp}[\rho_{ij}]\} \rightarrow C^+$$

Замечание. Метрика,  $\text{Exp}[\rho_{ij}] = \mu_{ij}$  вообще говоря, не обладает четырех-точечным свойством аддитивной метрики (\*), вместо него выполняется "усиленное" неравенство Птолемея:

$$\bullet \quad \mu_{ij}\mu_{ks} \leq \max\{\mu_{ik}\mu_{js}, \mu_{kj}\mu_{is}\}, \quad \forall i, j, k, s \in X. \quad (**)$$

Так как индексы  $\{i, j, k, s\}$  равноправны, то данное неравенство эквивалентно выполнению свойства:  $\{\mu_{ij}\mu_{ks}, \mu_{ik}\mu_{js}, \mu_{kj}\mu_{is}\}$  - два числа из трех равны и больше третьего, либо все равны между собой.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00620).*

### Библиографический список

1. Steven N. Evans. Probability and Real Trees. – Lecture Notes in Mathematics 1920. Springer Berlin Heidelberg New York, 2005. – 204 с.
2. Buneman P. A Note on the Metric Properties of Trees // Journal of combinatorial theory. – 1974. – № 17. – С. 48–50.
3. A. Dress, K.T. Huber, V. Moulton. Some Uses of the Farris Transform in Mathematics and Phylogenetics—A Review // Annals of Combinatorics 11 (2007) 1–37.
4. V.N. Berestrovskii. Ultrametric spaces, Proceedings on Analysis and Geometry (S. K. Vodop'ianov, ed.), Sobolev Institute Press, Novosibirsk, 2001, pp. 47–72.

## УДК 514.765

**Поля Киллинга и солитоны Риччи на четырехмерных  
3-симметрических лоренцевых многообразиях***Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, И.В. Эрнст**АлтГУ, г. Барнаул*

В работе описаны поля Киллинга на четырехмерных 3-симметрических лоренцевых многообразиях. Поля Киллинга – векторные поля скоростей (локальной) однопараметрической группы движений риманова или псевдориманова многообразия. Нахождение полей Киллинга необходимо для описания солитонов Риччи, которые являются обобщением эйнштейновых метрик на (псевдо)римановых многообразиях.

Уравнение солитона Риччи изучалось на различных классах многообразий многими математиками. В частности, авторами ранее было доказано существование решения уравнения солитона Риччи на 3-симметрических четырехмерных лоренцевых многообразиях размерности четыре. В данной работе получено общее описание полей Киллинга и вычислена размерность алгебры киллинговых полей на таких многообразиях.

**Библиографический список**

1. Hamilton R. S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. – 1988. – V. 71.
2. Галаев А.С. Группы голономии лоренцевых многообразий и супермногообразий // Матем. сборник. – 2013. – Т. 204, № 9. – С. 29–50.
3. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В. О солитонах Риччи на 3-симметрических лоренцевых многообразиях // Известия Алтайского государственного университета. – 2018. – № 1 (99). – С. 119–122.

## УДК 519.3

**О вопросах сходимости комбинированных методов  
штрафных функций***Е.А. Плотникова<sup>1</sup>, А.Н. Саженков<sup>2</sup>, Т.В. Саженкова<sup>2</sup>**<sup>1</sup>НГТУ, г. Новосибирск; <sup>2</sup>АлтГУ, г. Барнаул*

В работах [1–3] Полака Э., Сеа Ж., Фиакко А, Мак-Кормика Г. представлены исследования вопросов сходимости методов внешних и

внутренних (барьерных) штрафных функций в применении к задаче минимизации выпуклой функции  $f$  на компакте  $K \subset \mathbb{R}^n$ , задаваемом системой неравенств  $g_j(x) \leq 0$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ , с выпуклыми функциями  $g_j$ , в предположении, что существует точка  $x_0$ , в которой  $g_j(x_0) < 0$  для всех  $j$  (не пустая внутренность  $K$ ). При этом в этих работах рассматриваются штрафные функции типа срезки, показательная (бесконечный штраф), обратная и логарифмическая штрафные функции:

$$\Phi_k(x) = A_k \sum_{j=1}^m \left( \max(0, g_j(x)) \right)^2; \quad \Phi_k(x) = \sum_{j=1}^m e^{A_k g_j(x)};$$

$$\Phi_k(x) = \frac{1}{A_k} \sum_{j=1}^m \frac{1}{-g_j(x)} \quad \text{и} \quad \Phi_k(x) = -\frac{1}{A_k} \sum_{j=1}^m \ln(-g_j(x)), \quad \text{если}$$

$g_j(x) < 0$ , и  $\Phi_k(x) = +\infty$ , если  $g_j(x) \geq 0$ .

Здесь последовательность  $A_k$  такая, что  $A_k > 0$ ,  $A_k \rightarrow +\infty$ .

В работах [4, 5] для решения поставленной задачи методом штрафов А.А. Капланом вводятся в рассмотрение функции:

$$\Phi_k^{(t)}(x) = A_k \sum_{j=1}^m \left( g_j(x) + \sqrt{g_j^2(x) + A_k^{-2-t}} \right), \quad t \geq 0 - \text{константа.}$$

Для рассматриваемых функций в работах [4-6] установлена справедливость следующей теоремы.

**Теорема 1.** Указанные выше системы функций для задачи выпуклого программирования при  $A_k > 0$ ,  $A_k \rightarrow +\infty$  обладают свойствами:

1.  $\Phi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – выпуклые функции.
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = 0$ , если  $x \in \text{int } K$ .
3.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = +\infty$ , если  $x \notin K$ .
4. Начиная с некоторого номера, функции  $F_k(x) = f(x) + \Phi_k(x)$  достигают своего безусловного минимума, последовательность  $\{x^k\}$  точек минимума функций  $F_k$  ограничена, любая ее предельная точка принадлежит множеству  $K$  и доставляет минимум  $f$  на  $K$ .

Таким образом, приведенная теорема говорит о принадлежности рассматриваемых классов функций к штрафным функциям.

Два первых типа из перечисленных выше функций и функции Каплана относятся к внешним штрафным функциям, а обратный и логарифмический штрафы – внутренние.

Метод штрафных функций – это двухступенчатый итерационный процесс. При отыскании решения задачи на безусловный экстремум

применяются, как правило, итерационные градиентные методы. Поэтому скорость сходимости композиции методов оценивается числом больших шагов (методом штрафов), каждый из которых состоит из отыскания точки  $x_\varepsilon^k$  – точки минимума функции  $F_k(x) = f(x) + \Phi_k(x)$ , полученной градиентным методом с заданной точностью  $\varepsilon$ .

Следующая далее теорема, фрагменты которой представлены в работах [5–8], дает при указанных в ней условиях оценки скорости сходимости методов штрафных функций.

**Теорема 2.** Пусть функции  $f \in C^2(R^n)$ ,  $g_j \in C^1(R^n)$ ,  $j=1,2,\dots,m$  – выпуклые,  $(f''(x)\varepsilon, \varepsilon) \geq \gamma \|\varepsilon\|^2$  при некотором  $\gamma > 0$  и любых  $x$  и  $\varepsilon$ .

Тогда для  $0 < \tau < 1$  при применении метода штрафов с использованием штрафных функций Каплана с градиентным критерием останова  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$  справедливо неравенство:

$$\|x^k - x^*\|^2 \leq \frac{1}{4\gamma} \left( \frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma} (f(x^0) - f(x^*)) + \frac{m}{2} A_k^{-\tau} \right) + \frac{\varepsilon_k^2}{32\gamma^2},$$

начиная с некоторого номера  $k$  ( $x^*$  – точное решение исходной задачи,  $x^0$  – из внутреннейности множества  $K$ ). Для функций бесконечного штрафа справедливо:

$$\|x^k - x^*\|^2 \leq \frac{1}{\gamma} \left( \frac{A_k^{-1} \ln A_k}{\sigma} (f(x^0) - f(x^*)) + mA_k^{-1} \right) + \frac{\varepsilon_k^2}{8\gamma^2},$$

а для обратного штрафа:

$$\|x^k - x^*\|^2 \leq \frac{1}{\gamma} \left( \frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma} (f(x^0) - f(x^*)) + mA_k^{-\tau} \right) + \frac{\varepsilon_k^2}{8\gamma^2},$$

где  $0 < \tau < 1$ . При ограничениях определенного вида в исходной экстремальной задаче методы барьерных функций и внешних штрафных функций логично комбинировать. Это комбинирование обуславливается достаточно конкретным видом ограничений, но, как оказывается, сохраняет теоретическую сходимость [3] при тех же условиях, что и для «чистых» методов. А именно, с использованием выше приведённых результатов, устанавливается справедливость утверждения следующей теоремы.

**Теорема 3.** Пусть в условиях теорем 1 и 2 рассматриваются решения  $x^k$  задачи минимизации функции  $F_k(x) = f(x) + \Phi_k'(x) + \Phi_k''(x)$ , где  $\Phi_k'(x)$  – внешние штрафные функции для части ограничений, а  $\Phi_k''(x)$  – внутренние штрафные функции для остальных ограничений.

Для сочетаний следующих штрафных функций в комбинированном методе – бесконечный и обратный штраф, соответственно, штрафные функции Каплана и обратный штраф, справедлива следующая оценка:

$$\|x^k - x^*\|^2 \leq \frac{1}{\gamma} \left( \frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma} (f(x^0) - f(x^*)) + mA_k^{-\tau} \right) + \frac{\varepsilon_k^2}{8\gamma^2}, \text{ где } 0 < \tau < 1.$$

С вычислительной точки зрения, применение, как «чистых» методов, так и комбинированных сталкивается с решением вопроса о начале вычислительного процесса и его конце, то есть об обрыве процесса поиска минимизирующей последовательности  $x^k$ . В данной работе завершение процесса обосновано градиентным критерием останова. Что касается начала процесса, то обычная практика состоит в том, что начинают процесс с умеренной величины штрафа, а затем ее увеличивают в ходе вычислений, не обязательно одинаково для внешних и внутренних штрафов.

### Библиографический список

1. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход / пер. с англ. – М., 1974.
2. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы / пер. с франц. – М., 1973.
3. Фиакко А, Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации / пер. с англ. – М., 1972.
4. Каплан А.А. К вопросу о реализации метода штрафов. – Новосибирск, 1976.
5. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. – Новосибирск, 1981.
6. Саженков А.Н., Саженкова Т.В., Пронь С.П. Об исследовании одного класса штрафных функций // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. – Вып. 2. / главный редактор Е.Д. Родионов. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2016. – С. 86–88.
7. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. О некоторых свойствах интегральных штрафных функций // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию; № 3 (2017). – Барнаул: Изд. АлтГУ, 2017. – С. 30–33
8. Саженкова Т.В., Саженков А.Н., Плотникова Е.А. О применении одного класса интегральных штрафных функций при решении вариационных задач // Известия АлтГУ. – 2018. – №1(99). – С. 123–126.

### Канонический базис эники

*И.В. Поликанова*

*АлтГПА, г. Барнаул*

При изучении линий в  $n$ -мерном аффинном пространстве  $A^n$ , всякие 2 дуги которых аффинно-эквивалентны, автор обнаружил [1, 2], что отмеченным свойством обладают линии, задаваемые в некоторой аффинной системе координат (АСК) параметризацией

$$\vec{r} = (u, u^2, u^3, \dots, u^n), u \in I, \quad (1)$$

где  $I$  – числовой промежуток, а верхние индексы означают степени.

Пространственная кривая  $\gamma_k$  в  $A^n$ , задаваемая в некоторой АСК параметризацией

$$\vec{r} = (u, u^2, u^3, \dots, u^k, 0, \dots, 0), u \in I, \quad (2)$$

называется *эникой степени  $k$* . Эника степени 1 – прямая, степени 2 – парабола, степени 3 – кубика. При  $k < n$  эника вырождена.

Назовём АСК *канонической*, если в ней эника  $\gamma_n$  задаётся *канонической параметризацией*

$$\vec{r} = \left( u, \frac{u^2}{2!}, \frac{u^3}{3!}, \dots, \frac{u^n}{n!} \right), u \in I, \quad (3)$$

или в координатах:

$$x_i = \frac{x_1^i}{i!}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (4)$$

Цель статьи – установить существование канонической АСК в каждой точке эники и выяснить её геометрический смысл.

#### **Теорема 0** [3].

а) Если семейство параллельных гиперплоскостей в  $A^n$  таково, что каждая гиперплоскость пересекает энику в точках, сумма кратностей которых равна  $n$ , то центры масс этих наборов точек принадлежат одной прямой.

б) Для любых семейств параллельных гиперплоскостей в  $A^n$ , обладающих указанным свойством, прямые, содержащие центры масс точек пересечения эники с гиперплоскостями семейств, параллельны.

Определяемое ими направление называется *асимптотическим*.

в) Эника (1) имеет единственное асимптотическое направление, определяемое осью  $O_{x_n}$ .

Напомним, что *-ой соприкасающейся плоскостью* гладкой линии  $\gamma$ :  $\vec{r} = \vec{r}(u)$ ,  $u \in I$ , в точке  $M(t) \in \gamma$ , соответствующей параметру  $t$ , называется проходящая через эту точку  $k$ -мерная плоскость, векторное

пространство которой натянуто на линейно независимые векторы  $\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \dots, \vec{r}^{(k)}(t)$ .

Легко доказывается утверждение.

**Теорема 1.** *Проекция эники  $\gamma_n:(1)$  вдоль  $(n-k)$ -мерной координатной плоскости  $O_{x_{k+1}\dots x_n}$  на  $k$ -ую соприкасающуюся плоскость в точке  $O$  есть эника  $\gamma_k$ . отображение проектирования  $\gamma_n$  на  $\gamma_k$  есть гомеоморфизм.*

**Теорема 2.** *Для любой точки эники существует каноническая АСК с началом в этой точке.*

*Доказательство.* Прежде всего, заметим, что существует АСК, в которой эника задаётся канонической параметризацией. Для этого надо перейти от базиса  $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ , в котором эника задаётся формулами (1), к базису  $\{i! \vec{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ .

Пусть  $n = 2$ . Эника задаётся каноническим уравнением  $\vec{r} = \left(u, \frac{u^2}{2!}\right)$  или  $y = \frac{x^2}{2}$ . Перейдём к новой АСК с началом в точке  $M(t) = \left(t, \frac{t^2}{2!}\right) \in \gamma$  и базисными векторами  $\vec{r}'(t) = (1, t)$  и  $\vec{e} = (0, 1)$ . Формулы преобразования координат при переходе к новой АСК имеют вид:

$$x = \tilde{x} + t, \quad y = t\tilde{x} + \tilde{y} + \frac{t^2}{2!}.$$

Тогда в новой АСК парабола будет задаваться уравнением

$$t\tilde{x} + \tilde{y} + \frac{t^2}{2} = \frac{(\tilde{x}+t)^2}{2}.$$

Преобразуя его, получим:  $\tilde{y} = \frac{\tilde{x}^2}{2}$  – опять же каноническое. Таким образом, АСК  $\{M(t); \vec{r}'(t), \vec{e}\}$  – каноническая.

Аналогично проверяется, что в  $A^3$  канонической для эники будет АСК  $\{M(t); \vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{e}\}$ , где  $\vec{e} = \vec{r}'''(t) = (0, 0, 1)$ . Докажем, что  $I_n = \{M(t); \vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \dots, \vec{r}^{(n-1)}(t), \vec{r}^{(n)}(t)\}$  – каноническая АСК в  $A^n$  для эники  $\gamma_n$ , задаваемой в некоторой АСК формулами (3) или (4). (Входящие в АСК векторы линейно независимы). Применим индукцию по размерности пространства. Так как  $\vec{r}^{(i)}(t) = \left(0, \dots, 0, 1, t, \frac{t^2}{2!}, \dots, \frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\right)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , (1 стоит на  $i$ -ом месте), то формулы преобразования координат при переходе к АСК  $I_n$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1 + t \\ x_2 &= t\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \frac{t^2}{2!} \\ x_3 &= \frac{t^2}{2!}\tilde{x}_1 + t\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + \frac{t^3}{3!} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$x_{n-1} = \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \tilde{x}_1 + \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \tilde{x}_2 + \dots + \tilde{x}_{n-1} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$x_n = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \tilde{x}_1 + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \tilde{x}_2 + \dots + t \tilde{x}_{n-1} + \tilde{x}_n + \frac{t^n}{n!},$$

где  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – координаты точки в старой (канонической) АСК, а  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$  – координаты той же точки в новой АСК  $I_n$ . Заметим, что первые  $n-1$  формул имеют тот же вид, что и формулы преобразования при переходе от усечённой старой АСК  $\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}\}$  к АСК  $I_{n-1} = \{M(t); \vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \dots, \vec{r}^{(n-1)}(t)\}$  в соприкасающейся гиперплоскости  $\sigma^{n-1} = A^{n-1}$ . Предположим, что при переходе к АСК  $I_{n-1}$  эника  $\gamma_{n-1}$  степени  $n-1$  задаётся каноническими уравнениями. Это означает, что подстановка в (4) формул преобразования координат равносильными преобразованиями первых  $n-1$  равенств системы приводит её к виду:

$$\tilde{x}_i = \frac{\tilde{x}_1^i}{i!}, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (5)$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \tilde{x}_1 + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \tilde{x}_2 + \dots + t \tilde{x}_{n-1} + \tilde{x}_n + \frac{t^n}{n!} = \frac{(\tilde{x}_1 + t)^n}{n!}.$$

Подставляя в левую часть последнего равенства вместо  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}$  их выражения по формулам (5), получим:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \tilde{x}_1 + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \frac{\tilde{x}_1^2}{2!} + \dots + \frac{t \tilde{x}_1^{n-1}}{(n-1)!} + \tilde{x}_n + \frac{t^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} \frac{\tilde{x}_1^i}{i!} + \tilde{x}_n.$$

Разлагая правую часть того же равенства по биному Ньютона, будем иметь:

$$\frac{(\tilde{x}_1 + t)^n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{C_i^n}{n!} t^{n-i} \tilde{x}_1^i = \sum_{i=0}^n \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} \frac{\tilde{x}_1^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} \frac{\tilde{x}_1^i}{i!} + \frac{\tilde{x}_1^n}{n!}.$$

Сравнивая получившиеся выражения, приходим к равенству  $\tilde{x}_n = \frac{\tilde{x}_1^n}{n!}$ , которое вместе с формулами (5) представляет каноническое задание эники. Следовательно АСК  $I_n$  – каноническая. Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Существует бесконечное множество канонических АСК с началом в произвольной точке эники. Если  $I = \{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  и  $II = \{O; \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$  – две канонические АСК, то найдётся действительное число  $\mu$  такое, что  $\vec{a}_i = \mu^i \vec{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а параметры  $u$  и  $v$  соответственно первой и второй канонических параметризаций связаны соотношением:  $u = \mu v$ .*

*Доказательство.* Пусть  $I = \{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  и  $II = \{O; \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$  – две канонические АСК для эники  $\gamma_n$ , в которых она задаётся параметризациями (3) и  $\vec{\rho} = \left( v, \frac{v^2}{2!}, \frac{v^3}{3!}, \dots, \frac{v^n}{n!} \right)$ ,  $v \in J$ , соответственно. По тео-

реме 0 асимптотическое направление эники определяется геометрически и совпадает с направлением оси  $O_{x_n}$  при задании линии параметризацией (1), а, значит, и канонической параметризацией. Поэтому найдётся действительное число  $\lambda$  такое, что  $\vec{a}_n = \lambda \vec{e}_n$ . Общему началу координат  $O$  в обеих параметризациях соответствуют значения параметров  $u = v = 0$ . Векторы  $\vec{r}^{(i)}(0)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , совпадают с базисными векторами первой АСК, а векторы  $\vec{\rho}^{(i)}(0)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , совпадают с базисными векторами второй АСК, и те и другие лежат в соприкасающейся гиперплоскости  $\sigma^{n-1}$  эники в точке  $O$ . Проекция эники  $\gamma_n$  на гиперплоскость  $\sigma^{n-1}$  вдоль асимптотического направления есть эника  $\gamma_{n-1}$ , задаваемая в АСК I и II параметризациями:  $\vec{r} = \left( u, \frac{u^2}{2!}, \frac{u^3}{3!}, \dots, \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}, 0 \right)$ ,  $u \in I$ , и  $\vec{\rho} = \left( v, \frac{v^2}{2!}, \frac{v^3}{3!}, \dots, \frac{v^{n-1}}{(n-1)!}, 0 \right)$ ,  $v \in J$ , соответственно. Пусть  $M$  – точка эники, соответствующая параметру  $v$  в АСК II,  $N$  – её проекция на  $\sigma^{n-1}$  вдоль асимптотического направления. Пусть  $u$  – параметр той же точки  $M$  в первой параметризации, рассматриваемый как функция от  $v$ . Имеем:  $\vec{NM} = \frac{u^n}{n!} \vec{e}_n = \frac{v^n}{n!} \vec{a}_n$ . Тогда

$$\frac{u^n}{n!} \vec{e}_n = \frac{v^n}{n!} \lambda \vec{e}_n. \quad \text{Следовательно,}$$

$$u = \lambda^{\frac{1}{n}} v. \quad (6)$$

Повторяя рассуждения для  $\gamma_{n-1}$ , придём к выводу, что  $\vec{a}_{n-1} = \lambda_{n-1} \vec{e}_{n-1}$  для некоторого действительного числа  $\lambda_{n-1}$  и  $\frac{u^{n-1}}{(n-1)!} \vec{e}_{n-1} = \frac{v^{n-1}}{(n-1)!} \vec{a}_{n-1}$ . С учётом (6), получим:  $\frac{(\lambda^{\frac{1}{n}} v)^{n-1}}{(n-1)!} \vec{e}_{n-1} = \frac{v^{n-1}}{(n-1)!} \lambda_{n-1} \vec{e}_{n-1} \Rightarrow \lambda_{n-1} = \lambda^{\frac{n-1}{n}} \Rightarrow \vec{a}_{n-1} = \lambda^{\frac{n-1}{n}} \vec{e}_{n-1}$ . Аналогично убеждаемся, что  $\vec{a}_i = \lambda^{\frac{i}{n}} \vec{e}_i$ . Обозначим

$\mu = \lambda^{\frac{1}{n}}$ . Тогда  $u = \mu v$ ,  $\vec{a}_i = \mu^i \vec{e}_i$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** Если фиксировать во всех канонических АСК последний вектор, то для каждой точки существует единственная каноническая АСК с началом в этой точке.

**Следствие 2.** В случае задания эники  $\gamma_n$  формулами (3) АСК  $I_n = \{M(t); \vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \dots, \vec{r}^{(n)}(t)\}$  – каноническая, непрерывно меняющаяся от точки к точке.

**Следствие 3.**  $(n-k)$ -мерные плоскости в  $A^n$ , параллельные координатной плоскости  $O_{x_{k+1} \dots x_n}$  канонической АСК эники  $\gamma_n$ , пересекают  $\gamma_n$  не более чем в одной точке.

Из теоремы 3 вырисовывается следующий геометрический смысл канонической АСК  $O_{x_1 \dots x_n}$ : ось  $O_{x_1}$  является касательной к энике в точ-

ке  $O$ , ось  $O_{x_n}$  является прямой асимптотического направления для эники  $\gamma_n$ , ось  $O_{x_k}$  является прямой асимптотического направления для проекции эники  $\gamma_n$  на  $k$ -ую соприкасающуюся плоскость в точке  $O$  вдоль координатной плоскости  $O_{x_{k+1} \dots x_n}$  при  $k = 2, \dots, n-1$ . Заметим, что, как следует из [4, рг. 6.1], определённый выше канонический базис совпадает с экви-аффинным базисом, предложенным D. Davis для изучения аффинных кривых.

### Библиографический список

1. Поликанова И.В. Об аффинной эквивалентности параболических дуг // Сборник научных статей международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования», Барнаул, 11–14 ноября, 2014 – Барнаул, – С. 344–346.
2. Поликанова И.В. О линиях в  $n$ -мерном аффинном пространстве с аффинно-эквивалентными дугами // МАК-2015: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015.– С. 34–38.
3. Поликанова И.В. Асимптотическое направление эники // Научное электронное издание: Сборник научных статей международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования» – 2017. Барнаул, 14-17 ноября, – 2017. – С. 317–320.
4. Davis D. Generic affine differential geometry of curves in  $\mathbb{R}^n$  // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, – 2006. – P. 1195–1205.

УДК 514.752

## О восстановления поверхности по заданной сумме главных радиусов кривизны

*Т.Д. Туканаев*

*ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г. Астана*

Введем в пространстве  $E^{n+1}$  прямоугольную декартову систему координат  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ . Пусть  $S^n$  – единичная  $n$ -мерная сфера в  $E^{n+1}$ , центр которой совпадает с началом координат. Полусферу, соответствующую  $x_{n+1} > 0$ , обозначим  $S_+^n$ . Спроектируем координатную сеть  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на плоскости  $E^n : x_{n+1} = 1$  на полусферу  $S_+^n$ , получим координатную сеть  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

Будем рассматривать класс гиперповерхностей  $\tilde{\Phi}$ , имеющих сферическим изображением полусферу  $S_+^n$ . Пусть  $H(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  – опорная функция. Используя положительную однородность первой степени функции  $H(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ , получим

$$h = \frac{1}{x_{n+1}} H(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = H\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1\right).$$

Положим  $u_1 = \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, u_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}$ , тогда имеем

$$h = h(u_1, \dots, u_n) = H(u_1, \dots, u_n, 1).$$

Назовем функцию  $h(u_1, \dots, u_n)$  также опорной функцией. Очевидно, каждая гиперповерхность  $\tilde{\Phi}$  биективно отображается на гиперповерхность  $\Phi$ , которая задается уравнением  $h = h(u)$ , где  $u = (u_1, \dots, u_n)$ .

По опорной функции  $h(u)$  гиперповерхность  $\tilde{\Phi}_i$  восстанавливается по формулам

$$\begin{cases} x_i = h_i, i = 1, 2, \dots, n \\ x_{n+1} = h - \sum_{i=1}^n u_i h_i \end{cases},$$

где  $h_i = \frac{\partial h}{\partial u_i}$ ,  $h_{ij} = \frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j}$  [1, с. 280].

Пусть заданы выпуклые гиперповерхности  $\tilde{\Phi}_1$  и  $\tilde{\Phi}_2$ , имеющие сферическим изображением полусферу  $S_+^n$ . Соответствующие им опорные функции  $h^1(u), h^2(u) \in C^2$  пусть удовлетворяют следующим условиям:

$$h^1(u) < h^2(u), \quad \lim_{\sqrt{\sum u_i^2} \rightarrow \infty} (h^2 - h^1) = 0.$$

Сумму главных радиусов кривизны гиперповерхности  $\tilde{\Phi}_i (i = 1, 2)$  обозначим через  $\phi^i (i = 1, 2)$ . Пусть выполнено неравенство

$$\phi^2(u) < \phi^1(u).$$

Рассмотрим следующую задачу: пусть в каждой точке гиперплоскости  $E^n$  определена функция  $\phi(u) \in C^{0,\lambda}$ . Требуется доказать существова-

ние и единственность гиперповерхности  $\tilde{\Phi}$ , восстанавливаемой по  $h(u) \in C^{2,\lambda}$ , сумма главных радиусов кривизны которой равна заданной функции  $\phi(u) \in C^{0,\lambda}$ , причем, если функция  $\phi(u)$  удовлетворяет неравенствам

$$\phi^2(u) \leq \phi(u) \leq \phi^1(u)$$

всюду на гиперплоскости  $E^n$ , то опорная функция  $h$ , задающая гиперповерхность  $\tilde{\Phi}$ , удовлетворяет условию

$$h^1(u) \leq h(u) \leq h^2(u).$$

Поставленная задача аналитически сводится к решению всюду на гиперплоскости  $E^n$  линейного эллиптического уравнения

$$\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n u_i^2} \left[ \sum_{i=1}^n (1 + u_i^2) h_{ii} + \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \neq t}}^n u_s u_t h_{st} \right] = \phi(u),$$

где  $\phi(u) \in C^{0,\lambda}$  удовлетворяет неравенствам  $\phi^2(u) \leq \phi(u) \leq \phi^1(u)$ . Будем искать решение в классе функции  $C^{2,\beta}$  на  $E^n$ , удовлетворяющее условию  $h^1(u) \leq h(u) \leq h^2(u)$ .

Для решения этой задачи будем следовать методу, предложенному в [2, с. 96]. Суть метода заключается в том, что гиперплоскость  $E^n$  аппроксимируется расширяющейся последовательностью концентрических замкнутых шаров, в каждом из которых решается соответствующая задача Дирихле. Из последовательности решений извлекается подпоследовательность, сходящаяся к решению исходной задачи. Имеет место

Теорема 1. Пусть всюду на  $E^n$  задана функция  $\phi(u) \in C^{0,\lambda}$ , удовлетворяющая неравенствам  $\phi^2(u) \leq \phi(u) \leq \phi^1(u)$ . Тогда существует единственное решение  $h(u)$  эллиптического уравнения, удовлетворяющее неравенствам  $h^1(u) \leq h(u) \leq h^2(u)$ , причем  $h(u)$  из класса  $C^{2,\lambda}$ .

Очевидно, что по опорной функции  $h(u)$  восстанавливается единственная гиперповерхность  $\tilde{\Phi}$  по вышеуказанным формулам такая, что сумма ее главных радиусов кривизны в каждой точке гиперплос-

кости  $E^n$  совпадает с заданной функцией  $\phi(u)$ . Гиперповерхность  $\tilde{\Phi}$ , вообще говоря, может быть нерегулярной.

Регулярность поверхности в трехмерном случае обеспечивается следующей теоремой [3, с. 20].

**Теорема 2.** Пусть  $F$  – незамкнутая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, заданная опорной функцией  $p(\bar{n}) \in C^4$ , определяемой в некоторой области  $\Omega$  единичной сферы  $S^2$  и пусть  $\phi(\bar{n})$  – сумма главных радиусов кривизны поверхности  $F$  в точке с нормалью  $\bar{n}$ . Тогда если в  $\Omega$  выполняются условия:  $\phi \in C^2$ ,  $\phi > 0$ ,  $\phi - \phi_{ss} > 0$ , где  $\phi_{ss}$  – вторая производная  $\phi$  по длине дуги любой геодезической на сфере  $S^2$ , то поверхность  $F$  регулярна.

### Библиографический список

1. Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом». – М.: Наука, 1973. – 440 с.
2. Пуолокайнен Т.М. Гиперповерхность с данной плотностью интегральной средней кривизны в  $E^{n+1}$  // Вопросы дифференциальной геометрии «в целом» : межвузовский сборник научных трудов. – Ленинград, ЛГПИ, 1983. – С. 96–104.
3. Кантор Б.Е., Туканаев Т.Д. О регулярности решения незамкнутой задачи Кристоффеля // Задачи геометрии в целом для погруженных многообразий : межвузовский сборник научных трудов. – Санкт-Петербург, РГПУ, 1991. – С. 20–26.

УДК 514.75

## Инверсия псевдосферы

*М.А. Чешкова*  
АлтГУ, Барнаул

Псевдосфера (поверхность Бельтрами) это поверхность постоянной отрицательной кривизны, образована вращением трактрисы около её асимптоты.

Уравнения псевдосферы имеют вид [1, с. 104]

$$\begin{aligned} r(u, v) &= (a \sin(u) \cos(v), a \sin(u) \sin(v), \\ &a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos(u))). \end{aligned} \quad (1)$$

Гауссова кривизна псевдосферы постоянна и равна  $-\frac{1}{a^2}$ ,  $u$  – угол между осью  $Oz$  и касательной к меридиану,  $u = \pi/2$  – ребро псевдосферы.

Построим псевдосферу (рисунок 1), где

$$a=4, u \in [\pi/24, \pi/2], v \in [0, 2\pi].$$

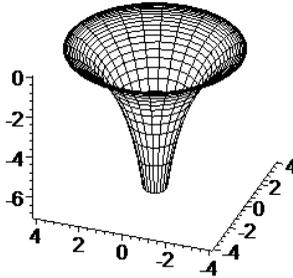


Рисунок 1 – Псевдосфера

Рассмотрим инверсию [2, с. 482]

$$r^* - r_0 = \frac{m^2(r - r_0)}{\langle r - r_0, r - r_0 \rangle} \quad (2)$$

относительно сферы радиуса  $m$  с центром  $r_0$ .

Центр инверсии поместим на ось псевдосферы. Положим, для определенности,  $r_0 = (0, 0, 0)$ . Построим инверсию псевдосферы (рисунок 2).

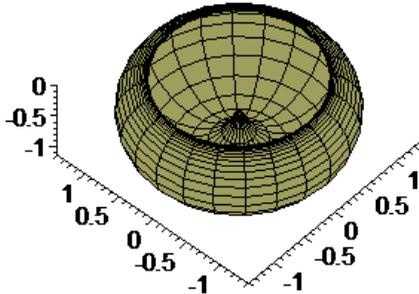


Рисунок 2 – Инверсия псевдосферы

Получаем «вывернутую псевдосферу».

Чтобы исследовать взаимоположения псевдосферы и её инверсии, рассмотрим параметр  $m$ .

Возможны три случая.

Случай первый:  $m < a$ . Положим  $m = 2$ , построим псевдосферу (светлая) и её инверсию (темная) (рисунок 3).

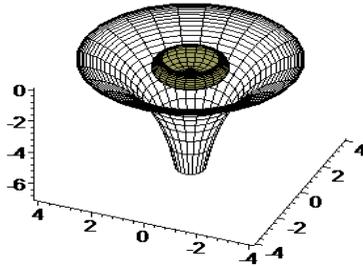


Рисунок 3 – Псевдосфера и её инверсия  $m < a$

Случай второй:  $m = a$ . Положим  $m = 4$ , построим псевдосферу (светлая) и её инверсию (темная) (рисунок 4).

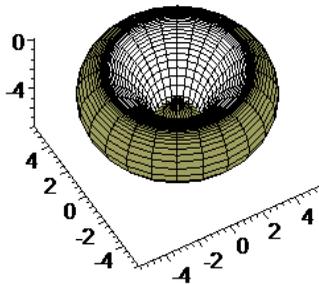


Рисунок 4 – Псевдосфера и её инверсия  $m = a$

Случай третий:  $m > a$ . Положим  $m = 5$ , построим псевдосферу (светлая) и её инверсию (темная) (рисунок 5).

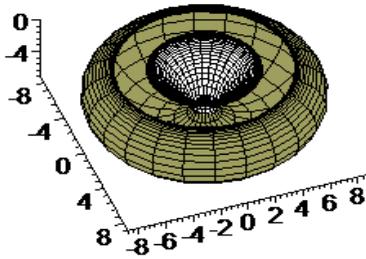


Рисунок 5 – Псевдосфера и её инверсия  $m > a$

### Библиографический список

1. Поздняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. – М. : Изд-во МГУ, 1990. – 384 с.
2. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. – М. : Изд-во Наука, 1966. – 647 с.

УДК 514.75

### К геометрии бутылки Клейна на сфере $S^3$ в $E^4$

*М.А. Чешкова*  
АлтГУ, г. Барнаул

Рассмотрим тор Клиффорда в  $E^4$

$$\rho(u, v) = (\cos(u), \sin(u), \cos(v), \sin(v))$$

и обмотку тора

$$\rho(u) = \left(\cos\left(\frac{u}{2}\right), \sin\left(\frac{u}{2}\right), \cos(u), \sin(u)\right).$$

Так как  $\rho(u) = \rho(u + 4\pi)$ , то вектор-функция

$$s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho_1(u)), \text{ где } \rho_1(u) = \rho(u + 2\pi)$$

есть  $2\pi$ -периодическая не равная нулю, а вектор-функция

$$l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho_1(u)) \text{ есть } 2\pi\text{-антипериодическая.}$$

Имеем

$$s(u) = (0, 0, \cos(u), \sin(u)), l(u) = \left(\cos\left(\frac{u}{2}\right), \sin\left(\frac{u}{2}\right), 0, 0\right).$$

Определим поверхность  $KL$  уравнением

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \cos(v)s(u) + \sin(v)l(u), \\ u &\in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi].. \end{aligned} \quad (1)$$

**Теорема 1.** *Поверхность  $KL$  топологически эквивалентна бутылке Клейна.*

**Доказательство.** Рассмотрим бутылку Клейна как фактор-пространство [Фоменко 7, с.75]

$[-\pi, \pi]X[-\pi, \pi]/[(-\pi, -v) \approx (\pi, v), (u, -\pi) \approx (u, \pi)]$ . Так как  $s(u+2\pi) = s(u), l(u+2\pi) = -l(u)$ , то

$r(-\pi, -v) = r(\pi, v), r(u, -\pi) = r(u, \pi)$ , и поверхность

$KL$  определяет модель бутылки Клейна.

**Теорема 2.** *Если кривая  $\rho = \rho(u)$  есть обмотка тора Клиффорда, то поверхность  $KL$  есть минимальная поверхность на сфере.*

**Доказательство.**

Из (1) следует

$$\begin{aligned} r_u &= \cos(v)s'(u) + \sin(v)l'(u), \\ r_v &= -\sin(v)s(u) + \cos(v)l(u), \\ g_{22} &= (r_v, r_v) = 1, g_{12} = 0, g_{11} = \cos(v)^2 + \frac{1}{4}\sin(v)^2, \\ g &= \det(g_{ij}) = g_{11}. \end{aligned}$$

Поместим начало координат центр сферы  $S^3$ . Обозначим через  $n_1, n_2$  – орты нормалей к поверхности  $KL \subset S^3 \subset R^4$ .

Имеем

$$\begin{aligned} n_1 &= r(u, v) = \cos(v)s(u) + \sin(v)l(u), \\ n_2 &= \frac{1}{\sqrt{4g}} (4\cos(v)l'(u) - \sin(v)s'(u)). \end{aligned}$$

$$\nabla_i^\perp n_\alpha = 0, \alpha = 1, 2.$$

Определим операторы [2, с. 22]  $A_1, A_2$ :

$$(r_i, A_{\alpha j}^k r_k) = (r_{ij}, n_\alpha), \alpha = 1, 2.$$

Имеем

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2g\sqrt{g}} \\ \frac{1}{2g\sqrt{g}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор

$$\eta = \frac{1}{2}(tr(A_1)n_2 + tr(A_2)n_1)$$

есть вектор средней нормали поверхности  $KL$  в  $E^4$  [2, с. 40], а вектор  $\eta^* = \frac{1}{2}tr(A_2)n_2$  есть вектор средней нормали поверхности  $KL$  в  $S^3$  (3, с.11). Так как  $tr(A_2)=0$ , то поверхность  $KL$  в  $S^3$  минимальная.

Минимальная в  $S^3$  поверхность  $KL$  относится к классу поверхностей Лаусона [4]:

$$\Psi(x, y) = (\cos(\alpha x)\cos(y), \sin(\alpha x)\cos(y), \cos(x)\sin(y), \sin(x)\sin(y)), \alpha > 0.$$

#### Библиографический список

1. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. – М., 1995.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. – М. : Наука, 1981.
3. Chen B. Geometry of submanifolds and its applications // Sci.Univ. – Tokyo, 1981.
4. Lawson H.B.Jr. Complete minimal surfaces in  $S^3$  // Ann. Math. – 1970. – V. 2. – P. 335–374.

### Секция 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УДК 517.95

#### Разрешимость одномерной задачи двухфазной фильтрации с переменной пористостью

*С.В. Алексеева, А.А. Папин*

*АлтГУ, г. Барнаул*

##### Постановка задачи

В работе рассматривается математическая модель двухфазной фильтрации с переменной пористостью. Примером такой задачи является модель тающего снега. Снег рассматривается как пористая среда, твердый каркас которого составляют частички льда. В процессе таяния в пористой среде происходит совместное движение воды, воздуха и льда. То есть снег представляет собой трехфазную среду, состоящую из воды ( $i=1$ ), воздуха ( $i=2$ ) и льда ( $i=3$ ). Для описания процесса используются уравнения массы для каждой фазы [1], система уравнений двухфазной фильтрации Маскета-Левеверетта для воды и воздуха [2], уравнение сохранения энергии для тающего снега (в пренебрежении сублимацией и обменом массами между водой и воздухом) [3]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^3 I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \quad I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{j=1}^3 I_{ij} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{v}_i = s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0(\phi) \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2,$$

$$p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \quad \sum_{j=1}^2 s_j = 1, \quad (2)$$

$$\left( \sum_{j=1}^3 \rho_j^0 c_j \alpha_j \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left( \sum_{j=1}^2 \rho_j^0 c_j \vec{v}_j \right) \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) + v \frac{\partial \rho_3^0 \alpha_3}{\partial t}. \quad (3)$$

Здесь

$\vec{u}_i$  – скорость  $i$ -ой фазы;

$\rho_i$  – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью  $\rho_i^0$  и объемной концентрацией  $\alpha_i$  соотношением  $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ ;

$I_{ji}$  – интенсивность фазового перехода массы из

$j$ -й в  $i$ -ю составляющую в единице объема в единицу времени;

$\vec{v}_i = \phi s_i \vec{u}_i$  – скорости фильтрации воды и воздуха;

$\phi$  – пористость снега;

$s_1, s_2$  – насыщенность воды и воздуха ( $\alpha_1 = \phi s_1, \alpha_2 = \phi s_2$ ,

$\alpha_3 = 1 - \phi$ );

$K_0(\phi)$  – симметрический тензор фильтрации;

$\bar{k}_{0i}$  – относительные фазовые проницаемости ( $k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0$ ,  $k_{0i}|_{s_i=0} = 0, 0 \leq s_i \leq 1$ );

$\mu_i$  – коэффициенты динамической вязкости;

$\vec{g}$  – ускорение силы тяжести;

$p_1, p_2$  – соответственно давления первой и второй фаз;

$p_c$  – капиллярное давление;

$\theta$  – температура среды ( $\theta_i = \theta, i = 1, 2, 3$ );

$c_i = \text{const} > 0$  – теплоемкость  $i$ -й фазы при постоянном объеме;

$v = \text{const} > 0$  – удельная теплота плавления льда;

$\lambda_c$  – теплопроводность снега;

$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$  – оператор градиента,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

В монографии [3] система (1)–(3) рассматривалась при следующих гипотезах:  $\vec{u}_3, I_{12} = 0, I_{23} = 0, I_{31} = I_{31}(\theta), \rho_i^0 = \text{const}$ . Из этих предположений выводится, что пористость является, в частности, функцией температуры. Обоснование автомодельной начально-краевой задачи для системы (1)–(3) проверено в [4].

Цель настоящей работы – обоснование одномерного изотермического движения двухфазной смеси несмешивающихся несжимаемых жидкостей в случае постоянной пористости  $\phi(x, t)$ . Система (1)–(2) может быть приведена к виду:

$$\frac{\partial s \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_0 a \frac{\partial s}{\partial x} + F \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} \right) + b v \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial p}{\partial x} + f \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left( \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} - 1 \right) \right), \quad (5)$$

где

$$p = p_1 - \int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c(\xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad v = v_1 + v_2 = K \frac{\partial p}{\partial x} + f,$$

$$k(s) = k_{01} + k_{02}, \quad K(s, \phi) = k(s)K_0(\phi),$$

$$K_1(s, \phi) = k_{01}K_0(\phi), \quad a(s) = -\frac{k_{01}k_{02}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s},$$

$$f_0(s, \phi) = K_1 \rho_1^0 g, \quad f(s, \phi) = K_0(k_{01} \rho_1^0 + k_{02}),$$

$$F(s, \phi) = f_0 - bf, \quad b(s) = \frac{k_{01}}{k}.$$

Данная система замыкается следующими краевыми и начальными условиями:

$$s(0, t) = s_0(t), \quad s(1, t) = s_1(t),$$

$$p(0, t) = p_0(t), \quad p(1, t) = p_1(t), \quad (6)$$

$$s(x, 0) = s^0(x).$$

Искомыми являются величины  $s$  и  $p$ . Система уравнений близка по структуре уравнениям двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей в случае известной пористости [5, 6]. При доказательстве разрешимости (4)–(6) главным моментом является доказательство физического принципа максимума для насыщенности  $0 \leq s \leq 1$ , в случае переменной пористости. После доказательства принципа максимума схема доказательства существования решения невырожденной задачи следует работе [7]. Похожие задачи были рассмотрены в работах [8, 9].

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291 «Гидроупругие и термодинамические эффекты при взаимодействии пороупругого снежно-ледового покрова с конструкциями».*

### Библиографический список

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. – М., 1987.
2. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М., 1971.
3. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико-математические модели. М., 1983.
4. Папин А.А., Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49. – № 4 (290).
5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.
6. Антонцев С.Н., Папин А.А. Приближенные методы решения задач двухфазной фильтрации Доклады Академии наук СССР. – 1979. – Т. 247. – № 3.
7. С. Н. Кружков, С. М. Сукорянский, Краевые задачи для систем уравнений типа двухфазной фильтрации; постановка задач, вопросы разрешимости, обоснование приближенных методов // Матем. сб. – 1977. Т. 104(146), № 1(9). – С. 69–88.
8. Алексеева С.В., Папин А.А., Одномерная задача о внутренней эрозии грунта // Ломоносовские чтения на Алтае. – 2017.
9. Papin A. A., Sibin A. N. Model isothermal internal erosion of soil // J. Phys.: Conf. Ser. Volume 722, conference 1, 2016. p. 1-8.

УДК 517.95 + 519.63

### Одномерная задача фильтрации несжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде

*Р.А. Вири, А.А. Папин*

*АлтГУ, г. Барнаул*

#### Постановка задачи

В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа

$$\frac{\partial \varphi \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \vec{v}_f \rho_f) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_s(1-\varphi)}{\partial t} + \operatorname{div}((1-\varphi)\vec{v}_s \rho_s) = 0, \quad (2)$$

$$\varphi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -k(\varphi)(\nabla p_f + \rho_f \vec{g}), \quad (3)$$

$$\operatorname{div} v_s = -a_1(\varphi)p_e - a_2(\varphi)\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot p_e\right), \quad (4)$$

$$p_e = p_{tot} - p_f, \quad (5)$$

$$\nabla p_{tot} - \rho_{tot} \vec{g} = 0, \quad (6)$$

$$p_{tot} = \varphi p_f + (1 - \varphi) p_s, \quad \rho_{tot} = \varphi \rho_f + (1 - \varphi) \rho_s. \quad (7)$$

рассматриваемая в области  $(\vec{x}, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega \in R^n$  при краевых и начальных условиях

$$\vec{v}_s |_{\partial Q_T} = \vec{v}_f |_{\partial Q_T} = 0, \quad \phi |_{t=0} = \phi^0(x). \quad (8)$$

Система (1)–(7) описывает нестационарное движение жидкости в вязкой пористой среде. Для описания процесса используются законы сохранения массы для каждой из фаз, закон Дарси, реологическое соотношение, уравнения баланса сил [1–4]. Здесь  $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_f, \vec{v}_s$  – соответственно плотности и скорости жидкой и твердой фаз,  $\varphi$  – пористость,  $p_e$  – эффективное давление,  $p_{tot}$  – общее давление,  $p_f, p_s$  – соответственно давления жидкой и твердой фаз,  $\rho_{tot}$  – плотность двухфазной среды;  $k(\varphi) = k\varphi^n/\mu$  – коэффициент фильтрации,  $a_1(\varphi) = \varphi^m/\eta$  – коэффициент объемной вязкости,  $a_2(\varphi) = \varphi^b/\beta_\varphi$  – коэффициент объемной сжимаемости;  $k, \eta$  – проницаемость и вязкость твердой среды;  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости;  $m, n, \beta_\varphi, b$  – параметры твердой среды. Плотности жидкой и твердой фаз считаются постоянными. Близкие по структуре системы рассматривались в работах [5–8].

В одномерном виде в массовых переменных Лагранжа система (1) – (7) принимает вид [9]

$$\frac{\partial(1-\varphi)}{\partial t} + (1 - \varphi)^2 \frac{\partial v_s}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varphi}{1-\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi (v_f - v_s) \right) = 0, \quad (10)$$

$$\varphi (v_f - v_s) = -k(\varphi) \left( (1 - \varphi) \frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g \right), \quad (11)$$

$$(1 - \varphi) \frac{\partial v_s}{\partial x} = a_1(\varphi) p_e - a_2(\varphi) \frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (12)$$

$$(1 - \varphi) \frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g. \quad (13)$$

Второе уравнение системы с учетом закона Дарси принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varphi}{1-\varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(\varphi) \left( (1 - \varphi) \frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g \right) \right) = 0. \quad (14)$$

Далее рассмотрим случай когда  $a_2(\varphi) = 0$ . Из (7) и (11) следует уравнение

$$\frac{1}{1-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -a_1(\phi)(p_{tot} - p_f) = -a_1(\phi)p_e.$$

Это уравнение можно представить в виде

$$p_{tot} - p_f = -\frac{\partial G(\phi)}{\partial t}, \quad (15)$$

где функция  $G(\phi)$  определяется равенством

$$\frac{\partial G}{\partial \phi} = \frac{1}{a_1(\phi)(1-\phi)}.$$

Уравнение (14) с учетом (13) и (15) переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(\phi) \left( (1-\phi) \frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_{tot} + \rho_f) \right) \right).$$

В безразмерных переменных последнее уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi^n (1-\phi) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\phi^m (1-\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \right. \\ \left. - \varepsilon \phi^n \left( \frac{\rho_f}{\rho_s} + (1-\phi) + \frac{\phi \rho_f}{\rho_s} \right) \right), \end{aligned}$$

где  $\lambda = \frac{k\eta}{\mu L^2}$ ,  $\varepsilon = \frac{gTL\rho_s}{\eta}$  – безразмерные параметры.

С учетом закона Дарси и граничных условий (8) приходим к задаче для отыскания функций  $p_e$  и  $\phi$ :

$$p_e = -\frac{1}{\phi^m (1-\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \phi|_{t=0} = \phi^0(x), \quad (16)$$

$$\frac{p_e \phi^m}{1-\phi} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi^n \left( (1-\phi) \frac{\partial p_e}{\partial x} + \varepsilon \left( \frac{\rho_f}{\rho_s} + (1-\phi) + \frac{\phi \rho_f}{\rho_s} \right) \right) \right) = 0, \quad (17)$$

$$\left( \phi^n \left( (1-\phi) \frac{\partial p_e}{\partial x} + \varepsilon \left( \frac{\rho_f}{\rho_s} + (1-\phi) + \frac{\phi \rho_f}{\rho_s} \right) \right) \right) |_{x=0, x=1} = 0. \quad (18)$$

Вопросы разрешимости задачи (16)–(18) в разных классах рассмотрены в работах [9–10]. В настоящей работе основное внимание уделено численному решению нелинейной задачи. Для численного анализа удобным оказалось сведение уравнения третьего порядка к системе двух уравнений соответственно первого и второго порядка. Для решения уравнения второго порядка с переменными коэффициентами использовалась однородная разностная схема. Для уравнения первого порядка использовался двухэтапный метод Рунге – Кутты. Полученное решение удовлетворяет физическому принципу максимума.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16 – 08 – 00291.*

### **Библиографический список**

1. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media // Elsevier, New York, 1972.
2. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta, 11 (1998), 55–84.
3. Morency S., Huismans R.S., Beaumont C, Fullsack P. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Research, 112(2007), B10407.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. – М., 1987. – Ч. 1.
5. Simpson M., Spiegelman M., Weinstein C.I. Degenerate dispersive equations arising in the study of magma dynamics // Nonlinearity, 20(2007), 21–49.
6. Tokareva M. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Т. 722, №1. – С. 012037.
7. Токарева М.А., Вирц Р.А. Аналитическое и численное исследование задачи фильтрации в пороупругой среде // Сборник трудов Всероссийской конференции по математике «МАК-2016». – 2016. – С. 75–79.
8. Токарева М.А., Вирц Р.А. Автомодельная задача фильтрации в пороупругой среде // Материалы международной школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае». – Барнаул, 2015.
9. Papin A.A., Tokareva M.A. On Local solvability of the system of the equation of one dimensional motion of magma // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2017. – Т. 10, № 3. – С. 385–395.
10. Папин А.А., Токарева М.А. Локальная разрешимость в классе непрерывных функций задачи о движении жидкости в деформируемой пористой среде // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2017. – №4. – С. 136–140.

## Автомодельное решение задачи абляции деформируемого ледового покрова

*Н.Ю. Глебова, А.А. Папин*

*АлтГУ, г. Барнаул*

В работе изучается модель, описывающая процесс сублимации льда. Лёд рассматривается как деформируемая пористая среда, в порах которой движется влажный воздух. В основе рассматриваемой модели лежат уравнения сохранения масс с учётом фазового перехода, закон Дарси для влажного воздуха, учитывающий движение пористого скелета, реологическое уравнение для пористости, уравнения равновесия и сохранения энергии для системы лёд-воздух [1, 2]:

$$\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi \rho_f \vec{u}_f) = -S, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (1 - \phi) \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div}((1 - \phi) \rho_s \vec{u}_s) = S, \quad (2)$$

$$\phi(\vec{u}_f - \vec{u}_s) = -K_0 \frac{k}{\mu} (\nabla p_f + \rho_f \vec{g}), \quad (3)$$

$$(c_f \rho_f^0 \phi + c_s \rho_s^0 (1 - \phi)) \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\phi \rho_f \vec{u}_f + (1 - \phi) \rho_s \vec{u}_s) \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) - L_s S, \quad (4)$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi) p_s, \quad p_e = (1 - \phi)(p_s - p_f), \quad (5)$$

$$\rho_{tot} = \phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_s, \quad (1)$$

$$p_f = \rho_f R \theta, \quad \nabla \cdot \vec{u}_s = -a(\phi) p_e, \quad \nabla p_{tot} = \rho_{tot} \vec{g}. \quad (7)$$

Здесь  $\rho_f, \rho_s, \vec{u}_f, \vec{u}_s$  – соответственно истинные плотности и скорости влажного воздуха и льда;  $\phi$  – пористость,  $p_f(\rho_f, \theta), p_s$  – соответственно давление льда и пара;  $p_e$  – эффективное давление;  $\theta$  – температура среды;  $S(\phi, \rho_f, \theta)$  – интенсивность фазового перехода лёд-влажный воздух;  $K_0$  – тензор фильтрации;  $k$  – проницаемость;  $\mu$  – динамическая вязкость газа;  $a(\phi), c_f, c_s, \lambda_c$  – параметры пороупругой среды;  $R$  – универсальная газовая постоянная.

В приложениях широко используется следующая эмпирическая формула для фазового перехода [3]:

$$S(x, t) = \frac{dm}{dt}(\theta, \sigma, u) \frac{3c(x, t)}{4\pi r^3}, \quad \frac{dm}{dt} = \frac{2\pi r \sigma}{\frac{L_s}{K\theta Nu} \left( \frac{L_s M}{R\theta} - 1 \right) + \frac{1}{D\rho_{tot} Sh}}, \quad \sigma = \left( \frac{\rho_f}{\rho_n} - 1 \right),$$

где  $L_s$  – теплота сублимации льда;  $c(x, t) = 1 - \phi$  – концентрация льда;  $\frac{dm}{dt}$  – скорость изменения массы;  $\sigma$  – пересыщение водяного пара относительно льда;  $M$  – молярная масса воды;  $r$  – радиус частицы;  $D$  – коэффициент диффузии;  $K$  – молекулярная теплопроводность в атмосфере;  $\rho_n$  – плотность насыщенного водяного пара;  $Nu$  – число Нуссельта;  $Sh$  – число Шервуда.

Данная зависимость для фазового перехода была использована в работах [4, 5]. В настоящей работе используется следующая формула

$$S = \begin{cases} G \phi(1 - \phi)(\rho_f - \rho_n) \frac{\rho_f}{\rho_n}, & 0 \leq \rho_f \leq \rho_n \\ 0, & \rho_f \leq 0, \quad \rho_f \geq \rho_n \end{cases},$$

$$G = \frac{3\rho_s}{\rho_n r^2 \left( \frac{L_s}{K\theta Nu} \left( \frac{L_s M}{R\theta} - 1 \right) + \frac{1}{D\rho_n Sh} \right)}.$$

Математическое обоснование постановок начально-краевых задач для системы (1)–(7) приведено в работе [6] в предположении, что лёд является неподвижной, вязкой и несжимаемой средой. В случае  $S = 0$  система рассматривалась в работе [7]. Близкие вопросы рассматривались в [8, 9, 10].

При исследовании системы (1)–(7) используются следующие гипотезы: температура постоянна ( $\theta = const$ ), сила тяжести отсутствует, движение является одномерным. В данных предположения строится автомодельное решение типа «бегущей волны»  $\xi = x - ct$ , где  $c < 0$ . В результате приходим к системе вида ( $-\infty < \xi < 0$ )

$$\frac{d}{d\xi} \left( (u_f - c)\rho_f \phi \right) = -S, \quad (8)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( (u_s - c)\rho_s(1 - \phi) \right) = S, \quad (9)$$

$$\phi(u_f - u_s) = -\tilde{K}_0 \frac{d\rho_f}{d\xi}, \quad \tilde{K}_0 = K_0 \frac{k}{\mu}, \quad (10)$$

$$\frac{du_s}{d\xi} = -a(\phi)p_e, \quad p_e = p^0 - p_f, \quad p_f = R\theta\rho_f, \quad p^0 = const. \quad (11)$$

Из (8) и (9) имеем

$$(u_f - c)\rho_f \phi + (u_s - c)\rho_s(1 - \phi) = A_1 = const. \quad (12)$$

Используя граничные условия

$$u_f(0) = u_f^+, \quad u_s(0) = u_s^+, \quad \phi(0) = \phi^+, \quad \rho_f = \rho^+, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} u_f(\xi) = u_f^-,$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} u_s(\xi) = u_s^-, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi(\xi) = \phi^-, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \rho_f(\xi) = \rho^-,$$

находим  $c < 0$  и  $A_1$  в виде

$$c = \frac{u_f^- \rho^- \phi^- - u_f^+ \rho^+ \phi^+ + \rho_s((1 - \phi^-)u_s^- - (1 - \phi^+)u_s^+)}{\rho^- \phi^- - \rho^+ \phi^+ + \rho_s(\phi^+ - \phi^-)},$$

$$A_1 = u_f^- \rho^- \phi^- + \rho_s(1 - \phi^-)u_s^- - c(\rho^- \phi^- - \rho_s(1 - \phi^-)).$$

Система (8)–(11) сводится к двум уравнениям:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\rho_{tot}} \left( A_1 + \tilde{K}_0 \rho_f \frac{dp_f}{d\xi} \right) \right) = -a(\phi)(p^0 - p_f),$$

$$\frac{d}{d\xi} ((u_s - c)\rho_s(1 - \phi)) = S, \quad u_s - c = \frac{1}{\rho_{tot}} \left( A_1 + \tilde{K}_0 \rho_f \frac{dp_f}{d\xi} \right).$$

Основным результатом работы является доказательство принципов максимума для  $\rho_f$  и  $\phi$ , вида  $0 \leq \rho_f \leq \rho_n$  и  $0 \leq \phi \leq 1$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291 «Гидроупругие и термодинамические эффекты при взаимодействии пороупругого снежно-ледового покрова с конструкциями».*

### Библиографический список

1. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико-математические модели. – М.: Наука, 1983. – 214 с., с. 105.
2. Fowler, A.C. (1990), A compaction model for melt transport in the Earth's asthenosphere, part 1, the basic model, in Magma Transport and Storage, edited by M.P. Ryan, pp. 3-14, Jhon Wiley, New York.
3. Thorpe A.D., B.J. Mason. The evaporation of spheres and ice crystals, Br. J. Appl. Phys., 17, 541–548, 1996.
4. C. D. Groot Zwaafink, H. L'owe, R. Mott, M. Bavay, and M. Lehnin. Drifting snow sublimation : A high- resolution 3-D model with temperature and moisture feedbacks, 2011.
5. Xiaoqing Dai, Ning Huang Numerical simulation of drifting snow sublimation in the saltation layer // Key Laboratory of mechanics on Disaster and Environment in Western China, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China, 2014.
6. Глебова Н.Ю., Папин А.А. Автомодельное решение задачи о сублимации снега. Ломоносовские чтения на Алтае(2017). – С. 404.
7. Токарева М.А. Конечное время стабилизации решения уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – Т. 2, № 1. – С. 153–157.
8. Папин А.А. Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 4 (290). – С. 13–24.

9. Papin A. A., Sibin A. N. Model isothermal internal erosion of soil // J. Phys.: Conf. Ser. Volume 722, conference 1, 2016. p. 1–8.

10. Папин А.А., Сибин А.Н. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Известия АлтГУ. – 2016. – № 1 (89). – С. 152–156.

## УДК 536.25

### Математические модели конвективных течений в условиях массопереноса на термокапиллярной границе раздела

*О.Н. Гончарова*  
*АлтГУ, г. Барнаул*

Теоретическому и экспериментальному изучению проблем конвекции жидкостей в условиях теплопереноса на границе раздела уделяется в настоящее время большое внимание [1]. Важность результатов таких исследований состоит в их использовании при решении комплекса научных задач механики жидкости и теплофизики, возникающих при оптимизации и совершенствовании прикладных разработок в области жидкостных технологий охлаждения, систем регистрации информации, получения кристаллов с высокой степенью структурной однородности. При проведении исследований разрабатываются новые либо уточнённые математические модели, адекватно описывающие изучаемые физические процессы, позволяющие выявить механизмы возможных кризисных явлений и определить способы управления течениями, изучить влияние разнородных физико-химических факторов, в частности, воздействия точечного лазерного излучения и испарения на структуру течения.

Одним из принципиальных вопросов математического моделирования является построение точного решения определяющих уравнений. На основе трёхмерных [2, 3] и двумерных [4, 5] точных решений уравнений Навье–Стокса в приближении Обербека–Буссинеска проводится аналитическое и численное исследование двухслойных течений с испарением и/или конденсацией на границе раздела. Построенные решения могут быть названы обобщением решения Остроумова–Бириха [6, 7], имеют групповую природу [8] и позволяют учесть одновременно наличие горизонтального и вертикального градиентов температуры, эффекты диффузионной теплопроводности и термодиффузии пара в газовой среде и на межфазной границе. Именно решения групповой природы подразумевают сохранение свойств симметрии,

заложенных при выводе основных уравнений и обеспечивающих, тем самым, физическое правдоподобие и физическую (экспериментальную) реализацию таких решений.

Впервые проведена классификация двухслойных термокапиллярных течений с испарением в двумерном случае. В случае равных значений продольных градиентов температуры на границах канала выделены три типа течений в зависимости от доминирующих сил: чисто термокапиллярное и смешанное течения и течение Пуазейлевой структуры. В общем случае, когда на внешних стенках канала прикладывается различная тепловая нагрузка, классификация может быть обобщена добавлением частных подклассов. Тем самым, получено расширение классификации Наполитано [9].

Изучены характеристики течений с испарением, зависимость массовой скорости испарения от параметров задачи, устойчивость течений, свойства и типы характеристических возмущений (см., например, [10]). Получены зависимости критических тепловых нагрузок, приводящих к потере устойчивости, для различных систем «жидкость – газ». Для задачи с деформируемой границей раздела численное исследование термокапиллярной конвекции проводится в случае локального нагрева одной из границ канала.

Представлены результаты численного моделирования трёхмерных и двумерных течений системы «жидкость – газ» типа «этанол – азот», «НFE7100 – азот», «FC72 – азот». Изучено влияние гравитационного поля, граничного теплового режима и испарения на динамику течения и распределение температуры

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-08-00291).*

### **Библиографический список**

1. Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н. Задачи испарительной конвекции (обзор) // Прикладная математика и механика. – 2018. – Т. 82 (2). – С. 1–42.
2. Goncharova O.N., Kabov O.A. Investigation of the two-layer fluid flows with evaporation at interface on the basis of the exact solutions of the 3D problems of convection // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Vol. 754 (032008). – P. 1–6.
3. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Three-dimensional thermocapillary flow regimes with evaporation // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – 894 (012023). – P. 1–9.
4. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях с испарением на границе раздела // ПМТФ. – 2014. – № 55(2). – С. 68–79.

5. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N., Shefer I.A. Analysis of an exact solution of problem of the evaporative convection (Review). Part I. Plane case // J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys. – 2018. – Vol. 11 (2). – P. 178–190.

6. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – Москва-Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. – 256 с.

7. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. – 1966. – № 3. – С. 69–72.

8. Пухначёв В.В. Теоретико-групповая природа решения Бириха и их обобщения. Симметрии и дифференциальные уравнения // Сб. науч. тр. – Красноярск: РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. моделирования. – 2000. – С. 180–183.

9. Napolitano L.G. Plane Marangoni Poiseuille flow of two immiscible fluids // Acta Astronautica. – 1980. – No. 7. – P. 461–478.

10. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Stability of the exact solutions describing the two-layer flows with evaporation at interface // Fluid Dynamics Research. – 2016. – Vol. 48 (6). – 061408. – P. 1–25.

**УДК 517.95 + 532.582**

### **Исследование формирования вынужденных гравитационных волн в канале, покрытом битым льдом**

*К.Н. Завьялова, К.А. Шишмарев*

*АлтГУ, г. Барнаул*

В данной работе исследуется формирование волн в канале покрытом битом льдом, вызванных движением внешней нагрузки. Внешняя нагрузка моделируется гладкой локализованной функцией. Исследуется установившееся решение в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой с постоянной скоростью. Битый лед моделируется уравнением тонкой пластины с нулевой жесткостью. Основными уравнениями являются дифференциальное уравнение колебаний битого льда и уравнение Лапласа для потенциала скорости течения жидкости в канале. Данные уравнения замыкаются граничными условиями непротекания на твердых границах канала, кинематическим и динамическим условиями на границе битый лед – жидкость. Предложен алгоритм полуаналитического решения рассматриваемой задачи, где решение представляется в виде аналитических формул, полученных методами аппроксимации подынтегральных функций.

Рассматривается прогиб битого льда в канале вызванный движением внешней нагрузки вдоль канала. Канал имеет прямоугольное сечение с глубиной  $H$ , ( $0 \geq z \geq -H$ ), и шириной  $2L$ , ( $-L \leq y \leq L$ ). В направлении оси  $x$  канал не ограничен. Канал занят жидкостью плотностью  $\rho_l$ . Рассматривается невязкая и несжимаемая жидкость, покрытая битым льдом постоянной толщины. Внешняя нагрузка моделируется локализованным гладким распределением давления над верхней поверхностью битого льда. Задача прогиба битого льда в канале формулируется в рамках линейной теории гидроупругости. Прогиб  $w(x, y, t)$  описывается уравнением колебания битого льда [1, 2]

$$Mw_{tt} = -P(x, y, t) + p(x, y, 0, t) \quad (1)$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0),$$

где  $M = \rho_i h_i$  – масса битого льда на единицу площади,  $\rho_i$  – плотность льда,  $p(x, y, 0, t)$  – гидродинамическое давление, действующее на нижнюю поверхность битого льда,  $P(x, y, t)$  – внешнее давление,  $t$  – время. Внешнее давление движется вдоль центральной линии канала и моделируется гладкой функцией  $P(x, y, t)$

$$P(x, y, t) = P_0 P_1\left(\frac{x-Ut}{L}\right) P_2\left(\frac{y}{L}\right) \quad (2)$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L),$$

$$P_1(\tilde{x}) = (\cos(\pi c_1 \tilde{x}) + 1)/2 \quad (c_1 |\tilde{x}| < 1),$$

$$P_1(\tilde{x}) = 0 \quad (c_1 |\tilde{x}| \geq 1), \quad \tilde{x} = (x - Ut)/L,$$

$$P_2(\tilde{y}) = (\cos(\pi c_2 \tilde{y}) + 1)/2 \quad (c_2 |\tilde{y}| < 1),$$

$$P_2(\tilde{y}) = 0 \quad (c_2 |\tilde{y}| \geq 1), \quad \tilde{y} = y/L,$$

где  $c_1, c_2$  – безразмерные параметры внешней нагрузки, характеризующие размер зоны давления. Гидродинамическое давление на границе лед-жидкость удовлетворяет линеаризованному уравнению Бернулли

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_l \varphi_t - \rho_l g w \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L),$$

где  $g$  – гравитационное ускорение,  $\varphi(x, y, z, t)$  – потенциал скорости течения, удовлетворяющий уравнению Лапласа в области течения

$$\Delta \varphi = 0 \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L)$$

и граничным условиям

$$\varphi_z = w_t \quad (z = 0), \quad \varphi_y = 0 \quad (y = \pm L),$$

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -H). \quad (4)$$

Задача (1)–(4) записывается в системе безразмерных переменных, движущейся вместе с нагрузкой. В этой системе решение не зависит от времени.

### Метод решения

Задача (1)–(4) в безразмерных переменных решается методом преобразования Фурье вдоль канала

$$w^F(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{-i\xi x} dx.$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (1), и решая полученное уравнение относительно  $w^F$ , получим

$$w^F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-P_1^F(\xi) N_n}{1 - h\alpha F r^2 \xi^2 - \frac{h F r^2 \xi^2}{G t_n}} \cos(\pi n y).$$

Функцию  $w(x, y)$  найдем с использованием обратного преобразования Фурье

$$w(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n y) \int_0^{\infty} a_n(\xi) \cos(x\xi) d\xi.$$

Для численного решения пользуемся свойством преобразования Фурье,  $w^F \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , и ограничиваем интегрируемую область конечным отрезком. Данный отрезок разбиваем на конечное число шагов  $N$  с шагом  $\Delta\xi$  и ограничиваем количество функций в  $w^F = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\xi) \psi_i(y)$  конечным числом  $N_{mod}$

$$w(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N_{mod}} \cos(\pi n y) \sum_{m=1}^N \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} a_n(\xi) \cos(x\xi) d\xi.$$

Коэффициенты  $a_n(\xi)$  в последних интегралах приближаются линейными функциями на каждом отрезке по  $\xi$ . В итоге приходим к аналитической формуле для вычисления  $w(x, y)$

$$w(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N_{mod}} \cos(\pi n y) \sum_{m=1}^N V_m, \quad 5)$$

где

$$V_m = \left[ \frac{a_n(\xi_{m+1})}{x} (\sin(x\xi_{m+1}) + \frac{\cos(x\xi_{m+1}) - \cos(x\xi_m)}{\Delta\xi x}) - \frac{a_n(\xi_m)}{x} (\sin(x\xi_m) + \frac{\cos(x\xi_{m+1}) - \cos(x\xi_m)}{\Delta\xi x}) \right].$$

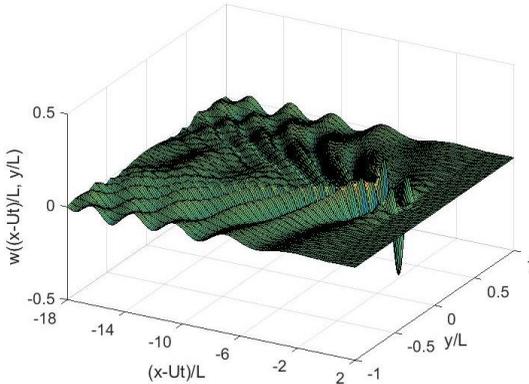


Рисунок 1 – Пример вычисления трехмерных прогибов битого льда

На рисунке 1 приведены тестовые вычисления трехмерных прогибов битого льда. Результаты приведены для следующих параметров задачи: глубина канала 2м, ширина 10м, толщина битого льда 0.1м, плотности льда и жидкости 917 и 1024 кг/м<sup>3</sup>, соответственно. Заметим, в результате отсутствия упругих напряжений, видимое образование аналога клина Кельвина для получаемых волн.

### **Заключение**

Рассмотрена задача движения внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль канала по битому льду. Задача решена в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой. Предложен алгоритм численного решения задачи. Для каждой скорости движения нагрузки существует счетное число волн, распространяющихся с этой же скоростью от нагрузки в канале. Решением будет комбинация этих волн с разной амплитудой.

*Работа посвящена памяти профессора кафедры дифференциальных уравнений Сергея Семеновича Кузикова.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.*

### **Библиографический список**

1. Шишмарев К.А., Завьялова К.Н. Свободные и вынужденные волки в канале, покрытом битым льдом // МАК: Математики – Алтайскому краю : сборник трудов всероссийской конференции по математике. – 2017. – С. 96–99.
2. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. – 2016. – Т. 59. – С. 313–326.

УДК 539.3: 534.2

**О распространении термоупругих волн  
в анизотропных средах. Структура матрицанта**

*Н.А. Испулов<sup>1</sup>, Ж.Д. Оспанова<sup>1</sup>, Т.Г. Кисиков<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Павлодарский государственный университет*

*им. С. Торайгырова, г. Павлодар, Казахстан,*

*<sup>2</sup>Университет Калифорнии, г. Дэвис, США*

**Введение**

Связанные уравнения движения и уравнения теплопроводности отличаются сложностью и обилием физико-механических параметров. В связи с этим интенсивно развивается раздел механики деформируемого твердого тела, – термоупругость. Термоупругость описывает широкий круг явлений, являясь обобщением классической теории упругости и теории теплопроводности. В настоящее время термоупругость является вполне законченной областью в случае изотропной среды: записаны основные зависимости и дифференциальные уравнения, предложено несколько методов решения уравнений термоупругости, доказаны основные энергетические и вариационные теоремы, решено несколько задач по распространению термоупругих волн. Интерес представляет распространение термоупругих волн в анизотропных средах.

В данной работе на основе метода матрицанта [1, 2, 3, 4] рассмотрено построение системы дифференциальных уравнений 1-го порядка и вытекающей из нее матрицы коэффициентов для термоупругих волн, распространяющихся в анизотропных средах ромбической сингонии. Построена структура матрицанта уравнений движения термоупругих волн в объемном случае. Данная среда обладает низкой симметрией и обладает 9-ю упругими и 3-мя термомеханическими параметрами.

**1. Метод исследования**

Метод исследования работы – аналитический, основанный на развитии матричных методов исследования динамики упругих слоистых сред [1].

Суть метода заключается в приведении исходных уравнений движения, на основе метода разделения переменных (представления решения в виде плоских волн), к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэф-

фициентами и построении структуры матрицанта (нормированная матрица фундаментальных решений).

Матричный метод позволяет при едином подходе рассматривать распространение волн в широком классе сред. Другое достоинство этого метода состоит в том, что выражения, полученные матричным методом, имеют весьма компактную форму, которая оказывается удобной как при аналитических исследованиях, так и при численных расчетах.

## 2. Определяющие соотношения

Задачи о распространении термоупругих волн в анизотропных средах основываются на совместном решении уравнений движения [5]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{U}_i \quad (1)$$

или в покомпонентной форме

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}, \quad (1)'$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}$$

уравнения теплопроводности Фурье

$$\lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = -q_i \quad (2)$$

уравнения притока тепла

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -i\omega \beta_{ij} \varepsilon_{ij} - i\omega \frac{c_\varepsilon}{T_0} \theta, \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжения;  $\rho$  – плотность среды;  $\lambda_{ij}$  – тензор теплопроводности;  $q_i$  – вектор притока тепла;  $\omega$  – круговая частота;  $\beta_{ij}$  – термомеханические параметры;  $\varepsilon_{ij}$  – тензор малых деформаций Коши;  $c_\varepsilon$  – теплоемкость при постоянной деформации;  $\theta = T - T_0$  – приращение температуры по сравнению с температурой естественного состояния  $T_0$ ,  $\left| \frac{\theta}{T_0} \right| \ll 1$  для малых деформаций.

Физико-механические величины связаны соотношением Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta. \quad (4)$$

Для ромбической сингонии (в качестве осей координат выбираются три ортогональные оси симметрии или инверсионные оси второго порядка) число упругих постоянных равно 9, а термомеханических параметров – 3. В матричном виде соотношение Дюгамеля - Неймана (4) для ромбической сингонии имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \theta \quad (4)'$$

где  $c_{ijkl}$  – упругие параметры анизотропной среды триклинной сингонии.

**3. Построение системы дифференциальных уравнений 1 порядка.** Уравнения (1)–(4) определяют взаимосвязь механических напряжений и температуры как функции независимых переменных – теплового поля и деформации.

На основе метода разделения переменных в случае гармонической зависимости от времени:

$$\begin{aligned} & \left[ U_i(x, y, z, t); \sigma_{ij}(x, y, z, t); \theta; q_z \right] = \\ & = \left[ U_i(z), \sigma_{ij}(z), \theta; q_z \right] e^{i(\omega t - mx - ny)} \end{aligned} \quad (5)$$

система уравнений (1)–(4) приводится к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\bar{W}}{dz} = B\bar{W}. \quad (6)$$

Здесь  $\bar{W}(x, y, z, t) = [u_z(z), \sigma_{zz}, u_x(z), \sigma_{xz}, u_y(z), \sigma_{yz}, \theta, q_z]^t \exp(i\omega t - imx - iny)$  – вектор-столбец. Символ  $t$  означает операцию транспонирования вектора-строки в вектор-столбец.

$B = B[c_{ijkl}(z), \beta_{ij}(z), \theta, \omega, m, n]$  – матрица коэффициентов, элементы которой содержат в себе параметры среды, в которой распространяются термоупругие волны,  $m, n$  – компоненты волнового вектора  $\vec{k}$

Матрица коэффициентов  $B$  в объемном случае для ромбической сингонии имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & b_{47} & 0 \\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & b_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & -i\omega b_{47} & 0 & -i\omega b_{67} & 0 & b_{87} & 0 \end{bmatrix} \vec{W} = \begin{pmatrix} u_z \\ \sigma_{zz} \\ u_x \\ \sigma_{xz} \\ u_y \\ \sigma_{yz} \\ \theta \\ q_z \end{pmatrix}$$

Из структуры матрицы коэффициентов следует, что в пространственном случае упругие волны различной поляризации и тепловые волны взаимосвязаны. Связь тепловой волны с упругими волнами характеризуется коэффициентом  $b_{17}$ , который равен

$$b_{17} = \frac{\beta_{33}}{c_{33}}.$$

Не нулевые элементы  $b_{47}$  и  $b_{67}$ :

$$b_{47} = \left( \frac{c_{13}}{c_{33}} \beta_{33} - \beta_{11} \right) im; \quad b_{67} = \left( \frac{c_{23}}{c_{33}} \beta_{33} - \beta_{22} \right) in$$

означают влияние на упругие волны поперечных поляризаций термоупругого эффекта. При этом  $b_{47}$  описывает влияние термоупругого эффекта на упругую поперечную волну X-поляризации, а  $b_{67}$  влияние термоупругого эффекта на поперечную волну Y-поляризации.

#### 4. Структура матрицанта

Нормированное решение уравнения (6) называется матрицантом. Любое другое решение, имеющее смысл матрицы фундаментальных решений имеет вид

$$X = T(z_0, z)C,$$

где  $T(z_0, z)$  – матрицант;  $C$  – ненулевая матрица ( $\det C \neq 0$ ).

Построение структуры матрицанта основано на его представлении в форме экспоненциального матричного ряда [6]:

$$T = E + \int_0^{\bar{z}} B dz_1 + \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}_1} B(z_1)B(z_2)dz_1 dz_2 + \dots \quad (7)$$

И аналогичном представлении обратного матрицанта  $T^{-1}$

$$T^{-1} = E - \int_0^{\bar{z}} B dz_1 + \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}_1} B(z_2)B(z_1)dz_1 dz_2 - \dots \quad (8)$$

Матричные ряды (7), (8) представимы в виде сумм матриц

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_{(n)}, T^{-1} = \sum T_{(n)}^{-1}. \quad (9)$$

Бесконечный матричный ряд (8) также абсолютно и равномерно сходится на любом интервале. Ряд (8) отличается от (7) обратным порядком перемножения  $B(z_i)$ .

Структура матрицанта в случае распространения термоупругих волн в анизотропных средах ромбической сингонии в объемном случае определена в виде:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & t_{32} & -t_{62} & t_{52} & t_{82} & -t_{72} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31} & t_{61} & -t_{51} & -t_{81} & t_{71} \\ -t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34} & t_{64} & -t_{54} & -t_{84} & t_{74} \\ t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33} & -t_{63} & t_{53} & t_{83} & -t_{73} \\ -t_{26} & t_{16} & t_{46} & -t_{36} & t_{66} & -t_{56} & -t_{86} & t_{76} \\ t_{25} & -t_{15} & -t_{45} & t_{35} & -t_{65} & t_{55} & t_{85} & -t_{75} \\ t_{28} & -t_{18} & -t_{48} & t_{38} & -t_{68} & t_{58} & t_{88} & -t_{78} \\ -t_{27} & t_{17} & t_{47} & -t_{37} & t_{67} & -t_{57} & -t_{87} & t_{77} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Структура матрицанта есть зависимость между элементами прямого и обратного матрицанта в форме (7)–(8) и все следствия, вытекающие из него, а также зависимость между элементами  $T$  и  $T^{-1}$ , следующие из тождества [6]:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E, \quad (11)$$

где  $E$ -единичная матрица

### Заключение

В работе построена система дифференциальных уравнений 1-го порядка, описывающая распространение термоупругих волн в анизотропных средах ромбической сингонии, а знание структуры матрицы коэффициентов в этой системе позволяет определить связь между волнами различной поляризации, в данном случае определить связь упругих и тепловых волн, т.е. наличие термоупругого эффекта. Построена

структура матрицанта уравнений движения термоупругих волн в объемном случае.

### Библиографический список

1. Тлеукунов С.К. Метод матрицанта. Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004, 148 с.
2. Ispulov N. A., Qadir A., and Shah M.A. Reflection of thermoelastic wave on the interface of isotropic half-space and tetragonal syngony anisotropic medium of classes 4, 4/m with thermomechanical effect // Chinese Physics B, vol. 25, no. 3, Article ID 038102, 2016.
3. Ispulov N. A., Qadir A., Zhukenov M. K., Dossanov T. S., and Kissikov T. G. The analytical form of the dispersion equation of elastic waves in periodically inhomogeneous medium of different classes of crystals // Advances in Mathematical Physics, vol. 2017, Article ID 5236898, 2017.
4. Nurlybek A. Ispulov, Abdul Qadir, Marat Zhukenov, and Erkin Arinov. The Propagation of Thermoelastic Waves in Anisotropic Media of Orthorhombic, Hexagonal, and Tetragonal Syngonies // Advances in Mathematical Physics, Volume 2017, Article ID 4898467, 2017.
5. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1986, 556 с.
6. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. – М.: Наука, 1988, 552 с.

## УДК 517.9

### Задача Коши–Дирихле для квазилинейного ультра-параболического уравнения колмогоровского типа

*И.В. Кузнецов<sup>1</sup>, С.А. Саженок<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*ИГиЛ СО РАН, НГУ, Новосибирск;*

<sup>2</sup>*Хэйлунцзянский ун-т, Харбин*

**Аннотация.** Рассматривается начально-краевая задача для неклассического квазилинейного уравнения конвекции-диффузии колмогоровского типа. Уравнение содержит две время-подобные переменные  $t$  и  $s$ . Его особенностью является то, что направление течения времени по переменной  $s$  может меняться. В связи с этим возникает возможность, что заданные начальные и финальные условия по  $s$  могут не приниматься решением. В настоящей статье формулируется достаточно общий класс слабых энтропийных решений, хорошо согласованный с физической мотивировкой задачи. Доказывается, что для этого класса поставленная задача является корректной. В целом, исследование является продолжением работ авторов [1, 2].

**1. Формулировка задачи.** Пусть  $\Omega$  – ограниченная область пространственных переменных  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$  ( $\partial\Omega \in C^2$ ). Пусть  $t \in [0, T]$  и  $s \in [0, S]$  – две переменные, подобные переменной времени. Здесь  $T$  и  $S$  – заданные положительные постоянные. Обозначим  $G_{T,S} := \Omega \times (0, T) \times (0, S)$ ,  $\Xi^1 := \Omega \times (0, S)$ ,  $\Xi^2 := \Omega \times (0, T)$ ,  $\Gamma_0^1 := \bar{\Omega} \times \{t = 0\} \times [0, S]$ ,  $\Gamma_0^2 := \bar{\Omega} \times [0, T] \times \{s = 0\}$ ,  $\Gamma_S^2 := \bar{\Omega} \times [0, T] \times \{s = S\}$ ,  $\Gamma_t := \partial\Omega \times [0, T] \times [0, S]$ .

Рассматривается следующая задача Коши–Дирихле.

**Задача А.** Для произвольно заданных начальных и финальных данных  $u_0^1 \in C_0^{0,\alpha}(\Xi^1)$ ,  $u_0^2, u_S^2 \in C_0^{0,\alpha}(\Xi^2)$  ( $\alpha \in (0,1)$ ) требуется найти функцию  $u: G_{T,S} \mapsto \mathbb{R}$ , удовлетворяющую квазилинейному ультра-параболическому уравнению:

$$\partial_t a(u) + \partial_s b(u) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\varphi}(u) = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\mathbb{A}(u) \nabla_{\mathbf{x}} u), \quad (\mathbf{x}, t, s) \in G_{T,S}, \quad (1a)$$

начальным данным по  $t$ :

$$u|_{t=0} = u_0^1(\mathbf{x}, s), \quad (\mathbf{x}, s) \in \Xi^1, \quad (1b)$$

начальным и финальным данным по  $s$ :

$$u|_{s=0} \approx u_0^2(\mathbf{x}, t), \quad u|_{s=S} \approx u_S^2(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Xi^2, \quad (1c)$$

и однородному краевому условию

$$u|_{\Gamma_t} = 0. \quad (1d)$$

Через  $C_0^{0,\alpha}(\bar{D})$  стандартно обозначается пространство непрерывных по Гельдеру с показателем  $\alpha \in (0,1)$  финитных функций на некотором замкнутом множестве  $\bar{D} \subset \mathbb{R}^N$ , снабженное нормой

$$\|\Phi\|_{C_0^{0,\alpha}(\bar{D})} = \max_{\zeta \in \bar{D}} |\Phi(\zeta)| + \sup_{\zeta, \eta \in \bar{D}, \zeta \neq \eta} \frac{|\Phi(\zeta) - \Phi(\eta)|}{|\zeta - \eta|^\alpha}.$$

В (1c) знак соотношения  $\approx$  означает, что значения  $u_0^2$  и  $u_S^2$  могут не приниматься на некоторых частях множеств  $\Gamma_0^2$  и  $\Gamma_S^2$ , соответственно. То обстоятельство, становится ли  $\approx$  знаком равенства, или нет, определяется *апостериори*, то есть после того, как решение задачи А каким-либо способом сконструировано.

Нелинейные функции  $a = a(u)$  и  $b = b(u)$ , вектор-функция  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_d(u))$  и  $d \times d$ -матрица-функция  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(u)$  заданы и удовлетворяют следующим условиям.

**Условия на  $a$  &  $b$  &  $\boldsymbol{\varphi}$  &  $\mathbb{A}$ .** Пусть  $a, b \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $\varphi_j \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $j = 1, \dots, d$ ,  $\mathbb{A} = (A_{ij})$ ,  $A_{ij} \in C^2(\mathbb{R})$ . Функция  $a = a(u)$  является строго монотонно возрастающей. Функция  $b = b(u)$  монотонной возможно не является. Для  $a$  и  $b$  выполняется условие истинной нелинейности

$$\operatorname{mes} \{\lambda \in \mathbb{R}: a'(\lambda)\theta + b'(\lambda)\vartheta = 0\} = 0 \quad \forall (\theta, \vartheta) \in \mathbb{S}^1.$$

(Через  $\mathbb{S}^1$  обозначается единичная окружность в  $\mathbb{R}^2$  с центром в начале координат. Через  $\operatorname{mes} \mathfrak{K}$  — мера Лебега множества  $\mathfrak{K}$ .) Матрица  $\mathbb{A}(u)$  является равномерно (по  $u$ ) положительно определенной.

**Замечание.** Заметим, что если потребовать выполнение условий  $u|_{s=0} = u_0^2(\mathbf{x}, t)$ ,  $u|_{s=S} = u_S^2(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \Xi^2$ , (2) вместо (1с), то задача А станет некорректно поставленной. Действительно, так как функция  $b = b(u)$  является нелинейной и, вообще говоря, немонотонной, то возможно, что никакое из решений уравнения (1а) не принимает значений  $u_0^2$  (и  $u_S^2$ ) на всем множестве  $\Gamma_0^2$  (и  $\Gamma_S^2$ , соответственно), хотя, может быть, принимает значения на некоторой его части. Поэтому допускаем, что возможное решение задачи А отличается от  $u_0^2$  и  $u_S^2$  на  $\Gamma_0^2$  и  $\Gamma_S^2$  и, в связи с этим, накладываем на него более слабое требование (1с), следуя идее из [3].

**2. Параболическая регуляризация и основной результат о корректности задачи А.** Для того, чтобы преодолеть указанные в замечании трудности, вводится понятие слабого энтропийного решения (с.э.р.) задачи А (см. ниже в п. 3). Основным результатом работы состоит в следующем.

**Теорема А.** (Существование, единственность и устойчивость с.э.р.) Пусть выполняются условия на  $a, b, \varphi$  и  $\mathbb{A}$ . Тогда при любых заданных  $u_0^1 \in C_0^{0,\alpha}(\Xi^1)$ ,  $u_0^2, u_S^2 \in C_0^{0,\alpha}(\Xi^2)$  задача А имеет единственное с.э.р. Более того, если  $u$  и  $v$  — это два с.э.р., соответствующих двум наборам начальных и финальных данных  $(u_0^1, u_0^2, u_S^2)$  и  $(v_0^1, v_0^2, v_S^2)$ , то при п.в.  $t \in (0, T]$  справедлива оценка

$$\|u(\cdot, t, \cdot) - v(\cdot, t, \cdot)\|_{L^1(\Xi^1)} \leq \|u_0^1 - v_0^1\|_{L^1(\Xi^1)} + \frac{\max_{\lambda \in [-M, M]} |b'(\lambda)|}{\min_{\lambda \in [-M, M]} |a'(\lambda)|} (\|u_0^2 - v_0^2\|_{L^1(\Omega \times (0, t))} + \|u_S^2 - v_S^2\|_{L^1(\Omega \times (0, t))}) \quad (3)$$

Здесь,  $M = \max \{ \|u_0^1, v_0^1\|_{L^\infty(\Xi^1)}, \|u_0^2, v_0^2, u_S^2, v_S^2\|_{L^\infty(\Xi^2)} \}$ .

Наличие оценки (3) означает устойчивость с.э.р. по отношению к краевым условиям задачи. Понятие с.э.р. и обоснование теоремы А основаны на систематическом изучении аппроксимирующей параболической задачи, состоящей из строго параболического уравнения  $\partial_t a(u_\varepsilon) + \partial_s b(u_\varepsilon) + \operatorname{div}_x \varphi(u_\varepsilon) = \operatorname{div}_x (\mathbb{A}(u_\varepsilon) \nabla_x u_\varepsilon) + \varepsilon \partial_s^2 u_\varepsilon$ , (4)  $(\mathbf{x}, t, s) \in G_{T,S}$ ,  $\varepsilon > 0$ , снабженного краевыми условиями (1b,d) и (2). Задача (4), (1b,d), (2) имеет единственное классическое решение в силу известных положений теории параболических уравнений [4]. Устанавливается, что предел семейства решений задачи (4), (1b,d), (2) существует и служит с.э.р. задачи А, и что справедлива оценка (3) для любой пары с.э.р.

### 3. Слабое энтропийное решение задачи А

Функция  $u \in L^\infty(G_{T,S}) \cap L^2((0, T) \times (0, S); H_0^1(\Omega))$  называется с.э.р. задачи А, если она удовлетворяет энтропийному неравенству

$$\partial_t q_a(u) + \partial_s q_b(u) + \operatorname{div}_x (\mathbf{q}_\varphi - \mathbb{A}(u) \nabla_x \eta(u)) \leq -\eta''(u) |\mathbb{A}^{1/2}(u) \nabla_x u|^2$$

в слабом обобщенном смысле, принципу максимума

$$\|u\|_{L^\infty(G_{T,S})} \leq \max \{ \|u_0^1\|_{L^\infty(\mathbb{E}^1)}, \|u_0^2\|_{L^\infty(\mathbb{E}^2)}, \|u_0^3\|_{L^\infty(\mathbb{E}^3)} \},$$

начальному условию (1b) в смысле сильного следа и *энтропийным граничным условиям*

$$q_b(u_0^{\text{tr},2}) - q_b(u_0^2) - \eta'(u_0^2) (b(u_0^{\text{tr},2}) - b(u_0^2)) \leq 0 \text{ в } \Gamma_0^2,$$

$$q_b(u_S^{\text{tr},2}) - q_b(u_S^2) - \eta'(u_S^2) (b(u_S^{\text{tr},2}) - b(u_S^2)) \geq 0 \text{ в } \Gamma_S^2.$$

Через  $(\eta, q_a, q_b, \mathbf{q}_\varphi)$  обозначается *выпуклая энтропийная четверка*:  $\eta \in C^2(\mathbb{R})$  — произвольная выпуклая функция,  $q'_a = a'\eta'$ ,  $q'_b = b'\eta'$ ,  $\mathbf{q}'_\varphi = \varphi'\eta'$ . Через  $u_0^{\text{tr},2}$  и  $u_S^{\text{tr},2}$  обозначаются следы решения энтропийного неравенства на поверхностях  $\Gamma_0^2$  и  $\Gamma_S^2$ , соответственно.

Заметим, что из энтропийного неравенства непосредственно следует уравнение (1a).

**Финансовая поддержка.** Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (код проекта III.22.4.2) и РФФИ (грант № 18-01-00649).

### Библиографический список

1. Kuznetsov I.V. Genuinely nonlinear forward-backward ultra-parabolic equations // Sib. Elect. Math. Rep. – 2017. – Vol. 14. – P. 710–731.
2. Kuznetsov I.V. and Sazhenkov S.A. Quasi-solutions of genuinely nonlinear forward-backward ultra-parabolic equations // J. Phys.: Conf. Ser. – 2017. – No. 894 012046. – P. 1–7.
3. Otto F. Initial-boundary value problem for a scalar conservation law // C. R. Acad. Sci. Paris Ser I Math. – 1996. – Vol. 322. – P. 729–734.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

### УДК 539.3

#### Деформирование упругой пластины конечной толщины под действием подвижной нагрузки

*О.В. Марченко, А.М. Сергеева*

*Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре*

Разрабатывается математическая модель для исследования напряженно-деформированного состояния деформируемой внешним воз-

действием упругой изотропной пластины конечной толщины, находящейся под воздействием системы нагрузок.

Применяя теорию малых упругих деформаций и эйлерову систему координат, записывается система дифференциальных уравнений.

Уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i^t = I_i^t \quad (1)$$

$i, j, k = 1, 2, 3; t = 1, 2, \dots, n$  – номер нагрузки;

$$I_i^t = \rho_t (\dot{v}_i + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}) \text{ – в случае подвижной нагрузки;}$$

$$I_i^t = \rho_t (v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}) \text{ – в случае стационарного движения нагрузки;}$$

$$I_i^t = 0 \text{ – в случае неподвижной нагрузки.}$$

Закон Гука

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G \varepsilon_{ij}; \text{ где } \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}.$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Уравнение теплопроводности (только для пластины)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = 0; i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) используется суммирование по повторяющимся индексам.  $\theta$  – температура льда,  $\rho = \rho(\theta)$  – плотность льда,  $G = G(\theta)$  – модуль сдвига льда,  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,  $\varepsilon_{ij}$  – тензор деформаций,  $v_i$ ,  $F_i$  – проекции скорости перемещений и удельной объемной силы по координатным осям  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial \tau}$ ,  $\tau$  – время деформации.

Применение модели рассматривается на примере решения задачи о деформировании упругой изотропной пластины, материал которой –

пресный лед. Ледяная пластина претерпевает деформирующее воздействие со стороны ледокольного судна в виде приставки [1], схематично представленной на рисунке 1.

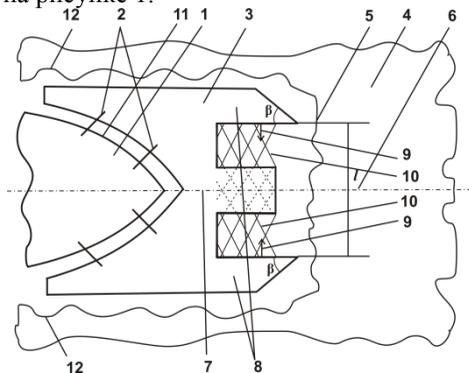


Рисунок 1 – Схема устройства для разрушения ледяного покрова

В носовой оконечности судна 1 при помощи креплений 2 устанавливают ледокольную приставку 3, перед которой в ледяном покрове 4 создают его свободную кромку 5. Приставку 3 выполняют в виде плавающей емкости, в диаметральной плоскости 6 которой устанавливают форштевень 7, наклонный под углом к горизонтально поверхности, а по бортам – боковые ножи 8 с углом в плане  $\beta$  и наклоненные к горизонту под таким же, но отрицательным по отношению к форштевню углом. Благодаря такой геометрической форме форштевня и боковым ножам при их контакте со свободной кромкой 5 в ледяном покрове между ножами 8 будут возникать сжимающие усилия 9. При достаточном расстоянии  $l$  и усилии 9 это приведет к потере устойчивости формы участка льда 10 и его разрушению. Отломанный участок льда 10 от сплошного льда 4 притопится наклонным днищем приставки 3, и его обломки бортами 11 судна 1 раздвинутся под кромки образовавшегося канала 12.

В работе решается пространственная задача о внедрении в лед двух клиньев и вертикальной нагрузки, которые вызывают деформацию льда. Деформируемые среды (клин и лед) считаются упругими и изотропными. При постановке и решении задачи массовые силы не учитывались. Решение уравнения теплопроводности приведено в работах [2, 3]. Для проведения исследований применялся численный метод [4], в соответствии с которым область разбивалась на объемные ортогональные ячейки конечных размеров, для которых записывалась система уравнений в разностном виде. Расчет деформации ледяной пластины приведен в работе [5].

Результаты численных исследований показали, что ледокольное устройство может быть использовано для разрушения ледяного покрова толщиной 0,5 м, причем оптимальная скорость устройства равна 8 км/ч. Предложенная модель и результаты исследования могут быть использованы для разработок инновационных способов разрушения льда и прокладывания судоходных каналов в зимние периоды на реках северных регионов.

### **Библиографический список**

1. Патент РФ №2229415. Устройство для разрушения ледяного покрова / Горкунов Э.С., Колмогоров В.Л., Козин В.М., Одинокоев В.И. Бюл. №15. Оpubл. 27.05.2004.

2. Сергеева А.М., Одинокоев В.И., Марченко О.В. Математическое моделирование процессов деформирования пластины конечной толщины, находящейся под действием системы нагрузок // Приоритеты и научное обеспечение технологического прогресса : сборник статей Международной научно-практической конференции. Уфа : Аэтерна, 2016. – С. 100–102.

3. Сергеева А.М., Марченко О.В. Применение математической модели деформирования пластины конечной толщины для исследования напряженно-деформированного состояния ледяного покрова // Инновационные исследования: Проблемы и направления развития : сборник статей Международной научно-практической конференции: в 2 ч. Ч. 1. Уфа : МЦИИ ОМЕГА САЙНС, 2016. – С. 8–11.

4. Одинокоев В.И. Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом. Владивосток: Дальнаука, 1995. – 168 с.

5. Марченко О.В., Сергеева А.М. Об особенностях деформирования тяжелой упругой пластины конечной толщины под действием подвижной нагрузки применительно к изучению прочности ледяного покрова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния, 2016. № 4 (30). – С. 61–72.

УДК 532.135

**Нелинейная теория вязкоупругости расплавов  
разветвленных полимеров как следствие мезоскопического  
подхода к описанию их динамики**

*Д.А. Мерзликina<sup>1</sup>, Г.В. Пышинограй<sup>1</sup>, Н.А. Черпакова<sup>2</sup>*  
*<sup>1</sup>АлтГУ, <sup>2</sup>АлтГТУ, г. Барнаул*

В современных условиях все более важным становится проблема сокращения расходов при производстве и переработке полимеров. Решение этой задачи возможно в рамках оптимизации технологических процессов производства и переработки полимеров, что в свою очередь невозможно без построения математической модели поведения полимеров в различных условиях. Такая задача существенно усложняется при рассмотрении течений растворов и расплавов полимеров, поскольку имеют место нелинейные эффекты, которые необходимо учитывать [1–3].

Экспериментальные исследования различных полимерных жидкостей обнаруживают их нелинейное вязкоупругое поведение. Для описания такого поведения было предложено большое количество моделей, которые описывают реологическое поведение полимерных жидкостей, как на качественном, так и на количественном уровнях. Многомодовый характер динамики текучих полимерных сред или множественность релаксационных процессов проявляется уже в случае исследования течений разбавленных растворов гибкоцепных монодисперсных полимеров. Увеличение концентрации полимера в системе приводит к возникновению зацеплений макромолекул, их динамика становится более сложной, между частями макромолекулы возникают «длинномасштабные» взаимодействия. Это приводит к дополнительным слагаемым в тензоре напряжений полимерной системы или к учету новых релаксационных процессов со «сверхмедленными» временами релаксации.

Несмотря на это, в основу описания динамики концентрированных полимерных систем должна быть положена достаточно надежная реологическая модель, полученная с использованием мезоскопического подхода. В качестве такой модели в работе используется модифицированная реологическая модель Виноградова – Покровского. Особенностью этой модели является учет тензорного характера коэффициента трения бусинок, который связан с наведенной анизотропией сдвигового потока. Такая анизотропия определяется размерами и формой мак-

ромолекулярного клубка и это приводит к появлению в уравнениях динамики соответствующих коэффициентов.

Обобщение этой модели на многомодовый случай имеет вид:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 3\sum_{\alpha=1}^n \frac{\eta_{\alpha}}{\tau_{\alpha}} a_{ik}^{\alpha}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} a_{ik}^{\alpha} - v_{ij} a_{jk}^{\alpha} - v_{kj} a_{ji}^{\alpha} + \frac{1 + (\kappa_{\alpha} - \beta_{\alpha}) a_{ij}^{\alpha}}{\tau_{\alpha}} a_{ik}^{\alpha} = \frac{2}{3} \gamma_{ik} - \frac{3\beta_{\alpha}}{\tau_{\alpha}} a_{ij}^{\alpha} a_{jk}^{\alpha},$$

Здесь  $p$  – гидростатическое давление;  $\sigma_{ik}$  – тензор напряжений полимерной системы;  $v_{ik}$  – тензор градиентов скорости;  $\gamma_{ik}$  – симметризованный тензор градиентов скорости;  $\alpha$  – порядковый номер моды;  $n$  – количество учитываемых релаксационных мод или процессов;  $a_{ik}^{\alpha}$  – безразмерный тензор дополнительных напряжений, соответствующих вкладу с номером  $\alpha$ ;  $\eta_{\alpha}$  – коэффициент сдвиговой вязкости моды с номером  $\alpha$ ;  $\tau_{\alpha}$  – время релаксации моды с номером  $\alpha$ ;  $\kappa_{\alpha} = \kappa_{\alpha}(a_{ij}^{\alpha})$  и  $\beta_{\alpha} = \beta_{\alpha}(a_{ij}^{\alpha})$  – параметры наведенной анизотропии, определяемые выражениями

$$\beta_{\alpha}(a_{ij}^{\alpha}) = \frac{f_{\alpha} + p_{\alpha} a_{ij}^{\alpha}}{1 + p_{\alpha} a_{ij}^{\alpha}}; \quad \kappa_{\alpha}(a_{ij}^{\alpha}) = 1, 2\beta_{\alpha}(a_{ij}^{\alpha}) \quad (2)$$

При работе с выражениями (2) вначале было сделано предположение, что значения параметров наведенной анизотропии не зависят или зависят незначительно от номера моды, однако, сравнение с экспериментами показало некорректность этого предположения, соответственно, необходимо вернуться к многомодовому приближению.

Так как влияние параметров наведенной анизотропии для каждой конкретной моды неодинаково, имеет смысл рассматривать каждую моду в отдельности, что отражено при записи выражений (2). Таким образом, система уравнений (1,2) определена с точностью до параметров:  $\eta_{\alpha}$ ,  $\tau_{\alpha}$ ,  $f_{\alpha}$ ,  $p_{\alpha}$ ,  $q_{\alpha}$ , которые подлежат определению из экспериментов. Число этих параметров достаточно велико, особенно при большом числе мод.

Вначале рассмотрим, как определить параметры  $\eta_{\alpha}$ ,  $\tau_{\alpha}$ . Это размерные параметры:  $\eta_{\alpha}$  имеет размерность вязкости,  $\tau_{\alpha}$  – размерность времени. Для того чтобы подобрать значения параметров анизотропии были изучены вклады каждой из мод и значения  $f_{\alpha}$  и  $p_{\alpha}$  определялись на каждом из участков зависимости стационарной вязкости при

одноосном растяжении. При этом было получено, что как  $f_\alpha$ , так и  $p_\alpha$  являются немонотонными функциями номера моды  $\alpha$ . Вначале эти параметры возрастали с ростом  $\alpha$ , а затем начинают убывать. При этом их максимумы приходятся на середину интервала изменения  $\alpha = 5$ . Поэтому в работе для этих параметров использовались выражения:

$$f_\alpha = \frac{B}{1 + (\alpha - \alpha_0)^2}; \quad p_\alpha = \frac{P}{1 + (\alpha - \alpha_0)^2}.$$

При построении графиков, отражающих указанные зависимости, видно, что зависимость стационарной вязкости при растяжении носит немонотонный характер с одной или несколькими точками перегиба. С ростом параметра  $B$  величина максимума на этой зависимости уменьшается. При  $P = 0$  немонотонный характер зависимости изменяется на монотонный. Таким образом, видно, что подбором параметров  $B$  и  $P$  можно достаточно точно описать зависимость стационарной вязкости от скорости растяжения.

Также были построены градиентные зависимости вязкостей при сдвиге и растяжении, из которых видно, что модель (1) с достаточной точностью описывает аномалию сдвиговой вязкости и немонотонную зависимость элонгационной вязкости. При этом видно, что для модели (1) выполняется правило Кокса-Мерца (Cox-Merz) [4]. Также были приведены нестационарные зависимости установления вязкости и коэффициента первой разности нормальных напряжений при простом сдвиге. Из расчетов видно, что при малых скоростях сдвига наблюдается монотонный выход измеряемых значений на стационарное значение, а при больших скоростях сдвига измеряемые зависимости проходят через максимум.

Таким образом, можно сделать вывод, что хотя предложенная многомодовая модель и получена, как развитие теоретических представлений о динамике линейных полимерных цепей, тем не менее, она позволяет достаточно точно описывать стационарные и нестационарные зависимости вискозиметрических функций расплавов разветвленных полимеров. При этом следует ожидать, что полученная здесь модель окажется пригодной и для концентрированных растворов и расплавов линейных полимеров. Также можно использовать эту модель и для моделирования более сложных течений текучих полимерных сред.

*Авторы выражают глубокую признательность Сибирскому суперкомпьютерному центру за возможность проведения расчетов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-31-00030 мол\_а).*

### Библиографический список

1. Franosch T., Grimm M., Belushkin M., Mor F. M., Foffi G., Forr L., Jenev S. Resonances arising from hydrodynamic memory in Brownian motion // Nature. – 2011. – № 478. – P. 85–88.
2. Макаров И. А. Численное моделирование встречных потоков вязкоупругой жидкости с использованием метода корреляции давления // Механика жидкости и газов. – 2011. – №6. – С. 31–42.
3. Директор Л.Б., Майков И.Л. Численное моделирование динамики капли вязкой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2009. – № 5. – С. 101–109.
4. Leonov A.I., Prokunin A.N. Nonlinear Phenomena in Flows of Viscoelastic Polymer Fluids // New York: Chapman and Hall, 1994. – P. 297.

УДК 532.59

### Численное моделирование динамики областей перемешанной жидкости ненулевой плавучести в линейно стратифицированной среде

*Н.П. Мошкин<sup>1,4</sup>, А.В. Фомина<sup>2</sup>, Г.Г. Черных<sup>3,4</sup>*

<sup>1</sup>ИГ им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск;

<sup>2</sup>Новокузнецкий институт (филиал) КемГУ, г. Новокузнецк;

<sup>3</sup>ИВТ СО РАН, г. Новосибирск; <sup>4</sup>НГУ, г. Новосибирск

Эволюция пятен ненулевой плавучести (термиков) играет важную роль при формировании тонкой структуры вод океана, образовании облаков и во многих других природных явлениях [1]. В работе построена численная модель плоского термика и представлены результаты расчетов, иллюстрирующие картину генерируемых термиком внутренних волн.

Для описания течения используются хорошо известные уравнения Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $u, w$  – компоненты вектора скорости в направлении осей  $x, z$  декартовой системы координат (ось  $x$  направлена горизонтально;  $z$  направлена вертикально вверх противоположно силе тяжести);  $\rho$  – плотность;  $\rho_1 = \rho - \rho_s$  – дефект плотности;  $\rho_s = \rho_s(z)$  – плотность невозмущенной среды;  $\rho_0 = \rho_s(0)$ ;  $p_1$  – отклонение давления от гидростатического;  $g$  – ускорение силы тяжести. Стратификация предполагается линейной и устойчивой  $d\rho_s/dz = -a\rho_0$ ,  $a = const > 0$ .

Граничные и начальные условия заданы следующим образом

$$\rho_1 = u = w = 0, \quad x^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad t \geq 0; \quad \rho = \rho_0, \quad (x, z) \in A,$$

$$\rho = \rho_s(z), \quad (x, z) \notin A, \quad t = 0; \quad u = w = 0, \quad -\infty < x, z < \infty, \quad t = 0.$$

Область  $A = \{(x, z): x^2 + (z + z_c)^2 \leq R^2\}$  – область полностью перемешанной жидкости. Система уравнений (1)–(3), начальные и граничные условия могут быть обезразмерены с использованием масштаба

длины  $R$  и периода Вайсяля-Брента  $T = 1/\sqrt{ag}$ ,  $a = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_s}{dz} \Big|_{z=0}$  как

масштаба времени. Кроме того может быть использовано представление  $\rho = \rho_0 a R \bar{\rho}$  (здесь  $\bar{\rho}$  обозначает обезразмеренную плотность). В результате в обезразмеренных уравнениях вместо кинематической вязкости  $\nu$  появится  $1/Re = \nu T/R^2$ , а вместо  $g$  появится 1. В дальнейшем, по возможности, у обезразмеренных величин будут оставлены те же обозначения, что и у размерных. Для прослеживания динамики области перемешанной жидкости привлекалось уравнение переноса концентрации  $C(x, z, t)$  недиффундирующей пассивной примеси, которое решались совместно с системой (1)–(3)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) дополнено начальными и граничными условиями:

$$C(x, z, 0) = const, \quad (x, z) \in A, \quad C(x, z, 0) = 0, \quad (x, z) \notin A, \quad t = 0;$$

$$C(x, z, t) = 0, \quad x^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad t > 0.$$

Граница перемешанной области определяется по положению разрыва в пассивном скаляре.

При численном интегрировании задачи граничные условия из бесконечности сносились на границы достаточно большого прямоугольника. Из соображений симметрии решение отыскивалось в правой половине  $x \geq 0$ .

Для численного решения используются конечно-разностные схемы на однородной прямоугольной сетке с размером ячеек  $h_x$ ,  $h_z$  в горизонтальном и вертикальном направлениях, соответственно. Для расщепления уравнений Навье-Стокса (1)–(3) на несколько последовательных дробных шагов по времени применяется явный проекционный метод. Конвективные члены в уравнениях (1)–(4) аппроксимируются с использованием нелинейной монотонной схемы высокого порядка с коррекцией потоков. На удаленных границах ставились безотражательные краевые условия. Результаты численного сравнения различных монотонных схем повышенного порядка на примере течения, возникающего в результате коллапса области перемешанной жидкости с нулевой плавучестью представлены в [2].

Результаты расчётов, представленные ниже, получены на сетке с числом узлов  $400 \times 800$ ;  $h_x = h_z = 0.05$ ,  $Re = 10^3$ .

Форма пятна, определяемая по концентрации пассивной примеси, представлена на рисунке 1 для момента времени  $t = 8.0$  и трех значений начального заглубления  $z_c = -1.0; -0.5; 0.0$ . Можно отметить, что горизонтальный размер всплывающего пятна несколько превышает горизонтальный размер пятна, коллапсирующего из равновесного положения.

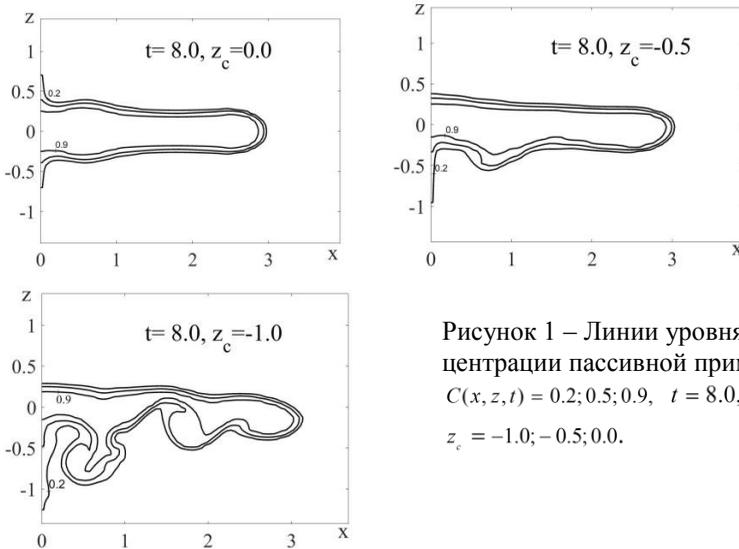


Рисунок 1 – Линии уровня концентрации пассивной примеси  $C(x, z, t) = 0.2; 0.5; 0.9$ ,  $t = 8.0$ , для  $z_c = -1.0; -0.5; 0.0$ .

Характеризующие внутренние волны линии  $\rho_1(x, z^*, t)$  для  $z^* = 3.0; -3.0$  представлены на рисунке 2. Термик генерирует внутренние волны существенно большей амплитуды в сравнении с волнами, индуцируемыми коллапсом пятна, находящегося в начальный момент на уровне равновесной плотности. Следует отметить, что величины амплитуд  $\rho_1(x, -3.0, 10)$ , почти в четыре раза превосходят амплитуды  $\rho_1(x, 3.0, 10)$ . Для оценки точности разностной схемы и её эффективности расчёты были проведены на последовательности сеток.

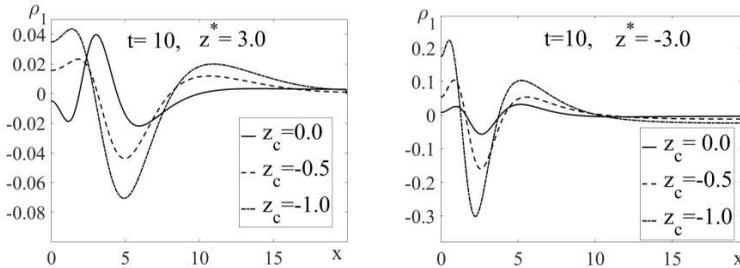


Рисунок 2 – Линии  $\rho_1(x, z^*, 10)$ ,  $z^* = 3.0; -3.0$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 17-01-00332.*

### Библиографический список

1. Антропов И.В., Кронрод В.А., О зависимости процесса эволюции термика в стратифицированной среде от начальных условий // Изв. АН СССР, ФАО, 1989. – Т.25. – №12. – С. 1261–1266.
2. Moshkin, N.P., Narong K., Chernykh, G.G., A comparative study of the performance of high-resolution non-oscillating advection schemes in the context of the motion induced by mixed region in a stratified fluid // Journal of Engineering Thermophysics. 2011. – vol. 20. – Iss. 4. – P. 468–486.

**УДК 517.95**

## Математические модели многофазной фильтрации

*А.А. Панин*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Методы динамики многофазных сред широко применяются для математического моделирования различных технологических и природ-

ных процессов. В большей степени разработаны математические модели фильтрации углеводородов в пористой среде. В классических моделях пористость считается постоянной (или заданной функцией точки), фазовые переходы не учитываются. В последнее время, в связи с добычей нефти и газа в осадочных породах, проблемой захоронения больших объемов углекислого газа в горной породе, возникла необходимость разработки моделей, учитывающих деформацию пористого скелета. Такие модели ведут свое начало от классических работ Био и Терцаги и представлены в работах [1, 2]. Вопросам обоснования моделей фильтрации жидкостей в деформируемых пористых средах посвящены работы [3–6].

Другой большой класс задач фильтрации в деформируемой пористой среде с фазовыми переходами составляют задачи тепломассопереноса в тающем снежно-ледовом покрове [7]. Преобладающая часть стока северных рек формируется за счет таяния сезонного снежного покрова. Условия снеготаяния оказывают решающее влияние не только на количество поступающих в водоемы-приемники талых вод, но и на их качество. Кроме того, величина снежного покрова (снегозапас) влияет на промерзание поверхностного слоя почв и, следовательно, его впитывающую способность и определяет соотношение между склоновым и грунтовым стоками. Поэтому моделирование состояния снежного покрова и солепереноса в период снеготаяния имеет важное значение при разработке методов расчетов и прогнозов гидрографов весеннего половодья и качества воды в водоемах-приемниках.

Имеется большое число работ по солемассопереносу в тающем снеге, в которых используются данные наблюдений и эмпирические зависимости [8]. В большинстве своем эмпирические модели являются одномерными и не позволяют вычислить скорость фильтрации жидкости, а модели, вычисляющие скорость фильтрации жидкости, обычно не учитывают фазовые переходы или пригодны только для специфичных режимов движения воды в снежном покрове, они также не дают нужной информации о поле скоростей и насыщенности водной фазы, необходимой для оценки стока загрязняющих веществ.

Таким образом, для достоверного прогноза стока загрязняющих веществ нужно знать поле скоростей и насыщенность водной фазы, т.е. предлагается использовать комплексные модели, описывающие совместное движение загрязняющих веществ и воды в снежном покрове с учетом различных краевых условий, фазовых переходов и процесса сублимации. Эти модели позволят рассчитать нестационарное движение загрязняющих веществ внутри снежного покрова и оценить поверхностный и подземный стоки веществ. Они должны учитывать ряд

важных факторов, в том числе – переменную пористость снежного покрова, фазовые переходы, специфику граничных условий (в частности, наличие промерзшего или не промерзшего грунта). Основы теории движения воды и воздуха в тающем снеге заложены в работах S.C. Colbeck [9] и его последователей. Однако, снег в данных работах хотя и рассматривался как многофазная среда, деформация льда и фазовые переходы не учитывались.

В [7] построена модель совместного движения воды и воздуха в тающем снежно-ледовом покрове с учетом деформации льда. Определены скорости фильтрации каждой фазы, распределение насыщенности и глубина протаивания. Проведены численные расчеты автомобильной задачи, показано, что решение обладает конечной скоростью распространения возмущений. Кроме того, построена модель тающего льда как пороупругой двухфазной среды (лед, вода). Исследовано движение в тонком слое. Для описания процессов фильтрации в тонком пороупругом слое льда использовались законы сохранения масс для жидкости и твердой фазы, закон Дарси для жидкости, учитывающий движение скелета, реологический закон типа Максвелла и уравнение сохранения импульса системы в целом. Рассмотрены различные режимы фильтрации в зависимости от поведения возникающего в задаче малого параметра [10]. Разработан алгоритм численного решения движения воды и воздуха в тающем снеге, проведены расчеты. Проведено численное и аналитическое решение двумерной задачи о снеготаянии. В качестве математической модели использовались уравнения сохранения массы для каждой фазы, уравнения двухфазной фильтрации Маскета-Левретта для воды и воздуха, уравнение сохранения энергии для тающего снега и уравнение движения льда. Задача сводится к системе из трех уравнений относительно температуры, «приведенного» давления и насыщенности водной фазы. Для полученной системы уравнений рассмотрена начально-краевая задача и построена конечно-разностная схема на основе метода переменных направлений. Задача была решена численно при следующих краевых условиях: на поверхности снежного покрова задавались насыщенность воды, температура воздуха (выше температуры плавления льда), атмосферное давление воздуха, скорость воды и воздуха, на границе контакта с промерзшим грунтом вода отсутствует, заданы температура воздуха (ниже температуры плавления льда) и давление. Проведены расчеты тестовой задачи, определены насыщенность и температура при заданных начальных приближениях и проведен графический анализ результатов. Для насыщенности воды установлено свойство конечной скорости распространения возмущений [7, 11, 12].

*Работа посвящена памяти профессора кафедры дифференциальных уравнений Сергея Семеновича Кузикова.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ «Гидроупругие и термодинамические эффекты при взаимодействии пороупругого снежно-ледового покрова с конструкциями» □ №16-08-00291.*

### **Библиографический список**

1. Fowler A. *Mathematical Geoscience* // Springer-Verlag London Limited. – 2011. – 904 p.
2. Connolly J.A.D. and Podladchikov Y.Y. *Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock* // *Geodin. Acta.* – 1998. – V. 11. – P. 55–84.
3. Simpson M., Spiegelman M. and Weinstein M.I. *Degenerate dispersive equations arising in the study of magma dynamics* // *Nonlinearity.* – 2007. – V. 20. – P. 21–49.
4. Бочаров О.Б., Рудяк В.Я., Серяков А.В. *Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами* // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых.* – 2014. – № 2. – С. 54–68.
5. Papin A.A., Tokareva M.A. *On Local Solvability of the System of the Equations of One Dimensional Motion of Magma* // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics.* – 2017. – Vol. 10(3). – P. 385–395.
6. Papin A.A., Sibir A.N. *Model internal erosion of soil* // *J.Phys. : Conf.Ser.*, 2016. – V. 722(1). – P. 1–8.
7. Папин А.А., Сибин А.Н., Шишмарев К.А. *Математические модели тающего снежно-ледового покрова и протаивающих грунтов (учебное пособие).* Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2016. – 96 с.
8. Lehning, M. et al., *A physical SNOWPACK model for the Swiss avalanche warning Part II: //Snow microstructure, 2002.*
9. Colbeck S.C. *A theory of water percolation in snow* // *J.Glaciol.* 1972, N 11. (63), P. 369–385.
10. Токарева М.А. *Двумерная задача фильтрации в тонком пороупругом слое* // *Известия АлтГУ, Барнаул, 2013. Вып. 1/1 (77).* – С. 60–62.
11. Папин А.А. *Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге* // *Прикладная механика и техническая физика.* – 2008. – Т. 49, № 4 (290). – С. 13–24.
12. Кузиков С.С., Папин А.А. *Математическое моделирование гидродинамических процессов водохранилища.* – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2014. – 106 с.

УДК 532.135 + 532.137

**Начально-краевые задачи  
течения вязкоупругой среды Максвелла**

*А.Г. Петрова*  
*АлтГУ, г. Барнаул*

Система уравнений, описывающих движение несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла с производной Яуманна в качестве инвариантной производной имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S}, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \tau(\mathbf{S}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{S} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{W}) + \mathbf{S} &= 2\mu \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность среды,  $\mu$  – динамическая вязкость,  $\tau$  – время релаксации. Эти величины далее полагаются постоянными.  $\mathbf{v}$  – вектор скорости;  $p$  – отклонение давления от некоторого среднего значения  $p_0 > 0$ ;  $\mathbf{D}$  – тензор скоростей деформаций;  $\mathbf{S}$  – вязкоупругая составляющая тензора напряжений;  $\mathbf{W}$  – антисимметричная часть тензора  $\nabla \mathbf{v}$ .

Отметим, что система совместна с дополнительным соотношением

$$\operatorname{Tr} \mathbf{S} = 0$$

при условии, что это соотношение выполнено при  $t=0$  [2].

Выбор объективной производной Яуманна в реологическом соотношении обусловлен наличием энергетического тождества [2]

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \rho |\mathbf{v}|^2 + \frac{\tau}{2\mu} \mathbf{S} : \mathbf{S} \right) d\Omega = \int_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot (-p\mathbf{n} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma - \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \mathbf{S} : \mathbf{S} d\Omega, \quad (2)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к поверхности  $\Sigma$ , ограничивающей объем  $\Omega$ , справедливость которого удастся доказать лишь в этом случае.

Если  $\mathbf{v}|_{\partial\Omega \times (0,t)} = 0$ , энергетическое тождество (2) приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \rho |\mathbf{v}|^2 + \frac{\tau}{2\mu} \mathbf{S} : \mathbf{S} \right) d\Omega = -\frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \mathbf{S} : \mathbf{S} d\Omega.$$

Отметим, что исследование задачи в трехмерном случае началось сравнительно недавно [3].

В случае линеаризации в окрестности состояния покоя независимо от вида объективной производной уравнения движения принимают следующий вид:

$$\rho \mathbf{v}_t = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S}, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

$$\tau \mathbf{S}_t + \mathbf{S} = 2\mu \mathbf{D}. \quad (4)$$

Дополним систему (3)–(4) следующими начальными и граничными условиями:

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \boldsymbol{\Phi}(x, y, z), \mathbf{v}_t|_{t=0} = \boldsymbol{\Psi}(x, y, z), \mathbf{v}|_{\partial\Omega \times [0, t]} = \mathbf{0}; \nabla \cdot \boldsymbol{\Phi} = \nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0, \boldsymbol{\Phi}|_{\partial\Omega \times [0, t]} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

$$\mathbf{S}|_{t=0} = \mathbf{S}_0(x, t, z); \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega \times [0, t]} = h(x, y, z)e^{-t/\tau}; \quad \int_{\partial\Omega} h d\Sigma + \int_{\Omega} \operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{S} dV = 0. \quad (7)$$

*Утверждение 1.* ([3]). При достаточно гладких граничных и начальных данных существует классическое решение задачи (3)–(7). Классическое решение единственно.

Единственность доказывается на основе энергетического тождества (2), а разрешимость – путем сведения начально-краевой задачи к последовательному решению следующих задач:

1) начально краевой задачи для уравнений

$$\tau \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_t = \nu \Delta \mathbf{v} = 0, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8)$$

с условиями (5);

2) задачи Коши (4), (6) для определения компонент тензора  $\mathbf{S}$ ;

3) задачи Неймана (7) для уравнения Пуассона

$$\Delta p = \operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{S}_0 \exp(-t/\tau).$$

Будем предполагать выполненным условие “гиперболичности” системы [3]:

$$m = \frac{\mu}{\tau} \geq K \max\{S_{ij}\} \quad (9)$$

с некоторой постоянной  $K > 0$ . Отметим, что для классического решения это условие выполнено на малом интервале времени, если в начальный момент имело место строгое неравенство.

Будем исследовать классическое решение задачи с условиями прилипания на границе области течения в случае отсутствия конвективных членов в реологическом соотношении (второе из уравнений (1)), сохранив их в векторном уравнении движения. В этом случае система управляющих уравнений принимает вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\nu} = 0, \rho(\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}_t = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S}, \tau(\mathbf{S}_t - \mathbf{W} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{W}) + \mathbf{S} = 2\mu \mathbf{D} \quad (10)$$

**Теорема.** Классическое решение задачи (10) с условиями прилипания на границе области течения, дополненной достаточно гладкими начальными данными для всех искомым функций, при условии (9) единственно в классе функций

$$\mathbf{v} \in (C^2(\bar{\Omega} \times [0, T]))^3, \mathbf{S} \in (C^1(\bar{\Omega} \times [0, T]))^6.$$

Доказательство основано на замене первого уравнения (1) на уравнение

$$\rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})_t) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) / \tau + \nabla(p_t + p / \tau) = \text{div}(\mathbf{S}_t + \mathbf{S} / \tau),$$

являющееся обобщением (8) на нелинейный случай. Единственность доказывается при помощи интегральных оценок, в частности, тождества (2).

### Библиографический список

1. Астарита Дж. Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978.
2. Пухначев В. В. Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. – 2010. – Т. 51, № 4. – С. 116–126.
3. Мелешко С. В., Петрова А.Г., Пухначев В.В. Характеристические свойства системы уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. – 2017. – Т. 58, № 5. – С. 44–50.

УДК 535.529:541.64

### Исследование характера течений полимерного расплава в канале с внезапным сужением

*Г.В. Пышноград<sup>1</sup>, А.Е. Кузнецов<sup>2</sup>*  
<sup>1</sup>АлтГУ, г. Барнаул; <sup>2</sup>АлтГПУ, г. Барнаул

На сегодняшний день существует достаточное количество реологических уравнений состояния, которые позволяют описать те или иные наблюдаемые в экспериментах явления. При этом до сих пор не создана единая теория течения полимеров. В связи с этим необходимо исследовать существующие модели для определения их адекватности для описания сложных течений полимерных растворов и расплавов, возникающих, в частности, в областях со сложной геометрией.

В данной работе в качестве определяющего реологического соотношения используется модифицированная модель Виноградова-Покровского, которая замыкает уравнения сохранения импульса и массы [1, 2]. В безразмерном виде уравнения можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0,$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial v_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_{ik} + \frac{\eta_1}{\eta_0} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial v_i} \right) + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1)$$

$$Wi \left( \frac{d}{dt} a_{ik} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} a_{jk} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} a_{ji} \right) + (1 + (\kappa - \beta) I) a_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - Wi \beta a_{ij} a_{jk}.$$

Здесь  $p$  – гидростатическое давление;  $\eta_0$  и  $\tau_0$  – значения сдвиговой вязкости и времени релаксации для вязкоупругой составляющей;  $\eta_1$  – остаточная сдвиговая вязкость ( $\eta_1 \ll \eta_0$ );  $a_{ik}$  – симметричный тензор дополнительных напряжений;  $I = a_{11} + a_{22} + a_{33}$  – первый инвариант тензора дополнительных напряжений;  $\kappa = 1, 2\beta$  и  $\beta = \beta(I) = (\beta_0 + p_0 I) / (1 + p_0 I)$  – феноменологические параметры модели, учитывающие в уравнениях динамики макромолекулы размеры и форму молекулярного клубка;  $\rho$  – плотность полимера;  $v_i$  –  $i$ -я компонента скорости;  $\operatorname{Re}$  – число Рейнольдса;  $Wi$  – число Вайсенберга;  $\rho / \rho_0 = 1 + kP$ ,  $\rho_0 = 918$  кг/м<sup>3</sup>.

Расчетная область изображена на рисунке 1 и состоит из двух параллелепипедов. Первый параллелепипед является резервуаром и имеет квадратное сечение  $H_{res} \times H_{res} = 14 \times 14$  мм. Второй параллелепипед называется щелевым каналом, его сечение  $H_{res} \times H_{slit} = 14 \times 1$  мм. При расчетах длины широкого и узкого каналов выбираются достаточно большими,  $-10H_{res} \leq x \leq 50H_{res}$ , для исключения влияния как входа в резервуар, так и выхода из щелевого канала.

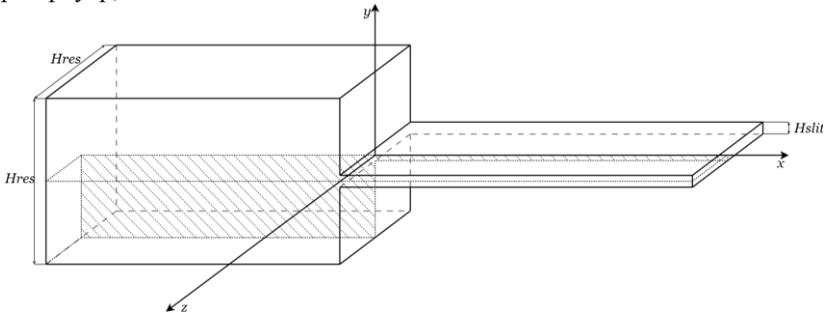


Рисунок 1 – Расчетная область и ее размеры

Так как расчетная область симметрична относительно плоскостей  $y=0$  и  $z=0$ , то расчеты проводились для выделенной на рисунке 1 области.

Численный метод строится таким образом, чтобы его можно было реализовать с использованием GPU NVIDIA и технологии CUDA. При этом использовалась неравномерная пространственная сетка, со сгущением у начала узкой части канала. Расчеты, результаты которых приведены далее, выполнялись на сетке  $180 \times 42 \times 30$ .

Полученные результаты сравнивались с экспериментальными данными, приведенными в работах [3, 4].

В работе [3] была изучена зависимость размера возникающих в углах проточного канала вихревых областей от температуры и удельного расхода расплава разветвленного полиэтилена низкой плотности. Показано, что размеры вихревой зоны существенно зависят от названных выше характеристик, причем эти вихри изменяли свою форму в параллельных оси канала сечениях, что характеризует трехмерный характер поля течения. Также отмечается наличие винтового потока, направленного к стенкам резервуара. Обнаружено, что максимальное значение скорости в осевом сечении достигается непосредственно за входом в щелевую часть канала.

Отмеченные в работах [3, 4] явления наблюдаются и в численных экспериментах [1, 2]. Результаты расчетов показывают, что перед входом в щелевой канал существует вихревая зона, размер которой изменяется при удалении от осевого сечения [1]. Методика определения размера вихревой области описана в работе [1]. В [5] показано, что максимальное значение скорости достигается вблизи от входа в щелевой канал.

Также в численных экспериментах обнаружен винтовой поток, иллюстрирующий трехмерный характер течений. На рисунке 2 изображены траектории двух частиц в потоке.

Начало траекторий отмечено символом «\*». Заметим, что, как и в работе [3], площади вихревых зон в различных сечениях, проведенных вдоль оси  $Oz$ , могут быть различными. Это также подтверждается работой [1]. В работе [5] показано, что размер вихря немонотонно зависит от значения безразмерного числа Вайсенберга  $Wi$  – с увеличением числа  $Wi$  вихревая область сначала увеличивается, затем начинает уменьшаться. Этот эффект можно объяснить комплексным влиянием начальной сдвиговой вязкости  $\eta_0$  и начального времени релаксации  $\tau_0$ , которые позволяют управлять числом Вайсенберга.

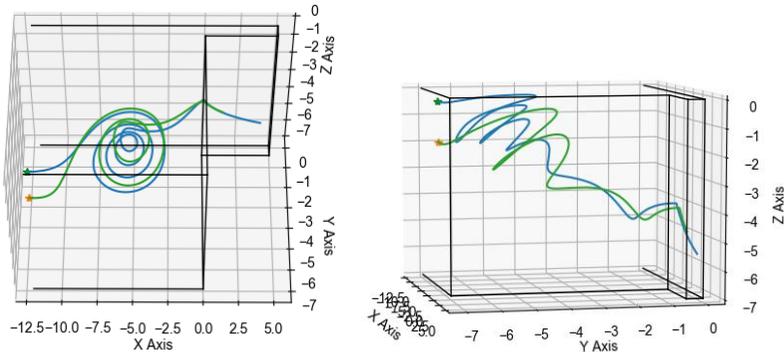


Рисунок 2 – Траектории движения двух частиц в потоке

Таким образом, в работе показано, что использование модифицированной реологической модели Виноградова-Покровского (1) позволяет качественно описывать наблюдаемые в экспериментах [3, 4] явления. При этом отмечено, что течения расплавов полимеров имеют трехмерный характер, присутствует винтовой поток, направленный от оси канала к его стенкам. Различия между экспериментальными и расчетными кривыми можно объяснить одномодовым характером модели.

Это позволяет утверждать, что модифицированная модель Виноградова-Покровского (1) пригодна для описания течений полимерных расплавов в областях со сложной геометрией.

*Авторы выражают глубокую признательность Сибирскому суперкомпьютерному центру за возможность проведения расчетов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-31-00030 мол. а).*

### Библиографический список

1. Кошелев К.Б., Кузнецов А.Е., Пышнограй Г.В., Толстых М.Ю. Зависимость гидродинамических характеристик течения полимерного расплава в сходящемся канале от температуры // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т. 22, №2. – С. 175–191.
2. Кошелев К.Б., Пышнограй Г.В., Толстых М.Ю. Моделирование трехмерного течения полимерного расплава в сходящемся канале с прямоугольным сечением // Известия РАН. МЖГ. – 2015. – №3. – С. 16–24.
3. Hertel D., Valette R., Munstedt H. Three-dimensional entrance flow of a low-density polyethylene (LDPE) and a linear low-density polyethylene (LLDPE) into a slit die // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2008.V. 153.P. 82–94.

4. Hertel D., Munstedt H. Dependence of the secondary flow of a low-density polyethylene on processing parameters as investigated by laser-Doppler velocimetry // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2008.V. 153. P. 73–81.

5. Кузнецов А.Е., Пышнограй Г.В., Черпакова Н.А. Влияние числа Вайсенберга на структуру течений полимерных расплавов в каналах с внезапным сужением // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения.* 2017. – Т.14, №3. – С. 332–336.

**УДК 532.135**

**Моделирование нелинейных эффектов в мезоскопической теории полимерных жидкостей при их больших периодических деформациях**

*Г.В. Пышнограй<sup>1</sup>, Н.А. Черпакова<sup>2</sup>, О.А. Кондратьева<sup>2</sup>*  
*<sup>1</sup>АлтГУ, <sup>2</sup>АлтГПУ, г. Барнаул*

В настоящее время нет необходимости говорить о важности полимеров. Они находят применение во многих областях жизнедеятельности человека. Их широкое использование приводит к росту числа научных исследований, посвященных полимерам и можно отметить, что рост числа экспериментальных и прикладных работ опережает рост работ, посвященными математическому моделированию полимерных систем и в частности, при моделировании течений растворов и расплавов полимеров [1–10]. Это обусловлено тем, что математическая теория таких течений еще далека от завершения. И связано как со сложностью строения полимерных молекул, так и с высокой сложностью получающихся реологических моделей, расчеты по которым требуют применения новых подходов. Известно, что система уравнений динамики сплошных сред, которая записана на основе законов сохранения, не полна. Следовательно, проблема замыкания этой системы в случае растворов и расплавов полимеров различного строения является одной из современных фундаментальных проблем, стоящих перед естественными науками. В случае моделирования течений полимерных жидкостей такое замыкание осуществляется на основе формулировки реологического определяющего соотношения. Это соотношение устанавливает связь между напряжениями в полимерной системе и кинематическими характеристиками течения. Как и всякая математическая модель нуждается во всестороннем обосновании. Для этого используют как методы статистической механики, при выводе реологического определяющего соотношения [2, 4, 5], так и сравнение с экс-

периментальными данными для различных типов течений [1, 3, 6–10]. Последний случай требует применения численных методов решения систем дифференциальных уравнений в частных производных и использования современного высокопроизводительного вычислительного оборудования для их анализа.

В данной работе с помощью микроструктурного подхода при рассмотрении динамики невзаимодействующих гантелей, движущихся в анизотропной среде получена новая реологическая модель [4, 5]. Предложена зависимость эффективного коэффициента трения бусинок гантели от первого инварианта тензора анизотропии. Это позволило рассчитать вискозиметрические функции при простом сдвиге и одноосном растяжении [5, 6]. Отмечено качественное соответствие рассчитанных функций течению реальных полимерных жидкостей и сделан вывод о необходимости учета множественности релаксационных процессов в рамках исследуемого подхода. Далее было рассмотрено обобщение реологической модели на многомодовый случай [5]. Были рассчитаны зависимости модуля упругости и модуля потерь и проведено сравнение с экспериментальными данными, полученными для сильно разветвленных полиэтиленов низкой плотности. Полученные при сравнении с экспериментальными данными параметры модели используются далее для моделирования нелинейных эффектов при простом сдвиге и одноосном растяжении. Сделан вывод о пригодности рассматриваемой реологической модели для описания стационарных и нестационарных характеристик расплавов разветвленных полимеров. Работы этого направления проводились в сотрудничестве с Институтом гидродинамики Чешской Академии Наук. Сотрудниками этого института были предоставлены экспериментальные материалы по замерам вискозиметрических функций при простом сдвиге и одноосном растяжении [5], а также ими были проведены замеры нелинейного отклика на периодическое воздействие с большой амплитудой [9].

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00030.*

### **Библиографический список**

1. Гусев А.С., Пышнограй Г.В. Частотные зависимости динамических характеристик линейных полимеров при простом сдвиге // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2001. – Т. 7, № 2. – С. 236–245.
2. Гусев А.С., Макарова М.А., Пышнограй Г.В. Мезоскопическое уравнение состояния полимерных сред и описание динамических ха-

рактистик на его основе // Инженерно-физический журнал. – 2005. – Т. 78, № 5. – С. 55–61.

3. Кошелев К.Б., Пышнограй Г.В., Толстых М.Ю. Моделирование трехмерного течения полимерного расплава в сходящемся канале с прямоугольным сечением // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2015. – № 3. – С. 3–11.

4. Мерзликина Д.А., Филип П., Пивоконский Р., Пышнограй Г.В. Многомодовая реологическая модель и следствия для простого сдвига и растяжения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т. 19, № 2. – С. 254–261.

5. Мерзликина Д.А., Пышнограй Г.В., Пивоконский Р., Филип П. Реологическая модель для описания вискозиметрических течений расплавов разветвленных полимеров // Инженерно-физический журнал. – 2016. Т. 89, №3. – С. 643–651.

6. Koshelev K., Kuznetsov A., Merzlikina D., Pyshnograï G., Pyshnograï I., Tolstykh M.Y. Mesoscopic rheological model for polymeric media flows // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V. 790, № 1. – С. 12014.

7. Пышнограй Г.В., Кузнецов А.Е., Мерзликина Д.А., Трегубова Ю.Б. Влияние первого инварианта тензора дополнительных напряжений на характеристики процесса формирования полимерных пленок // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2017. – Т. 14, № 2. – С. 153–158.

8. Кузнецов А.Е., Пышнограй Г.В., Черпакова Н.А. Влияние числа Вайсенберга на структуру течений полимерных расплавов в каналах с внезапным сужением // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2017. – Т. 14, № 3. – С. 332–336.

9. Черпакова Н.А., Кузнецов А.Е., Пышнограй Г.В. Моделирование нелинейной вязкоупругости полимерных материалов при их больших периодических деформациях // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2017. – Т. 14, № 3. – С. 376–380.

10. Al Joda H.N.A., Pyshnograï G.V., Shipovskaya A.B., Tregubova Y.B., Zinovich S.A. Employment of the rheological characteristics of polymer solutions in modeling film production // Mechanics of Composite Materials. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 637–650.

## Обобщенная HBS-модель обтекания листа растения воздухом

*С.А. Саженков<sup>1,2</sup>, Е.В. Саженкова<sup>3</sup>*

*<sup>1</sup>ИГиЛ СО РАН, <sup>2</sup>НГУ, Новосибирск, Хэйлуцзянский ун-т,  
Харбин; <sup>3</sup>НГУЭУ, Новосибирск*

**1. Предисловие.** Опираясь на известную в теории пограничного слоя модель стационарного ламинарного обтекания плоской пластины с одним приваренным к ней перпендикулярно штырем [1], очень простая и при этом востребованная постановка для описания аэродинамики в окрестности листа растения была предложена в статье [2]. На ее основании проведен ряд несложных численных расчетов. Для изучения молекулярных механизмов развития органов растений методами системной биологии требуется создание более общей модели, учитывающей тонкую структуру трихом (ворсинок) на поверхности листа. В настоящей заметке формулируется такая модель, получаемая методом усреднения системы «вязкий газ – упругая пластина» с тонкой двойной периодической упругой структурой, прикрепленной к поверхности пластины. Эта постановка обобщает модель К.-Х. Хоффмана, Н.Д. Боткина и В.Н. Старовойтова (HBS-model), построенную в [3]. Достаточно обширный обзор литературы, подробная постановка исходной задачи на микроскопическом уровне, основы метода усреднения Аллера-Бриана и некоторые промежуточные на пути построения итоговой модели результаты изложены в [4, 5].

**2. Описание механической системы на микроскопическом уровне.** Рассматривается линеаризованная модель динамики совместного движения упругой пластины с щетинистой поверхностью (листа растения с трихомами) и вязкого сжимаемого газа (воздуха). Без ограничения общности считается, что пластина и газ заполняют трехмерный куб  $\Omega = \{0 < x_1, x_2, x_3 < 1\}$ . Пластина расположена на дне куба и занимает слой  $\Omega_s = \{0 < x_3 < \Delta\}$  ( $\Delta < 1$ ). Щетинки (трихомы) моделируются в виде упругих цилиндров, достаточно часто периодически расположенных на гладкой поверхности пластины. Предполагается наличие цилиндров двух размеров: цилиндры меньшей высоты и меньшего диаметра расположены на порядок или несколько порядков чаще, чем цилиндры большей высоты и большего диаметра. Высоты цилиндров фиксированы и принимают два постоянных значения  $\delta_*$  и

$\delta^*$ ,  $\delta_* < \delta^*$ ,  $\Delta + \delta^* < 1$ . Расстояние между центральными осями двух соседних больших цилиндров есть  $O(\varepsilon)$ , а двух соседних маленьких –  $O(\varepsilon^2)$ , где  $\varepsilon$  – малый положительный параметр.

Движение газа описывается классическими нестационарными уравнениями Стокса, а движение упругой компоненты – классическими нестационарными уравнениями Ламе. На поверхности соприкосновения выполняются условия непрерывности скоростей и напряжений. В системе уравнений и условий на поверхности искомыми являются поле скоростей  $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  и давление  $p_\varepsilon = p_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  в газе и поле перемещений  $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  частиц пластины с цилиндрами. Модель замыкается заданием начальных условий  $\mathbf{u}_\varepsilon|_{t=0} = \mathbf{u}^0$ ,  $p_\varepsilon|_{t=0} = p^0$ ,  $\mathbf{v}_\varepsilon|_{t=0} = \mathbf{v}^0$ ,

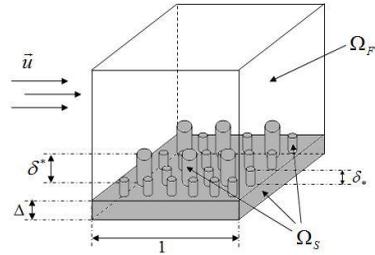
$(\partial \mathbf{v}_\varepsilon / \partial t)|_{t=0} = \mathbf{w}^0$  на распределения скорости газа, давления в газе, перемещения и скорости пластины с цилиндрами, соответственно, и заданием условия покоя поверхности пластины и условия распределения скорости воздуха на внешней границе  $\Omega$ .

Полная точная постановка исходной задачи сформулирована в [4,5], следуя оригинальному изложению в [3, п. 2.1]. Существование и единственность слабого обобщенного решения задачи при любом малом фиксированном  $\varepsilon > 0$  вытекает из известных результатов в [6, глава 1, п. 9.1].

В вышеописанной постановке учитывается каждый отдельный цилиндр (трихома, щетинка). Следовательно, она является моделью на *микроскопическом уровне*.

**3. О предельном переходе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и асимптотической декомпозиции.** Целью работы является предельный переход в микроскопической модели при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и вывод эффективных соотношений, описывающих механическую систему на *макроскопическом уровне*. Для этого сначала вводится единообразное описание в терминах искомых скоростей: распределение перемещений  $\mathbf{v}_\varepsilon$  в упругой компоненте заменяется на распределение скоростей  $\mathbf{u}_\varepsilon$  по формуле  $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{v}^0 + \mathbf{J}_t \mathbf{u}_\varepsilon$ , где

$(\mathbf{J}_t \phi)(t) = \int_0^t \phi(t') dt'$  для всевозможных интегрируемых  $\phi$ . Затем уста-



навливается, что  $\mathbf{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}$  по мере в  $\Omega \times (0, T)$ . Методом гомогенизации Аллера–Бриана выводится трехмасштабная усредненная модель, решением которой служат распределение макроскопической скорости  $\mathbf{u}$ , а также распределения мезоскопической и микроскопической скоростей  $\mathbf{u}^{(1)}$  и  $\mathbf{u}^{(2)}$  [4]. Наконец, производится асимптотическая декомпозиция, заключающаяся в разделении микро-, мезо- и макроскопического масштабов, и тем самым конструируется эффективная предельная система.

**4. Обобщенная HBS-модель. (Эффективная предельная модель обтекания листа с трихомами воздухом.)** В дополнение к  $\Omega_\varepsilon$  введем обозначения еще для трех слоев в  $\Omega$ :  $\Omega_{\delta_*} = \{ \Delta < x_3 < \Delta + \delta_* \}$ ,  $\Omega_{\delta^*} = \{ \Delta + \delta_* < x_3 < \Delta + \delta^* \}$ ,  $\Omega_f = \{ \Delta + \delta^* < x_3 < 1 \}$  и сформулируем предельную систему соотношений, которой удовлетворяет распределение скоростей  $\mathbf{u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}_\varepsilon$ .

В  $\Omega_f$  выполняются классические уравнения Стокса вязкого газа:

$$\rho_F \mathbf{u}_t - \operatorname{div}_x (\mathbf{P} \nabla_x \mathbf{u}) = -\nabla_x p + \rho_F \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$p = -\gamma^{-1} \operatorname{div}_x J_t \mathbf{u} + p^0, \quad (2)$$

$$\mathbf{P} \nabla_x \mathbf{u} = (\lambda \operatorname{div}_x \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}_x(\mathbf{u}). \quad (3)$$

В  $\Omega_{\delta^*}$  и  $\Omega_{\delta_*}$  движение описывается нелокальными уравнениями динамики вязкоупругого тела:

$$\begin{aligned} \rho_{\delta^*} \mathbf{u}_t - \operatorname{div}_x (\mathbf{V}_{0\delta^*} : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}) + \mathbf{E}_{0\delta^*} : \mathbf{D}_x(J_t \mathbf{u}) \\ + \int_0^t \mathbf{V}_{1\delta^*}(t-\tau) : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}(\tau)) d\tau + J_t \int_0^t \mathbf{E}_{1\delta^*}(t-\tau) : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \\ + \mathbf{L}_{\delta^*} p^0 + \mathbf{K}_{\delta^*} : \mathbf{D}_x(\mathbf{v}^0)) = \rho_{\delta^*} \mathbf{g}, \quad x \in \Omega_{\delta^*}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\delta_*} \mathbf{u}_t - \operatorname{div}_x (\mathbf{V}_{0\delta_*} : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}) + \mathbf{E}_{0\delta_*} : \mathbf{D}_x(J_t \mathbf{u}) \\ + \int_0^t \mathbf{V}_{1\delta_*}(t-\tau) : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}(\tau)) d\tau + J_t \int_0^t \mathbf{E}_{1\delta_*}(t-\tau) : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}(\tau)) d\tau \\ + \int_0^t \left[ \int_0^\tau \mathbf{V}_{2\delta_*}(t-\tau, \tau-\tau') : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}(\tau')) d\tau' \right] d\tau \\ + J_t \int_0^t \left[ \int_0^\tau \mathbf{E}_{2\delta_*}(t-\tau, \tau-\tau') : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}(\tau')) d\tau' \right] d\tau \end{aligned}$$

$$+\mathbf{L}_{\delta_s} p^0 + \mathbf{K}_{\delta_s} : \mathbf{D}_x(\mathbf{v}^0) = \rho_{\delta_s} \mathbf{g}, \quad x \in \Omega_{\delta_s}; \quad (5)$$

В  $\Omega_s$  выполняются классические уравнения Ламе линейной упругости

$$\rho_s \mathbf{u}_t - \operatorname{div}_x (\mathbf{G} : J_t \nabla_x \mathbf{u} + \mathbf{G} : \nabla_x \mathbf{v}^0) = \rho_F \mathbf{g}. \quad (6)$$

Эта система дополняется краевыми условиями на  $\mathbf{u}$  на внешней границе области  $\Omega$ , условиями непрерывности полей скоростей и напряжений на поверхностях раздела слоев.

Таким образом, сконструирована замкнутая корректная гомогенная HBS-модель.

В (1)-(6)  $\mathbf{V}_{0\delta_s}$  и  $\mathbf{V}_{0\delta^*}$  – это тензоры мгновенной вязкости,  $\mathbf{E}_{0\delta_s}$ ,  $\mathbf{E}_{0\delta^*}$  – тензоры мгновенной упругости,  $\mathbf{V}_{1\delta_s}(t)$ ,  $\mathbf{V}_{1\delta^*}(t)$  и  $\mathbf{V}_{2\delta_s}(t, \tau)$  – тензоры вязкой релаксации,  $\mathbf{E}_{1\delta_s}(t)$ ,  $\mathbf{E}_{1\delta^*}(t)$  и  $\mathbf{E}_{2\delta_s}(t, \tau)$  – тензоры упругой релаксации. Все они являются тензорами четвертого порядка, определяются физическими характеристиками мезоскопической и микроскопической структур и считаются заданными. Матрицы  $\mathbf{L}_{\delta_s}$ ,  $\mathbf{L}_{\delta^*}$  и тензоры четвертого порядка  $\mathbf{K}_{\delta_s}$ ,  $\mathbf{K}_{\delta^*}$  также определяются физическими характеристиками мезоскопической и микроскопической структур и считаются заданными. Они зависят от  $t$ . Постоянные величины  $\rho_F$ ,  $\rho_s$ ,  $\rho_{\delta_s}$  и  $\rho_{\delta^*}$  – это средние заданные плотности среды в слоях  $\Omega_f$ ,  $\Omega_s$ ,  $\Omega_{\delta_s}$  и  $\Omega_{\delta^*}$ , соответственно.

*Работа С.А. Саженкова поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (код проекта III.22.4.2) и РФФИ (грант № 18-01-00649).*

### Библиографический список

1. Goldstein S. (Editor). Modern Developments in Fluid Dynamics: Volume II. – New York: Dover Publication, 1965. – 702 pp.
2. Schreuder M.D.J., Brewer C.A., Heine C. Modelled influences of non-exchanging trichomes on leaf boundary layers and gas exchange // J.Theor. Biol. – 2001. – V. 210. – P. 23–32.
3. Hoffmann K.-H., Botkin N.D., Starovoitov V.N. Homogenization of interfaces between rapidly oscillating fine elastic structures and fluids // SIAM J.Appl. Math. – 2005. – Vol. 65, no.3. – P. 983–1005.
4. Саженков С.А., Шибанова Е.В. Исследование аэродинамики в окрестности листа растения с учетом опушения методом гомогениза-

ции Аллера-Бриана // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2016. – №1 (89). – С. 173–179.

5. Саженов С.А. Описание аэродинамики в окрестности листа растения с учетом опушения с помощью модифицированной HBS-модели // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования [Электронный ресурс]: сб. науч. ст. междунар. конф., 14-17 ноября 2017 г./ АлтГУ; [отв. ред. Е. Д. Родионов]. – Барнаул: АлтГУ, 2017. – 1 эл. опт. диск (DVD). – № гос. регистрации 0321704250. – С. 477–487.

6. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

**УДК 551.345 + 539.3**

### **Расчет физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии и прогноз их разрушения**

*А.Н. Сибин*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Процесс эрозии почвогрунтов имеет большое значение при решении прикладных задач в сельском хозяйстве: ирригация и дренаж сельскохозяйственных полей [1] и процесс внутренней эрозии, сопутствующий каналному орошению почвогрунтов [2]. Процесс эрозии необходимо учитывать в исследованиях, связанных с прогнозом распространения загрязнений, фильтрацией вблизи водохранилищ и других гидротехнических сооружений [3]. Более того, аналогичные проблемы, связанные с процессом эрозии грунта, возникают и в других областях, включая добычу нефти и газа [4].

В работе численно исследована двумерная задача внутренней суффозии в межмерзлотном водоносном горизонте. Фильтрация подземных вод происходит в водоносном горизонте, который соприкасается с промерзшим песчаным грунтом. В процессе оттаивания грунта и при достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения. В качестве математической модели использованы уравнения сохранения массы для воды, подвижных твердых частиц и неподвижного пористого скелета, а также закон Дарси для воды и подвижных твердых частиц и соотношение для интенсивности суффозионного потока. Задача сведена к системе из трех уравнений относительно пористости, приведенного давления и выходящегося на решении уравнения для водонасыщенности. Почвогрунт моделируется как трехфазная сплошная пористая среда.

Поры полностью заполнены смесью воды ( $i = 1$ ) и подвижных твердых частиц ( $i = 2$ ). Доля пор в грунте ( $i = 3$ ) определяется пористостью  $\phi = (V_1 + V_2)/V$ , где  $V = V_1 + V_2 + V_3$  – общий объем грунта,  $V_1, V_2, V_3$  – соответственно объемы воды, подвижных твердых частиц и скелета грунта.

Следуя работе [5] в двумерном случае обезразмеренная система уравнений, описывающая процесс внутренней эрозии, имеет вид

$$\begin{aligned}\phi \frac{\partial s}{\partial t} &= \nabla \cdot (a \nabla s + b \vec{v} + \vec{F}), \\ \nabla \cdot (K \nabla p + \vec{f}) &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= I,\end{aligned}$$

где  $I$  – интенсивность фазового перехода (суффозионный поток);  $s_1 = V_1/(V_1 + V_2)$ ,  $s_2 = V_2/(V_1 + V_2)$  – концентрации воды (насыщенность) и подвижных твердых частиц в порах;  $\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0$  – истинные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта;  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$  – оператор градиента;  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  – суммарная скорость фильтрации,  $p$  – приведенное давление. В рассматриваемом случае  $\rho_3^0 = \rho_2^0$ , так как подвижные частицы захватываются суффозионным потоком из грунта. Коэффициенты уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}a(s, \phi) &= -K_0 \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02}}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}} \frac{\partial p_c}{\partial s}, \quad b(s) = \frac{\bar{k}_{02}}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}, \\ v_x &= v_x \frac{x_{sc}}{t_{sc}} = v_{x1} + v_{x2}, \quad v_y = v_y \frac{x_{sc}}{t_{sc}} = v_{y1} + v_{y2}, \\ v_{x1} &= -K_0 \bar{k}_{01} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x} - g_x \right), \quad v_{x2} = -K_0 \frac{\bar{k}_{02}}{\mu} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} g_x \right), \\ v_{y1} &= -K_0 \bar{k}_{01} \left( \frac{\partial p_1}{\partial y} - g_y \right), \quad v_{y2} = -K_0 \frac{\bar{k}_{02}}{\mu} \left( \frac{\partial p_2}{\partial y} - \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} g_y \right), \\ F_x &= K_0 g_x \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02} (\frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} - 1)}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}, \quad K_0 = \frac{B p_{sc} t_{sc}}{x_{sc}^2 \mu_1} \varphi^3, \quad F_y = K_0 g_y \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02} (\frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} - 1)}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}, \\ f_x &= -K_0 \left( \bar{k}_{01} + \frac{\rho_2^0 \mu_1}{\rho_1^0 \mu_2} \bar{k}_{02} \right) g_x, \quad K = K_0 k, \\ k &= \bar{k}_{01} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \bar{k}_{02}, \quad f_y = -K_0 \left( \bar{k}_{01} + \frac{\rho_2^0 \mu_1}{\rho_1^0 \mu_2} \bar{k}_{02} \right) g_y.\end{aligned}$$

$$I = \begin{cases} \lambda(1 - \phi)(1 - s)\phi(|v_1| - |v_k|), & |v_1| \geq |v_k|; \\ 0, & |v_1| < |v_k|. \end{cases}$$

$$\lambda = \hat{\lambda} x_{sc}, \quad v_k = v_k \frac{x_{sc}}{t_{sc}}, \quad |v_1| = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2}.$$

Здесь  $t_{sc}, x_{sc}, p_{sc} = \frac{\rho_1^0 x_{sc}^2}{t_{sc}^2}, v_{sc} = \frac{x_{sc}}{t_{sc}}$  – размерные постоянные,  $\hat{\lambda}$  – размерный эмпирический коэффициент (отвечает за суффозионную устойчивость почвогрунта), а  $\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ .

Для модельной задачи рассмотрена начально-краевая задача и построена конечно-разностная схема на основе метода переменных направлений. Проведены расчеты тестовой задачи, определены давление воды, пористость грунта, водонасыщенность, скорости воды и подвижных частиц грунта. Сравнение найденной скорости смеси воды и подвижных частиц грунта с критической позволило найти область подверженную суффозионному воздействию. Проведено численное исследование совместного влияния процессов суффозии и кольматации. Исследована зависимость искомых функций от параметра, характеризующего суффозионную устойчивость грунта.

Автор статьи признателен А.А. Папину и С.С. Кузикову за обсуждение задачи и конструктивные замечания.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.*

#### **Библиографический список**

1. Vieira D.A.N., Dabney S.M. Modeling edge effects of tillage erosion // Soil Tillage Research. – 2011. 111(2):197–207.
2. Wilson G. Understanding soil-pipe flow and its role in ephemeral gully erosion // Hydrol. Process. 2011, Vol. 25, 2354–2364.
3. Einstein H. A. Der Geschiebetrieb als wahrscheinlichkeits Problem. Mitt. d. Versuchsanstaltf Wasserbau, Eidg. T. H., Zurich. 1937.
4. Wang J., Walters D. A., Settari A., Wan R. G. Simulation of cold heavy oil production using an integrated modular approach with emphasis on foamy oil flow and sand production effects 1st Heavy Oil Conference 2006.
5. Papin A. A., Sibir A. N. Model isothermal internal erosion of soil // J. Phys.: Conf. Ser., 2016, v. 722(1), p. 1–8.

## УДК 517.95

### Корректность начально-краевых задач для уравнений фильтрации в пороупругих средах

*М.А. Токарева*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Рассматривается система уравнений, описывающая одномерное нестационарное движение вязкой жидкости в деформируемой вязкой пористой среде в поле силы тяжести в случае полного уравнения баланса сил системы [1–4]:

$$\frac{\partial(1-\Phi)\rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\Phi)\rho_s v_s) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_f \Phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f \Phi v_f) = 0,$$

$$\Phi(v_f - v_s) = -k(\Phi)\left(\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g\right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\frac{1}{\xi(\Phi)} p_e, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta(1-\Phi)\frac{\partial v_s}{\partial x}\right) = \rho_{tot} g + \frac{\partial p_{tot}}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\rho_{tot} = \Phi \rho_f + (1-\Phi)\rho_s, \quad p_e = p_{tot} - p_f, \quad p_{tot} = \Phi p_f + (1-\Phi)p_s.$$

Будем искать решение данной системы в области  $(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega = (0, 1)$ , при краевых и начальных условиях

$$v_s|_{x=0, x=1} = v_f|_{x=0, x=1} = 0, \quad \rho_f|_{t=0} = \rho^0(x), \quad \Phi|_{t=0} = \Phi^0(x), \quad (5)$$

или

$$v_s|_{x=0, x=1} = v_f|_{x=0, x=1} = 0, \quad \Phi|_{t=0} = \Phi^0(x). \quad (6)$$

Здесь  $\Phi$  – пористость;  $\rho_f, \rho_s, v_s, v_f$  – соответственно истинные плотности и скорости фаз;  $p_e$  – эффективное давление;  $p_{tot}$  – общее давление;  $\rho_{tot}$  – общая плотность;  $g$  – плотность массовых сил;  $k(\Phi)$  – коэффициент фильтрации,  $\xi(\Phi)$  – коэффициент объемной вязкости (заданные функции),  $\eta$  – динамическая вязкость твердой фазы. Задача записана в эйлеровых координатах  $(x, t)$ . Истинная плотность твердой фазы  $\rho_s$  принимается постоянной. Система (1)–(4) является замкнутой, если  $p_f = p_f(\rho_f)$  или  $\rho_f = const$ . В общем случае искомыми являются величины  $\Phi, \rho_f, v_s, v_f, p_f, p_s$ .

В обозначениях функциональных пространств следуем [5]:  $C^{k+\alpha, m+\beta}(Q_T)$  – пространство Гельдера, где  $k, m$  – натуральные,  $(\alpha, \beta) \in (0, 1]$ , с нормой  $\|f\|_{C^{k+\alpha, m+\beta}(Q_T)}$ .

**Определение 1.** Решением задачи (1)–(5) называется совокупность функций  $(p_f, v_f, v_s) \in C^{2+\alpha, \alpha/2}(Q_T)$ ,  $(\phi, \rho_f) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T)$ ,  $p_s \in C^{1+\alpha, \alpha/2}(Q_T)$  таких, что  $0 < \phi < 1$ ,  $\rho_f > 0$ . Эти функции удовлетворяют уравнениям (1)–(5) и начальным и граничным условиям (5) как непрерывные в  $Q_T$  функции.

**Теорема 1.** Пусть данные задачи (1)–(5) подчиняются следующим условиям:

1) Функции  $k(\phi), \xi(\phi)$  и их производные до второго порядка непрерывны для  $\phi \in (0, 1)$ ,  $\rho_f > 0$ , и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} k_0^{-1} \phi^{q_1} (1 - \phi)^{q_2} &\leq k(\phi) \leq k_0 \phi^{q_3} (1 - \phi)^{q_4}, \\ 1/\xi(\phi) &= a_0(\phi) \phi^{\alpha_1} (1 - \phi)^{\alpha_2 - 1}, \\ 0 < R_1 &\leq a_0(\phi) \leq R_2, \quad p_f = R \rho_f, \end{aligned}$$

где  $R$  – известная положительная постоянная,  $k_0, \alpha_i, R_i, i = 1, 2$  – положительные постоянные,  $q_1, \dots, q_4$  – фиксированные вещественные числа;

2) начальные условия  $\phi^0, \rho^0$  и функция  $g$  удовлетворяют следующим условиям гладкости:  $\phi^0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $\rho^0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $g \in C^{1+\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_T)$ , и условиями согласования

$$\left( (1 - \phi^0) \frac{dp_f(\rho^0)}{dx} - \rho^0 g(x, 0) \right) |_{x=0, x=1} = 0,$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} 0 < m_0 &\leq \phi^0(x) \leq M_0 < 1, \quad 0 < m_1 \leq \rho^0(x) \leq M_1 < \infty, \\ 0 < g(x, t) &\leq g_0 < \infty, \quad x \in \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

где  $m_0, M_0, m_1, M_1, g_0$  – известные положительные постоянные.

Тогда задача (1)–(5) имеет единственное локальное классическое решение, т.е. существует значение  $t_0 \in (0, T)$  такое, что

$$\begin{aligned} (p_f, v_f, v_s) &\in C^{2+\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_{t_0}), \quad (\phi, \rho_f) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{Q}_{t_0}), \\ p_s &\in C^{1+\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_{t_0}). \end{aligned}$$

Более того  $0 < \phi(x, t) < 1$ ,  $\rho_f(x, t) > 0$  в  $\bar{Q}_{t_0}$ .

**Определение 2.** Решением задачи (1)–(4), (6) называется совокупность функций  $(p_f, v_f, v_s) \in C^{2+\alpha, \beta}(Q_T)$ ,  $\phi \in C^{2+\alpha, 1+\beta}(Q_T)$ ,  $p_s \in C^{1+\alpha, \beta}(Q_T)$ , таких, что  $0 < \phi < 1$ . Эти функции удовлетворяют уравнениям (1)–(4) и начальным и граничным условиям (6) как непрерывные в  $Q_T$  функции.

**Теорема 2.** Пусть данные задачи (1)–(4), (6) подчиняются следующим условиям ( $\rho_f = const$ ):

1) функции  $k(\phi), \xi(\phi)$  и их производные до второго порядка непрерывны для  $\phi \in (0, 1)$  и удовлетворяют условиям

$$k_0^{-1} \phi^{q_1} (1 - \phi)^{q_2} \leq k(\phi) \leq k_0 \phi^{q_3} (1 - \phi)^{q_4},$$

$$\frac{1}{\xi(\Phi)} = a_0(\Phi)\Phi^{\alpha_1}(1-\Phi)^{\alpha_2-1}, \quad 0 < R_1 \leq a_0(\Phi) \leq R_2 < \infty,$$

где  $k_0, \alpha_i, R_i, i = 1, 2$  – положительные постоянные,  $q_1, \dots, q_4$  – фиксированные вещественные числа;

2) функция  $g$  и начальная функция  $\Phi^0$  удовлетворяют следующим условиям гладкости

$$g \in C^{1+\alpha, \beta}(\bar{Q}_T), \quad \Phi^0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}),$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$0 < m_0 \leq \Phi^0(x) \leq M_0 < 1, \quad |g(x, t)| \leq g_0 < \infty, \quad x \in \bar{\Omega},$$

где  $m_0, M_0, g_0$  – известные положительные константы.

Тогда задача (1)–(4), (6) имеет единственное локальное классическое решение, т.е. существует значение  $t_0$  такое, что

$$(p_f, v_f, v_s) \in C^{2+\alpha, \beta}(\bar{Q}_{t_0}), \quad \Phi \in C^{2+\alpha, 1+\beta}(\bar{Q}_{t_0}), \quad p_s \in C^{1+\alpha, \beta}(\bar{Q}_{t_0}).$$

Более того  $0 < \Phi(x, t) < 1$  в  $\bar{Q}_{t_0}$ .

**Теорема 3.** Пусть дополнительно к условиям теоремы 2 функции  $k(\Phi), \xi(\Phi)$  удовлетворяют условиям

$$k(\Phi) = \frac{k}{\mu} \Phi^n, \quad \xi(\Phi) = \eta \Phi^{-m}, \quad n \geq 1, m \geq 1,$$

где  $k, \mu, \eta$  – положительные постоянные.

Тогда для всех  $t \in [0, T], T < \infty$  существует единственное решение задачи (1) – (4), (6), причем существуют числа  $0 < m_1 < M_1 < 1$  такие, что  $m_1 \leq \Phi(x, t) \leq M_1, (x, t) \in Q_T$ .

При доказательстве вышеизложенных теорем используется переход к переменным Лагранжа [5]. Локальная разрешимость задачи (1)–(5) устанавливается с помощью теоремы Тихонова-Шаудера о неподвижной точке [7, с. 227], глобальная разрешимость задачи (1)–(4), (6) устанавливается с использованием теории эллиптических уравнений [8]. Техника, используемая при доказательстве близка технике, используемой в работах [9, 10].

В работе доказана локальная теорема существования и единственности решения задачи в случае сжимаемой жидкости. В случае несжимаемой жидкости доказана теорема существования решения в целом по времени в гильбертовских классах.

*Данный доклад посвящен памяти профессора кафедры дифференциальных уравнений Алтайского государственного университета Сергея Семеновича Кузикова.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ «Гидроупругие и термодинамические эффекты при взаимодействии пороупругого снежно-ледового покрова с конструкциями» □ №16-08-00291.*

**Библиографический список**

1. Fowler A. *Mathematical Geoscience*. Springer-Verlag London Limited. 2011. – 904p.
2. McKenzie D.P. The generation and compaction of partial melts // *J. Petrol.* – 1984. – Vol. 25. – P. 713–765.
3. Morency C., Huismans R. S., Beaumont C., Fullsack P. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // *Journal of Geophysical Research.* – 2007. – Vol. 112.
4. Audet D.M., Fowler A.C. A mathematical for compaction in sedimentary basins // *Geophys. J. Int.* – 1992. – Vol. 110. – P. 577–590.
5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 316 с.
6. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2016. – Vol. 722.
7. Эдвардс, Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
8. Ладыженская О.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
9. Папин А.А. Существование решения «в целом» уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. I. Постановка задачи и вспомогательные утверждения // *Сибирский журнал индустриальной математики.* – 2006. – Т. IX, № 2. – С. 116–136.
10. Папин А.А. Существование решения «в целом» уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. II. результаты о разрешимости // *Сибирский журнал индустриальной математики.* – 2006. – Т. IX, № 3. – С. 111–123.

**УДК 519.6:539.3****Численное решение задачи консолидации Терцаги в программном комплексе Abaqus**

*А.В. Устюжанова, Г.В. Кравченко*  
*АлтГУ, г. Барнаул*

В данной работе демонстрируется применение программного комплекса Simulia Abaqus для получения численного решения задачи консолидации К. Терцаги [1].

Программный комплекс Simulia Abaqus предназначен для конечно-элементного моделирования сложных конструкций и проведения прочностных расчетов инженерных задач [2]. Данный программный комплекс обладает рядом преимуществ, одно из которых – это возможность использовать разные типы анализа при решении связанных задач мультифизики в области прочности конструкций. К таким задачам относится и задача о потоке жидкости в пористой среде.

Для учебных целей существует бесплатная версия Abaqus Student Edition, которая повторяет полную версию, но с ограничением на количество узлов и элементов в сетке не более 1000.

Задача консолидации (уплотнения) пороупругой среды состоит в следующем. Исследуемая область ограничена непроницаемыми нижней и боковыми поверхностями. К верхней проницаемой поверхности прикладывается сжимающее напряжение, которое создает напор в жидкости. Скорость потока жидкости пропорциональна градиенту давления согласно закону Дарси. Рассматриваемая задача является одномерной из-за накладываемых граничных условий, в результате которых деформирование пороупругой среды происходит только в вертикальном направлении.

Рассмотрим численную реализацию задачи консолидации с помощью Abaqus. Модульный принцип, заложенный в программном комплексе Abaqus, делает более удобным и наглядным моделирование и проведение вычислительных экспериментов.

В пакете Abaqus не используются одномерные элементы, поэтому в модуле Part строится двумерная область в виде прямоугольника с размерами  $a$ ,  $b$ .

В модуле Property, предназначенном для определения физических характеристик материала, задаются следующие параметры задачи: модуль Юнга  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , удельный вес поровой жидкости  $\gamma$ , проницаемость  $k$ . Следует отметить, что в Abaqus под проницаемостью понимается эффективная проницаемость, единица измерения которой такая же как у скорости. Понятие «эффективной проницаемости» совпадает с термином «коэффициент фильтрации». Некоторые авторы еще используют термин «гидравлическая проводимость». Поэтому при задании значения проницаемости в программном комплексе Abaqus необходимо переводить ее в соответствующие единицы измерения. Вместо пористости материала  $\phi$  задается значение коэф-

$$\text{фициента пустотности } e = \frac{\phi}{1 - \phi}.$$

В модуле Mesh происходит разбиение исследуемой области на конечные элементы. Программный комплекс Abaqus содержит большую библиотеку конечных элементов для разных типов анализа. Для решения рассматриваемой задачи выбирается 8-узловой прямоугольный конечный элемент CPE8P, предназначенный для моделирования напряженно-деформированного состояния пористой насыщенной среды.

В модуле Load задаются начальные и граничные условия. Нижняя граница области является неподвижной, компоненты вектора перемещения  $u_1$ ,  $u_2$  равны нулю. На боковых границах горизонтальная компонента вектора перемещения  $u_1$  равна нулю. На верхней границе в начальный момент времени задается прикладываемая нагрузка  $\sigma_0$ .

В модуле Step создаются шаги расчетов и определяются выходные данные по результатам. Для решения рассматриваемой задачи выбирается процедура «Soils, consolidation». Выбор временного шага осуществляется согласно критерию

$$\Delta t \geq \frac{\gamma}{6Ek} (\Delta h)^2,$$

где  $\Delta h$  – характерный размер конечного элемента.

Для запуска вычислительного процесса применяется модуль Job. Просмотр результатов расчета и обработка полученных данных происходит в модуле Visualization.

В связи с тем, что аналитическое решение одномерной задачи консолидации К. Терцаги известно [3], данную задачу обычно применяют для тестирования компьютерных программ, реализующих численные решения задач теории пороупругости (например, [4]).

Освоение моделирования численного решения в программном комплексе Abaqus на основе задачи консолидации К. Терцаги будет полезным для дальнейшего успешного применения данного программного комплекса в численных расчетах более сложных задач теории пороупругости

### **Библиографический список**

1. Terzaghi K. Soil mechanics in engineering practice. – John Wiley and Sons, 1996. – 592 p.
2. Нуштаев Д.В. Abaqus. Пособие для начинающих. Пошаговая инструкция. – М.: ООО «Тесис», 2010. – 78 с.
3. Coussy O. Poromechanics. – John Wiley and Sons, 2004. – 298 p.
4. Численное моделирование задач пороупругости / В.Е. Борисов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 81. – 36 с.

УДК 517.95 + 532.582

## Поведение прогибов ледового покрова в канале при больших временах

*К.А. Шишмарев*  
*АлтГУ, г. Барнаул*

В работе изучается нестационарное поведение ледового покрова в канале с вертикальными стенками. Прогиб льда вызван движением внешней нагрузки вдоль замороженного канала с постоянной скоростью. Эффект затухания волн, генерируемых движением нагрузки, в результате демпфирования не учитывается. Учет вязкости является важным для исследования прогибов льда, однако, вязкое демпфирование является не до конца изученным, и нет однозначного подхода к его моделированию. Модели ледового покрова без учета демпфирования являются менее физическими, однако, на основе этих моделей можно получить полезные на практике оценки для максимальных напряжений и прочность ледового покрова. Подобные оценки получены для движения нагрузки по неограниченному ледовому покрову. В данной работе предлагается метод определения прогибов ледового покрова и максимальных удлинений в ледовом покрове канала на основе асимптотического анализа получаемого решения рассматриваемой системы уравнений при больших временах.

Рассматриваются нестационарные гидроупругие волны, вызванные движением внешней нагрузки вдоль замороженного канала (см., например, [1]). Канал имеет прямоугольное сечение с конечными глубиной  $H$ ,  $-H < z < 0$ , и шириной  $2L$ ,  $-L < y < L$ . Вдоль стенок канал неограничен,  $-\infty < x < \infty$ . Канал наполнен невязкой и несжимаемой жидкостью с плотностью  $\rho_l$ . Поток течения жидкости, вызванный прогибом льда, потенциальный. Толщина льда  $h_i$  и плотность льда  $\rho_i$  считаются постоянными. Вертикальный прогиб ледового покрова  $w(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению тонкой упругой пластины с условиями жесткого защемления на стенках канала  $y = \pm L$ . Потенциал течения жидкости  $\varphi(x, y, z, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа, условиям непротекания на твердых стенках канала, и кинематическому и динамическому условиям на границе лед-жидкость. Внешняя нагрузка моделируется заданным гладким локализованным распределением давления.

Вопросы разрешимости совместной динамики льда и жидкости, исследовались, например в [2].

Рассмотренная начально-краевая задача решается с помощью преобразования Фурье вдоль канала. После этого, образ Фурье прогибов ледового покрова,  $w^F(\xi, y, t)$ , ищется в следующем виде

$$w^F(\xi, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi, t)\psi_n(\xi, y),$$

$$w^F(\xi, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, t)e^{-i\xi x} dx.$$

Здесь функции  $\psi_n(\xi, y)$  это моды колебаний ледового покрова в канале и  $a_n(\xi, t)$  – координаты этих мод. Функции  $\psi_n(k, y)$  были вычислены в [Korobkin et al. (2014)]. Они описывают гидроупругие волны, распространяющиеся вдоль канла [3]

$$w(x, y, t) = \text{Re}[A^n \psi_n(k, y)e^{i(kx - \omega_n t)}],$$

где  $\omega_n(k)$  – частота волны,  $k > 0$  – волновое число и  $A^n$  – амплитуда волны. Система дифференциальных уравнений для поиска  $a_n(\xi, t)$  выводится с помощью метода разделения переменных

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2(\xi) a_n = H_n(\xi) e^{-i\omega_n t},$$

$$H_n(\xi) = \frac{\int_{-L}^L P^F(\xi, y) \psi_n(\xi, y) dy}{\rho_l L \int_{-L}^L (\alpha \psi_n(\xi, y) + \varphi_n(\xi, y, 0)) \psi_n dy},$$

где  $P^F(\xi, y)$  – образ Фурье для заданного распределения внешнего давления,  $\alpha = (\rho_i h_i / \rho_l L)$  и  $\varphi_n(\xi, y, z)$  – потенциал течения жидкости, соответствующий моде  $\psi_n(\xi, y)$ . Последняя система дифференциальных уравнений решается аналитически для соответствующих начальных условий.

Прогиб ледового покрова  $w(x, y, t)$  определяется по формуле обратного преобразования Фурье, где

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_n(\xi, t) \psi_n(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^0 a_n(\xi, t) \psi_n(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi + \int_0^{\infty} a_n(\xi, t) \psi_n(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi =$$

$$= \int_0^{\infty} H_n \psi_n \left( \frac{\xi U}{2\omega_n^2} \left[ \frac{e^{i(\xi x + \omega_n t)}}{\omega_n + \xi U} - \frac{e^{i(\xi x - \omega_n t)}}{\omega_n - \xi U} + \frac{e^{-i(\xi x + \omega_n t)}}{\omega_n + \xi U} - \frac{e^{-i(\xi x - \omega_n t)}}{\omega_n - \xi U} \right] + \frac{\cos(\xi(x - Ut))}{2(\omega_n^2 - \xi^2 U^2)} \right) d\xi.$$

В зависимости от скорости движения нагрузки  $U$ , некоторые интегралы в последней формуле имеют особые точки  $\omega_n(\xi) = \xi U$ . Однако, сумма этих интегралов регулярна и последняя формула может быть записана как сумма пяти интегралов, которые понимаются в главном значении Коши. Если интеграл не имеет особых точек, тогда он регулярный и его вклад в формирование прогибов льда имеет порядок  $O(1/t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Асимптотический вклад нерегулярных интегралов при больших временах состоит из двух частей: (а) часть, которая является четной по  $X$  и затухает при  $|X| \rightarrow \infty$ , (б) гидроупругие волны, описанные выше, с амплитудами  $A^n$  распространяющиеся от нагрузки. Для этих волн,  $k = \xi_m^n$ ,  $m = 1, 2$ , где  $\xi_m^n$  решения уравнения  $\omega_n(\xi) = \xi U$ ,  $\xi_1^n < \xi_2^n$ , и амплитуды  $A_m^n$  определяются по формуле

$$A_m^n = \frac{2\pi H_n(\xi_m^n)}{\xi_m^n U (c_g^n(\xi_m^n) - U)},$$

где  $c_g^n$  – групповая скорость  $n$ -ой моды гидроупругой волны в канале. Фазовые скорости этих волн равны скорости движения нагрузки  $U$ . Эти волны не распространяются от нагрузки в подвижной системе координат. Длинные волны с  $\xi_1^n$  расположены позади нагрузки, и короткие волны с  $\xi_2^n$  перед нагрузкой.

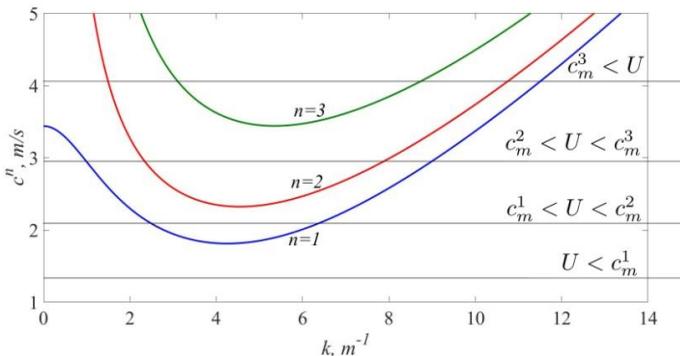


Рисунок 1 – Фазовые скорости для одной конфигурации канала и возможные случаи выбора скорости движения нагрузки

Вычисления проводились для одной конфигурации канала, а именно для параметров ледового бассейна в Приамурском государственном университете имени Шолом-Алейхема, где  $H = 1\text{ м}$ ,  $L = 1.5\text{ м}$ ,  $h_i = 3\text{ см}$ ,  $\rho_l = 1024\text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_i = 920\text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E = 4.2 \cdot 10^9\text{ Н/м}^2$ . Размер внешнего пятна давления равен 15 см.

### **Заключение**

Полученное точное разложение прогибов льда на симметричную часть, и части с длинными и короткими волнами позволяет оценить максимально возможные удлинения в ледовом покрове далеко впереди и позади нагрузки. При этом полученный профиль максимальных удлинений будет периодическим. В общем случае, для докритических скоростей ( $U > c_{\min}^1$ ), длинные волны распространяются позади, а короткие волны – впереди нагрузки. Фазовые скорости, в частности, значение  $c^1(0)$ , которое является конечным по сравнению с другими модами, сильно зависит от конфигурации канала и толщины льда. Возможно, что  $c^1(0) < c_{\min}^2$  и тогда будет наблюдаться картина только одной короткой волны впереди нагрузки для скорости нагрузки  $c^1(0) < U < c_{\min}^2$ .

*Работа посвящена памяти профессора кафедры дифференциальных уравнений Сергея Семеновича Кузикова.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.*

### **Библиографический список**

1. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. – 2016. – Т. 59. – С. 313–326.
2. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Т. 722. – № 1. – С. 012037.
3. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – № 1–1. – С. 55-59.

УДК 517.947

**Асимптотика решения второй начально-краевой задачи для системы Соболева**

**С.И. Янов***АлтГПУ, г. Барнаул*

Исследуется поведение решения второй начально-краевой задачи для системы Соболева [1, с. 3]:

$$\vec{V}_t - [\vec{V} \times \vec{\omega}] + \text{grad } P = 0$$

$$\text{div } \vec{V} = 0 \tag{1}$$

$$\vec{V}|_{t=0}=0, \quad P_z|_{z=0} = g(t, y'), \quad y' \in R^2, \quad \vec{\omega}=(0, 0, 1).$$

Ранее асимптотика решений различных задач для системы (1) исследовалась в работах С.Л. Соболева [1, с. 3], В.Н. Масленникова [2, с. 117], С.В. Успенского, Г.В. Демиденко [3, с. 199], С.В. Успенского, Е.Н. Васильевой [4, с. 221], [5, с. 274], [6, с. 311], С.И. Янова [6, с. 311].

Асимптотика решения второй краевой задачи для уравнения Соболева рассмотрена в работе [7, с. 45], где было доказано, что решение существует и единственно, а в работе [8, с. 26] получено, что  $P=O(1/t^{2/5})$  при  $t \rightarrow \infty$ , если

$$\int_0^t g(\tau, x') d\tau = O(1/t^{2+\alpha}), \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \alpha.$$

Настоящая работа обобщает этот результат на систему Соболева (1). Доказана следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $g(t, x') \in C_0^\infty(R^2)$  и финитна по времени  $\text{supp } g$  содержится в  $(t', t'')$ ,  $0 \leq t' < t''$ . Обозначим  $\vec{x}=(x, y, z)$ ,  $x'=(x, y)$ ,

$$C(f, x') = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{t'}^{t''} f(\tau, x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi) d\tau d\rho d\varphi.$$

Тогда имеют место асимптотические выражения при фиксированном  $z$  и  $t \rightarrow \infty$ .

$$V_1(t, \vec{x}) = -C(D_y g, x') + O(t^{-2/5}),$$

$$V_2(t, \vec{x}) = C(D_x g, x') + O(t^{-2/5}),$$

$$V_3(t, \vec{x}) = \int_{t'}^{t''} g(\tau, x') d\tau + O(t^{-1/3}),$$

$$P(t, \vec{x}) = C(g, x') + O(t^{-2/5}).$$

**Библиографический список**

1. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. –Т. 18, №1. – С. 3–50.
2. Масленникова В.Н. Оценки в  $L_p$  и асимптотика при  $t \rightarrow \infty$  решения задачи Коши для системы Соболева // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1968. –Т. 103. – С. 117–141.

3. Успенский С.В., Демиденко Г.В. О поведении на бесконечности решений одной задачи С.Л. Соболева // Сиб. мат. журн. – 1983. – Т. 24, №5. – С. 199–210.

4. Успенский С.В., Васильева Е.Н. О поведении на бесконечности решения одной задачи гидродинамики // Тр. МИАН. – 1990. – Т. 192. – С. 221–230.

5. Успенский С.В., Васильева Е.Н. Качественное исследование решения одной задачи С.Л. Соболева при  $t \rightarrow \infty$  // Тр. МИАН. – 1995. – Т. 210. – С. 274–283.

6. Успенский С.В., Васильева Е.Н., Янов С.И. О дифференциальных свойствах решения первой смешанной краевой задачи для системы Соболева // Тр. МИАН. – 1999. – Т. 227. – С. 311–319.

7. Янов С.И. Пространства типа Соболева-Винера и асимптотические свойства их функций. – Барнаул: Изд-во БГПУ. – 2007. – 113 с.

8. Янов С.И. Приложения пространств типа Соболева-Винера. – Барнаул: Изд-во АлтГПА. – 2012. – 91 с.

## **Секция 4. ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

### **УДК 004.5**

#### **Анализ юзабилити сайтов университетов Ханты-Мансийского округа – Югры**

***В.А. Баранчук**  
ЮГУ, г. Ханты-Мансийск*

В условиях нарастания информации в мире встаёт проблема её своевременной передачи и усвоения. Развитие информационных систем и, прежде всего, Интернета расширяет возможности информирования. Эти возможности, как показывает анализ, нередко опережают желания потребителей, что, в свою очередь, актуализирует у производителей и передатчиков информации поиск путей воздействия на потребителя. В этой связи ясность и простота для веб-страницы – как хорошее освещение для витрины магазина: при нём всё кажется лучше и значительней. Легко использовать сайт, который не принуждает задумываться о несущественном. Ненужные раздумья отнимают у нас силы, интерес и, конечно, время. Очевидно, что большинство людей тратит намного меньше времени на просмотр веб-страницы, чем хотелось бы разработчикам. Вместо чтения, потребитель бегло просматривает текст, как бы сканирует его, ища слова и выражения, которые привлекли бы его внимание. Исключение, конечно, составляют страницы, содержащие как новости, отчеты, описания товаров. Но даже в этом случае, если документ длиннее нескольких абзацев, существует вероятность, что пользователь пропустит эту информацию. Как показывают наблюдения, чтобы просмотр веб-страницы был эффективным, следует поражать пользователя с первого взгляда, с первой фразы. Достичь этого сложно, но можно. В данном исследовании речь идёт об Интернет-сайтах высших учебных заведений Ханты-Мансийского округа – Югры: Югорского государственного университета, Сургутского государственного педагогического университета, и Нижневартовского государственного университета.

Оценка сайтов включала, во-первых, оценку так называемых частных потребителей, то есть компетентных пользователей и, во-вторых, экспертную оценку. Оценка включала три направления: 1) внешний вид и дизайн; 2) структура и навигация по сайту; 3) внутреннее содержание сайта. Эти направления включали 13 вопросов-параметров, каждый из которых оценивался по 5-балльной

шкале, после чего был проведён подсчет среднего числа оценок по категориям и выведена итоговая оценка.

При этом следует оговориться, что и тем, и другим оценщикам были предложены определенные критерии, отобранные автором данной работы.

В ходе исследования было опрошено 20 человек с независимым мнением, и выдвинута экспертная оценка. Опрос проходил в виде электронной анкеты.

Как уже упоминалось, респондентам была предоставлена возможность ответить на 13 вопросов по 5-балльной шкале, после чего был осуществлён подсчет средних оценок по категориям и выведены итоговые оценки.

Первым критерием оценки сайта была скорость его загрузки. Скорость мы измерили онлайн-сервисом от Google, которая для ЮГУ составила 6 секунд, для СурГПУ – 2 секунды, для НВГУ – 9 секунд. Сайт СурГПУ оказался по загрузке более быстрым, что связано с малым количеством графического материала. Наиболее медленно загружался сайт НВГУ, что характеризуется загруженностью большими по размеру и по количеству картинок в слайдере. Сравнительная оценка юзабилити сайтов югорских вузов помещена в таблице 1.

Таблица 1 – Сравнительная оценка юзабилити сайтов югорских вузов

Наименование университета	Средняя оценка по категориям			
	Внешний вид и дизайн	Структура и навигация по сайту	Внутреннее содержание (контент) сайта	Итого
ЮГУ	4,8	4,9	4,9	4,8
СурГПУ	4,5	4,6	4,3	4,4
НВГУ	3,8	4,5	3,3	3,8

По внешнему виду и дизайну сайты получили следующие оценки: ЮГУ – 4,8, СурГПУ – 4,5, НВГУ – 3,8. Основной недостаток сайта СурГПУ – это излишняя пустота в ненужных местах. Основной недостаток сайта НВГУ это отсутствие единого стиля на главной странице, а при переходе на внутренние страницы сайта он и вовсе отсутствует.

По внутреннему содержанию сайты в целом получили хорошие оценки, информация структурирована для удобного использования, поиск по сайту предусмотрен, единственный недостаток мы обнару-

жили на сайте НВГУ, на нем очень трудно было найти контактную информацию с университетом.

Таким образом, сайт ЮГУ получил общую оценку 4,8 из 5 возможных баллов, сайт СурГПУ получил оценку 4,4, и наконец, сайт НВГУ – 3,8.

Итак, в качестве практических рекомендаций можно сказать, что каждому из анализируемых нами сайтов стоит поработать над повышением доступности информации для посетителей. Также мы предложили отдельные рекомендации по сайту НВГУ: 1) Привести все элементы сайта к единому стилю, а так же привести к общему виду все внутренние страницы сайта в соответствии с главной страницей. На слайдах мы видим, как выглядит главная страница, а так же страницы «Поступающему» и «Дополнительное образование».

Рекомендации по сайту СурГПУ: 1) Избавиться от необоснованно пустого места на сайте, например в горизонтальном меню мы видим что последняя кнопка переносится на вторую строку, исправить эту проблему можно путем уменьшения размера шрифта на несколько пунктов и уменьшения отступа между кнопками. В слайдере, который находится под меню, добавить краткое описание к каждому слайду, это значительно заполнит пустую область.

### **Библиографический список**

1. Стив Круг, «Не заставляйте меня думать!», ISBN 5\_93286\_099\_5.

## **УДК 519.23**

### **Ледж-коэффициент корреляции и его применение в задачах бинарной классификации**

***И.Ю. Бойко***

*АлтГУ, г. Барнаул*

Исследование взаимосвязи числового и бинарного признаков все чаще бывает необходимо в современных задачах медицины, когда из большого набора числовых данных требуется выделить признаки, наиболее связанные с бинарной меткой диагноза.

Ранее в работе [1] был введен ледж-коэффициент (англ. ledge – выступ) корреляции, предназначенный для оценки силы исследуемой взаимосвязи, который является предметом исследования. В статье [2] подробно изучено понятие оптимальных границ рассматриваемого числового признака, предложены и теоретически обоснованы алгоритмы по их нахождению, а также вычислению ледж-коэффициента. В работах [3, 4] представлен критерий проверки статистической значи-

мости полученного значения коэффициента, рассмотрены некоторые аспекты предобработки данных, необходимые для применения этих алгоритмов на практике. Стоит отметить, что исследования в этом направлении продолжаются.

Вышеуказанные алгоритмы и методы были реализованы мной на языке программирования Python в виде набора функций, что позволяет исследователю по имеющейся таблице числовых данных, а также столбцу меток диагноза проверить гипотезу о наличии рассматриваемой связи и, при ее наличии, определить наиболее значимые признаки.

Указанные выше методы были применены мной на практике в медицинской задаче бинарной классификации (подробно изложена в работе [5]), которая решается учеными противоракового центра АлтГУ в рамках анализа многомерных данных пептидных микрочипов. Моей задачей была проверка гипотезы о наличии изучаемой связи с целью обнаружения среди большого набора пептидов, выделенных при обработке сыворотки крови пациентов, таких из них, показатели светимости которых наиболее связаны с бинарной меткой диагноза. Обнаруженные признаки затем использовались для обучения модели бинарной классификации, основанной на методе проекции на латентные структуры. Данная модель была разработана и применялась ранее. Ознакомиться с ней, а также с необходимыми методами предобработки данных можно в уже цитированной работе [5].

Для исследования были собраны данные о 81 пациенте, материал каждого из испытуемых нанесен на два разных микрочипа. Таким образом, объем имеющихся данных составляет: 162 объекта, 330 034 числовых признака [5, с. 437]. Отбор значимых признаков и последующая классификация были выполнены с использованием перекрестной проверки типа «один против всех», т.е. на каждой  $i$ -й ее итерации тестовая выборка состоит только из данных об  $i$ -м пациенте. Помимо предложенного критерия проверки значимости значения ледж-коэффициента для выделения значимых признаков был применен  $U$ -критерий Манна-Уитни, который обычно используется в подобных случаях. Признаки отбирались с уровнем значимости 5%. Оба критерия признали значимыми порядка 10% от общего числа признаков. На рисунке ниже представлены результаты классификации, примененной как на всех данных, так и на отобранных значимых признаках.

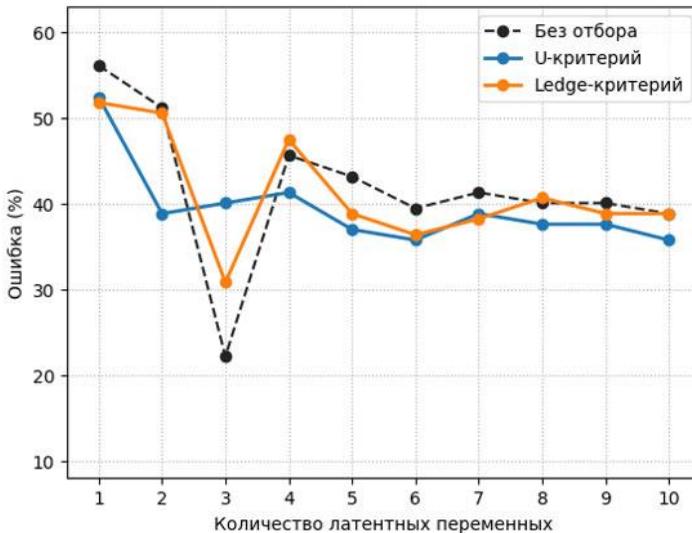


Рисунок 1 – Результаты бинарной классификации до и после отбора значимых признаков

Наилучшие результаты получены при проекции на 3 латентные структуры: ошибка классификации на всех признаках равнялась 22.2%, после отбора признаков Ledge-критерием ошибка составила 30.9%. Ошибка классификации после отбора U-критерием Манна-Уитни колеблется около 38% при различном количестве латентных структур.

### Библиографический список

1. Дронов С.В., Петухова Р.В. Один вид связи между номинальной и бинарной переменными // Известия АлтГУ. – 2010. – №1/2 (65). – С. 34–36.
2. Дронов С.В., Бойко И.Ю. Метод оценки степени связи бинарного и номинального показателей // ПДМ. – 2015. – №4(30). – С. 109–119.
3. Бойко И.Ю., Дронов С.В. Критические точки распределения ледж-коэффициента // Сборник трудов Всероссийской конференции по математике «МАК-2016», Барнаул, 29 июня – 1 июля 2016 г. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2016. – С. 13–15.
4. Бойко И.Ю. Применение ледж-коэффициента корреляции в медицинской задаче бинарной классификации // Избранные труды международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фунда-

ментальные проблемы науки и образования», Барнаул, 14–17 ноября 2017 г. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2017. – С. 211–215.

5. Анисимов Д.С., Подлесных С.В., Колосова Е.А., Щербаков Д.Н., Петрова В.Д., Джонстон С.А., Лазарев А.Ф., Оскорбин Н.М., Шаповал А.И., Рязанов М.А. Анализ многомерных данных пептидных микрочипов с использованием метода проекции на латентные структуры // Математическая биология и информатика. – 2017. – №2(25). – С. 435–445.

## УДК 519.6

### Об одном итерационном методе решения эллиптического уравнения

**Ж.Р. Жаксылыкова**

*ВКГУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан*

С помощью эллиптических уравнений исследуются важнейшие природные процессы. Простейшими примерами уравнения эллиптического типа являются уравнение Лапласа  $\Delta u(x) = 0$ , которое в двумер-

ном случае имеет вид  $\Delta u = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0$ , уравнение Пуассона

$-\Delta u = f(x)$ , где функция  $u$  имеет различный физический смысл, например: стационарное, независящее от времени, распределение температуры, скорость течения жидкости и т.п.

Рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x) \cdot u = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in D_1 \quad (1)$$

заданное в ограниченной области  $D_1$  с краевым условием

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial D_1. \quad (2)$$

Предположим, что коэффициенты и решение задачи (1), (2) достаточно гладки,  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ ,  $c(x) \geq 0$  и выполняется условие эллиптичности

$$\inf_{x \in D_1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \mu > 0. \quad (3)$$

Большой технологичностью при приближенном решении краевых задач в нерегулярных областях обладает метод фиктивных областей. Он основан на дополнении исходной расчетной области до некоторой

регулярной области, например, до прямоугольника в двумерных задачах, после которой задача решается разностными методами.

Для приближенного решения задачи (1), (2) в нерегулярной области применим метод фиктивных областей. Следуя общей идее метода, дополним исходную область  $D_1$  фиктивной областью  $D_2$  до параллелепипеда  $D$  и в расширенной области  $D$  рассмотрим вспомогательную задачу, где  $S$  общая часть границ  $D_1$  и  $D_2$ :

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right) + c^\varepsilon(x) \cdot u^\varepsilon = f^\varepsilon(x), \quad (4)$$

где

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = \begin{cases} a_{ij}(x), & x \in D_1, \\ 0, & x \in D_2, i \neq j, \\ \varepsilon^{-2}, & x \in D_2, i = j, \end{cases} \quad c^\varepsilon(x) = \begin{cases} c(x), & x \in D_1, \\ 0, & x \in D_2, \end{cases} \quad f^\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D_1, \\ 0, & x \in D_2. \end{cases}$$

Для уравнения (4) поставим краевую задачу

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial D. \quad (5)$$

$$\left[ u^\varepsilon(x) \right]_S = 0, \quad \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^\varepsilon(x) \cdot \cos(n, x_i) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right]_S = 0. \quad (6)$$

где  $n$  – нормаль к границе  $S$ ;  $[ \ ]_S$  обозначает скачек функции на поверхности  $S$ .

Дифференциальные свойства задачи (4) – (6) хорошо изучены в работах Коновалова А.Н., Копченова В.Д., Кузнецова Ю.А., Мацокина А.М., Смагулова Ш.С., Саульева В.К. [1].

Доказано, что решение  $u^\varepsilon(x)$  задачи (4)–(6) приближает решение  $u(x)$  задачи (1), (2) в  $W_2^1(D_1)$  с точностью  $\varepsilon$

$$\|u - u^\varepsilon\|_{W_2^1(D_1)} \leq C \cdot \varepsilon. \quad (7)$$

В дальнейшем будем предполагать, что область  $\bar{D} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n\}$  –  $n$ -мерный параллелепипед (при  $n = 2$  – прямоугольник) с границей  $\partial D$  на которой задано краевое условие первого рода

$$u^\varepsilon(x) \Big|_{\partial D} = \mu(x) \quad (8)$$

Требуется найти решение задачи Дирихле

$$Lu^\varepsilon = -f(x), x \in D, u^\varepsilon \Big|_{\partial D} = \mu(x) \quad (9)$$

непрерывное в  $\bar{D}$ .

В области  $\bar{D}$  строим сетку  $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ , где  $\omega_h$  – множество внутренних узлов,  $\gamma_h$  – множество граничных узлов. Вводится пространство  $H = \overset{0}{\Omega}$  сеточных функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю на  $\gamma_h$ .

В этом случае

$$Lu^\varepsilon = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (10)$$

$$C_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^\varepsilon(x) \xi_i \xi_j \leq C_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \quad (11)$$

Построим на  $\omega_h$  разностные операторы

$$\Lambda y = \sum_{i,j=1}^n \Lambda_{ij} y \quad (12)$$

и поставим задаче (9) в соответствие разностную задачу Дирихле

$$\Lambda y = -\phi(x), x \in \omega_h, y = \mu(x), x \in \gamma_h. \quad (13)$$

Введем операторы  $A$  и  $R$  в пространстве  $H = \overset{0}{\Omega}$ :

$$Ay = -\Lambda y, Ry = -\overset{0}{\Lambda} y = -\sum_{i=1}^n y_{x_i x_i}^-, \text{ где } \overset{0}{\Lambda} - \text{разностный } (2n+1) - \text{точеч-}$$

ный оператор Лапласа, и вместо (13) запишем  $Ay = \tilde{\varphi}$ , где  $\tilde{\varphi} \neq \varphi$  только в приграничных узлах.

В работе Самарского А.А. показано, что

$$C_1 R \leq A \leq C_2 R \quad (14)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные, входящее в условие эллиптичности (11).

Теперь приступаем к применению попеременно-треугольного метода (ПТМ). Итерационная схема метода имеет вид

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, k = 0, 1, \dots,$$

Построим матрицу  $B = (D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2)$ , в качестве  $D$  выбираем единичный оператор  $E$ , т.е.  $D = E$ . Разностные операторы  $R_1$  и  $R_2$  определяются следующим образом:

$$R_1 y = \sum_{i=1}^n \frac{y_{x_i}^-}{h_i} = \frac{y_{x_1}^-}{h_1} + \frac{y_{x_2}^-}{h_2} = \frac{y_{ij} - y_{i-1j}}{h_1^2} + \frac{y_{ij} - y_{ij-1}}{h_2^2};$$

$$R_2 y = -\sum_{i=1}^n \frac{y_{x_i}}{h_i} = -\frac{y_{x_1}}{h_1} - \frac{y_{x_2}}{h_2} = -\frac{y_{i+1j} - y_{ij}}{h_1^2} - \frac{y_{ij+1} - y_{ij}}{h_2^2}.$$

Легко можно показать что,  $R_1 y + R_2 y = -\Delta y$

$$\begin{aligned} R_1 y + R_2 y &= 2 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) y_{ij} - \frac{1}{h_1^2} y_{i-1j} - \frac{1}{h_2^2} y_{ij-1} - \frac{1}{h_1^2} y_{i+1j} - \frac{1}{h_2^2} y_{ij+1} = \\ &= -\frac{y_{i-1j} - 2y_{ij} + y_{i+1j}}{h_1^2} - \frac{y_{ij-1} - 2y_{ij} + y_{ij+1}}{h_2^2} = -\Lambda_1 y - \Lambda_2 y = -\Delta y. \end{aligned}$$

Необходимые для реализации ПТМ постоянные  $\delta$  и  $\Delta$  находятся по формулам

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{4}{h_i^2} \sin^2 \frac{\pi h_i}{2l_i}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{4}{h_i^2}. \quad (15)$$

Зная  $\delta, \Delta, C_1$  и  $C_2$  можно вычислить

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta \Delta}}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}, \quad \gamma_1 = \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\eta})}, \quad \gamma_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}$$

$$\gamma_1 = C_1 \gamma_1^0, \quad \gamma_2 = C_2 \gamma_2^0, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

$$\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \tau_k^* = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \cdot \delta_k^*}.$$

Для реализации метода была рассмотрена задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= 2 \left( x_1 - \frac{a}{4} \right) \left( x_1 - \frac{3a}{4} \right) + 2 \left( x_2 - \frac{b}{4} \right) \left( x_2 - \frac{3b}{4} \right), \\ u(x_1, x_2) \Big|_S &= 0. \end{aligned}$$

в прямоугольной области  $D$ .

$$\bar{D} = \{(x_1, x_2), 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b\},$$

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2), \frac{a}{4} \leq x_1 \leq \frac{3a}{4}, \frac{b}{4} \leq x_2 \leq \frac{3b}{4} \right\},$$

$$S = \left\{ (x_1, x_2), x_1 = \frac{a}{4}, x_1 = \frac{3a}{4}, \frac{b}{4} \leq x_2 \leq \frac{3b}{4}; x_2 = \frac{b}{4}, x_2 = \frac{3b}{4}, \frac{a}{4} \leq x_1 \leq \frac{3a}{4}; \right\}$$

Для решения исходной задачи построена вспомогательная задача метода фиктивных областей.

Результаты метода показали, что точное решение совпадает с приближенным решением.

### **Библиографический список**

1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 654 с.

## **УДК 004.415**

### **Разработка сервиса для структурирования и обработки метеорологических данных**

*А.В. Жариков, Д.В. Быканов, А.А. Бондарович, Е.В. Понькина*  
АлтГУ, г. Барнаул

Сбор наблюдений температурного режима приземного атмосферного воздуха и почв на примере условий сухостепной зоны Кулунды, полученные на гравитационной лизиметрической станции [1], является одним из важных этапов при решении задач в прикладных исследованиях.

При получении данных с метеорологических станций, приходится обрабатывать большие массивы данных в специализированных форматах. Обработка подобных данных является сложной технической задачей и очень часто не существует универсальных и специализированных программных средств для хранения и обработки данных.

Проведен обзор и анализ соответствующих информационных систем. Результат обзора показал низкую распространённость программных средств, что значительно затрудняет дальнейший анализ средств. На примере приложений «АСК»[2] и GeoMixer[3] выявлены основные недостатки и преимущества программных комплексов, что послужило для формирования основных требований разрабатываемой системы. В

качестве основного недостатка проанализированных систем является недостаточная совместимость с оборудованием метеостанций.

Для хранения и работы с данными была выбрана СУБД MySQL. База данных содержит три сущности: Hidromet, Stational, Lysimetric.

Таблица Hidromet необходима для хранения показателей, регистрируемых гидрометеостанцией. Список атрибутов таблицы Hidromet: No» – номер точки; «hPado» – атмосферное давление; «Time» – время измерения; «mmcharp» – количество атмосферных осадков в капельном виде; «mm» – количество атмосферных осадков в капельном виде; «WmI» – интенсивность солнечной радиации; «deg» – направление ветра; «HKBat» – напряжение батареи питания; «msdo» – скорость ветра; «HKTemp» – температура батареи питания; «Cdo» – температура воздуха; «HLrH» – доля свободной памяти логгера; «Prdo» – относительная влажность воздуха.

Таблица Stational предназначена для хранения показателей, регистрируемых стационарными станциями измерения влажности почв. Атрибуты таблицы Stational: «Time» – время измерения; «CSixtyF» – температура на глубине 60 см; «CThirdty» – температура на глубине 30 см; «pFdoSixty» – потенциал почвенной влаги на глубине 60 см; «procdoThirdty» – объемная влажность почвы на глубине 30 см; «CHThirdty» – температура на глубине 130 см; «SmdoThirdty» – проводимость на глубине 30 см; «doHThirdty» – объемная влажность почвы на глубине 130 см; «CThirdtyF» – температура на глубине 30 см; «SmdoHThirdty» – проводимость на глубине 130 см; «pFdoThirdty» – потенциал почвенной влаги на глубине 30 см; «CHThirdtyF» – температура на глубине 130 см; «CSixty» – температура на глубине 60 см; «pFdoHThirdty» – потенциал почвенной влаги на глубине 130 см; «procdoSixty» – объемная влажность почвы на глубине 60 см; «HKBatV» – напряжение батареи питания; «SmdoSixty» – проводимость на глубине 60 см; «HKTempC» – температура батареи питания; «HKrH» – доля свободной памяти логгера.

Таблица Lysimetric хранит показатели, регистрируемых почвенной лизиметрической станцией. Множество атрибутов Lysimetric: «Date», «Time», «Tens30.1», «Tens30.1max», «Tens30.1min», «Tens30.2», «Tens30.2max», «Tens30.2min», «Vacuum30», «Vacuum30max», «Vacuum30min», «Tens50.1», «Tens50.1max», «Tens50.1min», «Tens50.2», «Tens50.2max», «Tens50.2min», «Vacuum50», «Vacuum50max», «Vacuum50min», «Tens120.1», «Tens120.1max», «Tens120.1min», «Tens120.2», «Tens120.2max», «Tens120.2min», «Vacuum120», «Vacuum120max», «Vacuum120min», «Accu», «Accumax», «Accumin», «UMP30.1», «UMP30.2», «UMP50.1», «UMP50.2», «UMP120.1»,

«UMP120.2», «EC30.1», «EC30.2», «EC50.1», «EC50.2», «EC120.1», «EC120.2», «Temp30.1», «Temp30.2», «Temp50.1», «Temp50.2», «Temp120.1», «Temp120.2», «Weight1», «Weight2», «Drain1», «Drain1max», «Drain1min», «Drain2», «Drain2max», «Drain2min».

Для обеспечения доступа к базе данных разработано web-приложение с графическим интерфейсом, в котором реализованы следующие функции:

- 1) распределение привилегий и режима доступа к данным;
- 2) возможность поискового запроса к базе данных, с учетом выбранных пользователем параметров;
- 3) визуализация данных в виде графиков и гистограмм, в том числе возможность визуализации пользовательского поискового запроса;
- 4) импорт данных в базу данных из первичных файлов, т.е. запись в базу должна осуществляться посредством импорта из файла формата \*.csv, импорт данных будет может осуществляться с любой периодичностью;
- 5) экспорта данных из базы данных в файл формата \*.xls или \*.csv;
- 6) возможность записи диаграмм в файл изображения.

Таким образом, разработано web-приложения для хранения и последующей обработки данных наблюдений температурного режима воздуха и почв на примере условий сухостепной зоны Кулунды, полученных лизиметрической станцией.

### **Библиографический список**

1. Беляев В.И., Грунвальд Л., Май-нель Т., Шмидт Г., Бондарович А.А., Щербинин В.В., Понькина Е.В., Мацюра А.В., Штефан Э., Иллигер П., Кожанов Н.А., Рудев Н.В. Водный режим почвы и урожайность сельскохозяйственных культур при различных технологиях возделывания в Ку-лундинской степи Алтайского края // Вкник Дыпропетровського університету. Бюлопя. Еколопя. — 2016. — Т. 24. — № 2.

2. Центр сбора метеоданных «АСК» руководство пользователя [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.hydro-meteo.ru/doc/Ack.pdf>, свободный.

3. GeoMixer [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.scanex.ru/software/web-gis/geomixer/>, свободный.

## УДК 681.3

**Защита программного обеспечения от нелегального использования с помощью сетей Петри***И.А. Кочаровский, А.Н. Гамова**Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского,  
г. Саратов*

С использованием нелегального программного обеспечения можно бороться различными методами: юридическими, экономическими и, наконец, некоторые производители прибегают к защите программного обеспечения от взлома и нелегального копирования, что выдвигает на первый план задачу создания эффективной системы защиты программного продукта. Математический аппарат сетей Петри дает возможность построения ключей для защиты программного продукта.

Сеть Петри представляет собой двудольный ориентированный граф, состоящий из позиций, переходов, а также дуг, связывающих позиции с переходами и наоборот. В позициях могут быть размещены метки, которые перемещаются по сети. Сами же метки нужны для работы сети Петри, которая происходит посредством запуска переходов.

Сеть Петри, имеющая в своих позициях метки, называется маркированной сетью Петри. Переход разрешен тогда и только тогда, когда каждая его входная позиция имеет число меток, по крайней мере, равное числу исходящих дуг из данной позиции в переход. Запуск перехода заключается в удалении меток из его входных позиций и образовании новых меток в его выходных позициях.

В работе будут рассматриваться маркированные сети Петри с приоритетами. В таких сетях переходам будут задаваться приоритеты, означающие, что если могут одновременно выполняться несколько переходов, то запустится переход с наивысшим приоритетом.

Для реализации системы защиты программного обеспечения от нелегального использования с помощью сетей Петри разработаем пример сети Петри с 4-битовым входом. В приведенной ниже сети Петри решающий переход  $t_2$  будет выполнен тогда и только тогда, когда начальная маркировка помечает позиции  $p_0, \dots, p_3$  следующим образом:  $p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 1$ . Нарушение начальной маркировки хотя бы в одной из позиций приведет к недостижимости решающего перехода. Рассмотрим работу сети Петри, представленную на рисунке 1.

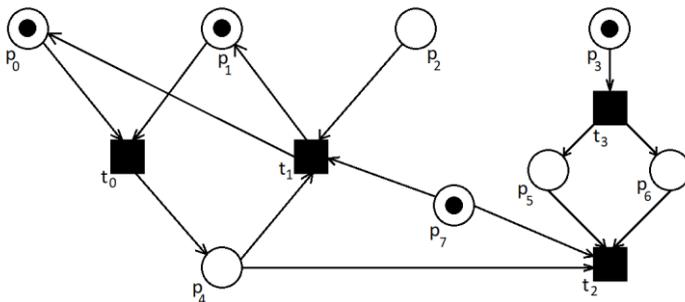


Рисунок 1 – Сеть Петри, кодирующая двоичное число 1101

Данная сеть Петри может быть использована тогда, когда, например, пользователю необходимо зарегистрировать программный продукт, посредством ввода 4-битного ключа. В этом случае позициями для начальной маркировки, куда будет записываться ключ, являются  $p_0, \dots, p_3$ . Отметим, что позиция  $p_7$  всегда имеет одну метку, а остальные позиции при начальной маркировке не имеют меток. Решающим является переход  $t_2$ , то есть программа будет считаться зарегистрированной, если переход  $t_2$  сработает. Зададим решающему переходу  $t_2$  приоритет ниже, чем переходу  $t_1$ . Это означает, что если одновременно разрешены переходы  $t_1$  и  $t_2$ , то сработает переход  $t_1$ .

Исследовав сеть Петри, представленную на рисунке 1, легко заметить, что для того, чтобы найти правильный ключ необходимо перебрать всего лишь 16 значений. Это можно сделать даже вручную.

На сегодняшний день, использование ключей, длина которых меньше 256 бит, является недостаточным для обеспечения защиты. Следовательно, предложенная на рисунке 1 сеть Петри не годится для использования на практике. Чтобы увеличить длину ключа при использовании сетей Петри, приведенную на рисунке 1 сеть Петри можно наращивать. Под этим понимается следующее: к каждой позиции, которую можно пометить при начальной маркировке, присоединяется новая сеть. При этом позиция теряет возможность быть помеченной при начальной маркировке, однако, появляются новые позиции, которые доступны для начальной маркировки. Например, нарастим сеть над позицией  $p_0$ . Для этого достаточно просто копировать уже имеющуюся сеть. На рисунке 2 представлена сеть Петри, полученная после наращивания уже имеющейся сети.

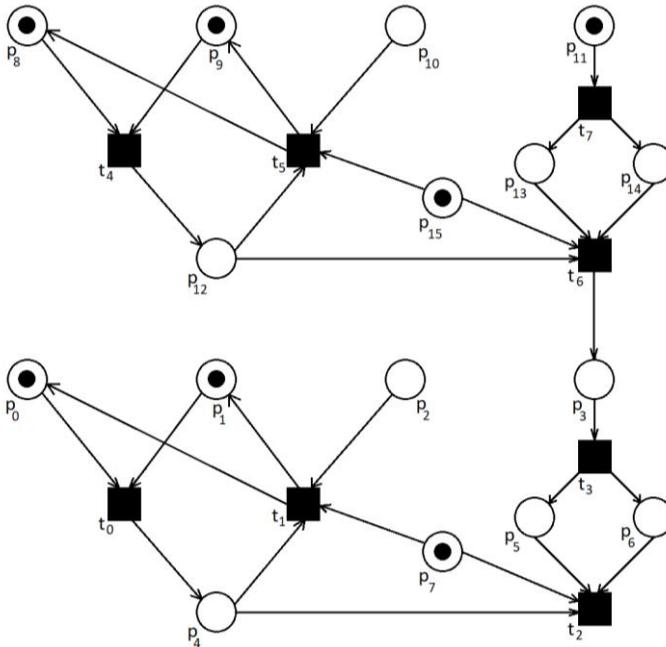


Рисунок 2 – Пример наращивания сети Петри над позицией  $p_0$

При этом переход  $t_2$  остается решающим, и появляются новые позиции  $p_8, \dots, p_{11}$ , которые можно пометить при начальной маркировке. Легко видеть, что переход  $t_6$  фактически выполняет ту же роль, что и переход  $t_2$  в нижней части сети. Очевидно, что для срабатывания перехода  $t_2$  необходимо срабатывание перехода  $t_6$ , а для этого начальной маркировкой необходимо пометить позиции следующим образом:  $p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = 0, p_8 = 1, p_9 = 1, p_{10} = 0, p_{11} = 1$ . Длина ключа увеличилась до 7 бит. Теперь для полного перебора необходимо осуществить уже 128 проверок. Надстроив сеть аналогичным образом над позициями  $p_0, p_1$  и  $p_2$ , легко получить ключ длиной 16 бит, для полного перебора необходимо рассмотреть  $2^{16}$  комбинаций, чего также не достаточно. В общем случае размер ключа легко нарастить до 128 бит, в этом случае вопрос о переборе  $2^{128}$  значений потеряет свою актуальность. При дальнейшем наращивании длина ключа достигнет 256 бит, что можно считать достаточным для надежной защиты.

Логично выяснить, будут ли сети, настроенные над позициями  $p_0, \dots, p_3$  одинаковыми. Проще всего, ответить на этот вопрос, исследуя сеть для 16-битного ключа. В этом случае единственная позиция,

которая не поддается наращиванию по аналогии с позицией  $p_0$  – это позиция  $p_2$ . Это очевидно, так как для достижимости решающего перехода  $t_2$  необходимо, чтобы позиция  $p_0$  была пуста. Если нарастить над ней копию уже имеющейся сети, то ее нулевое значение достижимо при 15 различных комбинациях. Это означает, что диапазон возможных ключей сужается. Поэтому для позиции  $p_2$  следует изменить надстроенную сеть. Одним из вариантов может явиться наращивание, представленное на рисунке 3.

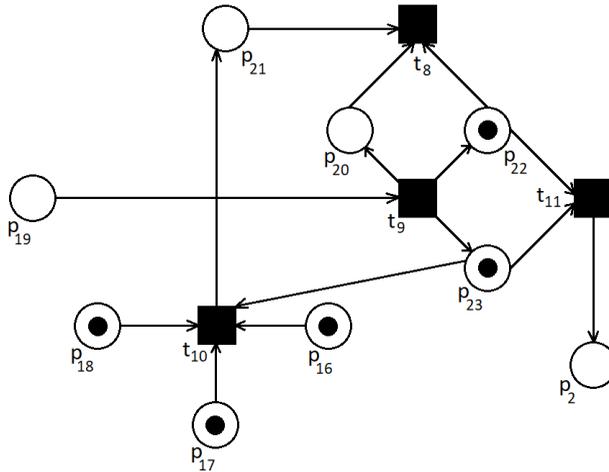


Рисунок 3 – Наращивание сети Петри над позицией  $p_2$

Здесь для того, чтобы переход  $t_{11}$  не сработал, а это именно то, чего нам нужно добиться, необходимо назначить ему наименьший приоритет, а начальной маркировкой задать значения:  $p_{16} = 1$ ,  $p_{17} = 1$ ,  $p_{18} = 1$ ,  $p_{19} = 0$ .

Итак, в общем случае для рассмотренной сети Петри исходная маркировка содержит ключ в позициях  $p_0, \dots, p_{k-1}$ , где  $k$  – длина ключа. Одна или несколько входных позиций гарантированно содержат метки при начальной маркировке. После того, как будет введен правильный ключ, сеть Петри выполнится несколько раз до достижения ключевого перехода. При этом маркировка сети Петри изменится. Если введен неверный ключ, то решающий переход не будет достигнут.

## УДК 519.6

### **Анализ методов машинного обучения для решения задач медицинского профиля**

*Д.П. Налимов*  
*АлтГУ, Барнаул*

Методы машинного обучения применяются в разнообразных областях знаний: психология, генетика, экономика, геология, геофизика и др. В частности, важным и актуальным является их приложение к медицинским задачам. Спектр задач очень разнороден: диагностика заболеваний и состояния пациента, создание индивидуальной терапии, проверка эффективности препарата и т.д. [1].

В данном исследовании использовалась база данных выписок пациентов детского возраста с различными заболеваниями мочеполовой системы Алтайской краевой клинической детской больницы в период с 2010 по 2017 гг. формата \*.docx.

Были решены проблемы некорректного представления данных в выписках пациентов и была написана программа, извлекающая необходимую информацию в полуавтоматическом режиме. Заболевания мочеполовой системы имеют свои особенности, поэтому в соответствии с рекомендациями врача были выбраны 33 признака для извлечения и использования в методах машинного обучения, а также 3 диагноза: пиелонефрит, гломерулонефрит и тубулоинтерстициальный нефрит. Размер базы данных составил 2881 пациент.

Целью работы являлся анализ методов машинного обучения для повышения точности и сокращения времени диагностики заболеваний мочеполовой системы у детей.

Анализ проводился на языке программирования python с использованием библиотек Scikit-Learn, NumPy, SciPy, Matplotlib и Pandas [2].

Предварительный анализ данных показал, что распределение заболеваний пациентов имеет дисбаланс, присутствует большое количество пропущенных значений и показателей с коэффициентом вариации близким к нулю. Первую проблему решает сбалансированная метрика качества Matthews correlation coefficient (MCC) [3]. Вторую проблему пытается решить метод заполнения пропусков на основе K ближайших соседей, а третью – метод рекурсивного отбора признаков на базе результата работы соответствующей модели.

После предварительного анализа были применены различные методы машинного обучения: дерево решений (DT), случайный лес (RF), градиентный бустинг (GB), логистическая регрессия (LR), метод K

ближайших соседей (KNN) и многослойный перцептрон (MLP). Результаты их работы были сравнены между собой, а с целью попытки повышения качества были применены: метод рекурсивного отбора признаков на базе результатов работы каждой модели и заполнение пропусков с помощью метода К ближайших соседей.

В таблице 1 указано качество классификации на валидационном наборе данных:

- (1) – без отбора признаков, без заполнения пропусков;
- (2) – с отбором признаков, без заполнения пропусков;
- (3) – без отбора признаков, с заполнением пропусков;
- (4) – с отбором признаков, с заполнением пропусков.

Таблица 1 – Качество классификации

	DT	RF	GB	LR	KNN	MLP
(1)	0.433	0.548	<b>0.591</b>	0.472	0.408	0.503
(2)	0.385	0.532	<b>0.584</b>	0.533	0.429	0.530
(3)	0.330	0.542	<b>0.545</b>	0.438	0.369	0.448
(4)	0.314	0.540	<b>0.547</b>	0.421	0.427	0.458

В итоге градиентный бустинг дал лучшее качество по сравнению с остальными методами. Метрика качества MCC, рассчитанная на результатах его работы, составила: 0.591 без применения методов заполнения пропусков и отбора признаков, 0.584 без заполнения пропусков и с отбором признаков, 0.545 с заполненными пропусками и без отбора признаков, 0.547 с применением методов заполнения пропусков и отбора признаков.

В ходе исследования значительно повысить качество методов с помощью отбора информативных признаков не удалось, а рассмотренный метод заполнения пропусков в худшую сторону повлиял на результат работы классификации, что говорит о его неприменимости к используемой базе данных пациентов.

### Библиографический список

1. Флах П. Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных / пер. с англ. А.А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2015. – 400 с.
2. Documentation of scikit-learn 0.19.1 [Электронный ресурс]. –URL: <http://scikit-learn.org/stable/documentation.html>.

3. Boughorbel S. Optimal classifier for imbalanced data using Matthews Correlation Coefficient metric / S. Boughorbel, F. Jarray, M. El-Anbari // PLoS ONE 12(6). – 2017. – 17 p.

## УДК 519.16

### К вопросу о реализации динамических лабиринтов

*Н.В. Павлова, В.В. Смирнов, Т.М. Тушкина*

*БТИ (филиал) АлтГТУ, г. Бийск*

В настоящее время возрастает роль математических методов исследования многих направлений прикладных инженерных наук, в частности, материаловедения [1]. Становится актуальной разработка моделей структур материалов со сложными и ценными физическими и технологическими свойствами. В данной работе в общем виде формулируется задача о поведении некоторой твёрдой частицы в активной многофазной среде. Последняя представляет собой реализацию динамического лабиринта [2]. Одна из фаз среды лабиринта может образовывать непроницаемую для частицы стенку. Также непроницаемыми являются боковые стороны лабиринта.

Частица имеет возможность перемещаться в свободном пространстве случайным образом со скоростью  $n$  шагов в единицу времени. При этом лабиринт изменяется на каждом  $k$ -ом шаге. В исходных данных присутствует информация о концентрации непроницаемой фазы. Эта концентрация является искомым параметром, определяющим возможность выхода частицы из лабиринта за конечное число шагов [3].

Лабиринт генерируется на двумерной квадратной решетке, каждая ячейка которой может быть либо занята с вероятностью  $0 \leq p \leq 1$ , либо свободна с вероятностью  $(1 - p)$ . Множество занятых ячеек, связанных с ближайшими соседними занятыми ячейками кратчайшим расстоянием, образуют кластеры. Кластер в данном случае будет иметь характер случайного фрактального образования.

Разработана алгоритмическая процедура, которая создаёт матрицу  $n \times n$  прямоугольников, каждый из которых частью стенки (закрашивается) только в случае, если сгенерированное для него случайное число  $p$  превышает некоторое заданное значение [4].

На рисунке 1 показан результат обращения к разработанной процедуре, реализованный на языке компьютерной математики Maple при  $n = 25$  и  $s = 0,515$ .

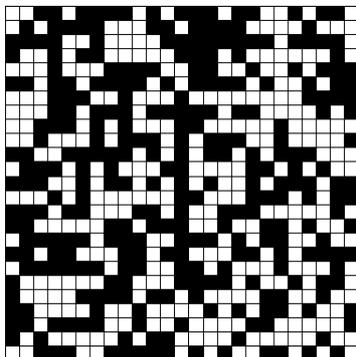


Рисунок 1 – Результат обращение к процедуре создания случайного лабиринта

Несколько видоизменив вышеуказанную процедуру, а именно, связав вероятность  $p$  с плотностью среды, как с функцией, подчиняющейся заданному закону статистического распределения, можно говорить о фрактальной структуре, моделирующей неоднородный материал с соответствующими физическими характеристиками. Результат выполнения модернизированной соответствующей процедуры показан на рисунке 2; здесь интенсивность окраски ячейки соответствует значению функции плотности.

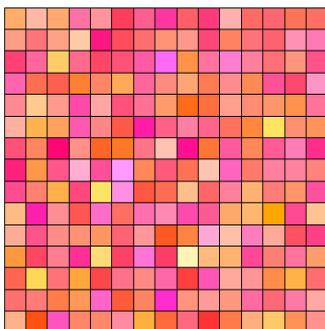


Рисунок 2– Модель неоднородной среды со статистически определяемой функций физической плотности

Разнообразие свойств и структуры современных материалов позволяет предположить, что подобные модели будут в дальнейшем широко востребованы.

### Библиографический список

1. Лорд Э.Э., Маккей А.Л., Ранганатан С. Новая геометрия для новых материалов / под ред. В.Я. Шевченко, В.Е. Дмитриенко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 264 с.
2. Тушкина Т.М., Павлова Н.В. Генерация лабиринта с заданными позициями входа и выходов // МАК: «Математики – Алтайскому краю» : сборник трудов всероссийской конференции по математике, Барнаул, 29 июня – 1 июля 2016 г. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2016. – С. 112–113.
3. Тушкина Т.М., Павлова Н.В. Вычисление вероятности выхода из лабиринта с заданными начальными и конечными точками // МАК: «Математики – Алтайскому краю» : сборник трудов всероссийской конференции по математике, Барнаул, 29 июня – 1 июля 2017 г. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. – С. 281–282.
4. Смирнов В.В., Спиридонов Ф.Ф. Моделирование фракталов в Maple. – Бийск: Изд-во АлтГТУ, 2006. – 91 с.

### УДК 519.6

#### Анализ проблематики тематического моделирования

*О.Н. Половикова, Н.С. Бабкина, Л.Л. Смолякова*  
АлтГУ, г. Барнаул

*Ключевые слова:* автоматизированная обработка текст, тематическое моделирование, методы PLSA и LDA

Неотъемлемым звеном современного развития информационного общества являются исследования по созданию систем автоматизированной обработки текстов на естественном языке. Непрерывный рост объема информации, который нужно просмотреть, отобрать, проанализировать субъекту (человеку) заставляет использовать системы автоматической (или полуавтоматической) классификации, фильтрации, аннотирования, экспертной оценки и анализа обработки текстов. Несмотря на существование множество зарекомендовавших себя на практике подходов и методов по обработки текстовых документов [1–3], данное направление исследования является актуальным. Актуальность поддерживается развитием требований по функционалу, новыми целями, которые ставит современная ситуация перед автоматизированными системами обработки текстов. А также в силу неразрешенности ряда вопросов и задач по данной проблематике.

Одними из решаемых задач в области автоматизированной обработки текстов на естественном языке (ЕЯ) является задачи, связанные с выделением тематик для текстовых документов в коллекции. И, в частности, перспективная и малоизученная задача построения тематических деревьев. Тематическое моделирование (и в частности, иерархическое тематическое моделирование) выросло на исследованиях по классификации текстовых ресурсов. Поэтому базовые идеи реализации методов и алгоритмов классификации текстов заложили методологическую основу инструментария для определения тематик коллекций документов. Также актуальными остались недостатки и проблемы реализации применяемых методов и их адаптации к конкретным практическим задачам.

Основными современными методами тематического моделирования являются [4, 5]:

1) вероятностный латентный семантический анализ (Probabilistic Latent Semantic Analysis, PLSA), который реализуется итерационным EM-алгоритмом;

2) латентное размещение Дирихле (Latent Dirichlet allocation, LDA) является развитием метода PLSA. Данный подход учитывает дополнительные предположения относительно строящейся модели, что позволяет не перестраивать заново всю модель при добавлении нового документа в коллекцию, а также избежать переобучения модели (недостатки PLSA).

В данном исследовании приведен анализ некоторых основных проблем методов автоматизированного построения тематик текстов, а также способы или возможные направления их решения. Проблемную область можно условно разделить на три направления:

1. Технические проблемы, связанные с ресурсными ограничениями.

Прямая реализация алгоритмов (метода PLSA и LDA) может привести к высокой размерности пространства параметров. Данная проблематика изучена и решается методами машинного обучения путем отбора значимых признаков для пространства параметров, формированием новых признаков путем трансформации первоначальных, а также использованием регуляторов. Проблема сложных и ресурсоемких затрат вероятностных моделей на каждом итерационном шаге может частично разрешаться методами сэмплирования. Сэмплирование является одним из основных инструментов приближённого вывода в сложных вычислительных моделях.

2. Лингвистическая специфика интерпретаций терминов ЕЯ:

– неоднозначность интерпретации слов ЕЯ (синонимы, антонимы);

– изменение слов по грамматическим категориям (разные окончания), присутствие в тексте неинформативных единиц (предлогов, союзов и т.д.),

– присутствие в тексте слов, которые отвечают за индивидуальность документа (шум) и за особенность коллекции (фон), а не за его тематику [6].

Данный класс проблем решается на этапе предобработки текстовой коллекции. Основным методом предобработки является нормализация данных (лемматизация, стёмминг, отбрасывание *stop-слов*). Для замены антонимов и синонимов используются специальные словари по предметной области. Учет специальных слов, которые не относятся к тематике документов, может быть реализован на основе робастных тематических моделей, в которые добавляется шумовая и фоновая составляющие.

3. Вопросы обоснования применимости того или иного метода или алгоритма, а также интерпретация результатов их работы на коллекциях.

Вопросы обоснования метода и интерпретации его результатов остаются открытыми. Частично задача повышения интерпретируемости тематической модели может быть решена путем подбора специальных регуляторов в качестве ограничителей на множество допустимых решений. А также используя комбинированных критериев проверки достоверности построенной модели [5].

Проведенное исследование выявило проблемную область тематического моделирования, несмотря на весомое количество работ в данном направлении и огромное количество построенных моделей.

### **Библиографический список**

1. Автоматическая обработка естественного языка: учебное пособие / Луканин А.В. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. – 2011.

2. Автоматическая обработка текстов на естественном языке и компьютерная лингвистика : учеб. пособие / Большакова Е.И., Клышинский Э.С., Ландэ Д.В., Носков А.А., Пескова О.В., Ягунова Е.В. – М.: МИЭМ. – 2011.

3. Лушев А.А., Половикова О.Н. Формальная и контекстная проверка текстовых документов // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. – 2016. – №2. – С. 36–38.

4. Воронцов К. В. Вероятностное тематическое моделирование [Электронный ресурс]. URL: [www.machinelearning.ru/wiki/images/2/22/Voron-2013-ptm.pdf](http://www.machinelearning.ru/wiki/images/2/22/Voron-2013-ptm.pdf).

5. Воронцов К. В., Потапенко А. А. Многокритериальная регуляризация вероятностных тематических моделей для улучшения интерпретируемости тем и определения числа тем // Диалог–2014.

6. Chemudugunta C., Smyth P., Steyvers M. Modeling general and specific aspects of documents with a probabilistic topic model // Advances in Neural Information Processing Systems. — MIT Press, 2006. — Vol. 19. — P. 241–248.

## УДК 004.738.5

### Возможности логического языка для решения задач на основе программной генерации фактов

*О.Н. Половикова*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Возможности логического языка для решения задач на основе генерации процедуры правил

Логические языки нашли широкое применение во многих прикладных областях, в том числе и для решения специфических задач, где требуется применять узко настраиваемые модели знаний и аппарат получения новых знаний. Среди логических языков особое место занимает язык Пролог (Акторный пролог, Visual Prolog и др. среды), как широко используемый инструмент декларативного логического программирования. Такая применимость обусловлена поддержкой, помимо логического программирования, объектно-ориентированной парадигмы, программирования, управляемое шаблонами.

Программирование на языке логики, во-первых, привлекает к процессу разработки не только программистов и инженеров знаний, но и других специалистов с различными научными интересами, например, математиков. Во-вторых, определяет одно из перспективных направлений использования Пролог-систем – в качестве аппарата для решения логических задач. **В работе анализируется один из подходов построения новых элементов базы знаний – генерацию состояний.** Динамическое формирование множества возможных состояний объекта и способов его поведения позволяет выполнить поиск решения задачи в тех случаях, когда либо все дерево состояний хранить нецелесообразно исходя из специфики решения, либо предварительное построение и хранение такого дерева может привести к комбинаторному взрыву.

Кроме этого этап динамической генерации состояний будет ключевым в решении тех задачах, где пользователь программы управляет

ходом решения, выбор программой соответствующей ветви решения, зависит от цепочки ходов пользователя. Т.е. заранее неизвестны знания, на основе которых будет выстраиваться целевое построение. Программа в этом случае хранит знания о способах получения множества состояний в виде совокупности правил (процедуры правил), а также знания об одном или нескольких начальных или переходных состояниях объекта или его поведения. При этом совокупность регламентирующих правил для перехода из одного состояния в другое может явно отсутствовать в постановке задачи, в этом случае этапе проектирования базы знаний программы их следует вывести и формализовать, либо получить знания о правилах динамической генерации самих правил. Поскольку можно построить и реализовать обобщенную модель знаний о знаниях предметной области решаемой задачи, то существует возможность динамического построения или генерации не только множества состояний по заранее сформированным правилам, но также и генерации самих правил по которым будут строиться совокупность состояний.

Следующим шагом рассмотрим основную концепцию (без демонстрации кода) построения **решения с генерацией фактов для базы знаний программы**.

Процесс генерации новых состояний можно связать с обучением программы, с динамическим формированием базы знаний. В основе лежит возможности программных сред для добавления фактов и правил к уже имеющимся, которые были получены в качестве результатов работы программы либо её этапов. В данном случае, генерирующим правилом является вся программа.

Продемонстрировать работу механизма генерации фактов с целью обучения программы можно на примерах элементарных вычислительных задач: поиск факториала или чисел Фибоначчи.

Процедура правил и фактов для вычисления чисел Фибоначчи основана на рекурсивном вызове данных процедур и декларируется базовыми средствами Пролог-системы. Полученное программой очередное число Фибоначчи добавляется в начало базы знаний в виде факта. При последующем запуске программы поиск решения осуществляет среди построенных фактов, если соответствующий факт не найден, тогда срабатывает рекурсивное правило. Если сработало правило, то поиск фактов (а затем и правила) выполняется с меньшим числовым значением параметра и новый построенный факт опять добавляется в начало базы знаний. Так как количество рекурсивных вычислений с каждым запуском программы сокращается, происходит экономия сте-

ковой памяти, которая используется для передачи значений переменных в рекурсивном вызове процедур правил.

Сохранение для последующего использования сгенерированных программой фактов требует привлечения дополнительных ресурсов памяти, но позволяет сократить время рекурсивного вычисления. Анализ апробированных на практике примеров решения с генерацией состояний и базы знаний, позволяет говорить об эффективности данного подхода за счет сокращения времени рекурсивного вычисления (сокращается вложенность рекурсии), а также сокращения памяти стека необходимого для работы программы.

Генерация фактов для вычислительного процесса демонстрирует подход построения решения, хотя решение вычислительных задач не является основной областью применения логических языков. Добавлять в базу знаний можно построенные на ходу факты, решая другие задачи, поиск решения которых можно задекларировать логическим языком.

### **Библиографический список**

1. Цуканова Н.И., Дмитриева Т.А. Логическое программирование на языке Visual Prolog. – Горячая Линия – Телеком, 2008. – 144 с.
2. Половикова О.Н. Формализация процесса построения решения с использованием списков для класса логических задач в программах на языке Пролог // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2011. – №1/1 (69). – С. 117–120.

**УДК 681.3.08+519.2**

## **Программные и комбинаторные методы анализа случайных изображений**

***А.Л. Резник, А.А. Соловьев, А.В. Торгов**  
ИАиЭ СО РАН, Россия, г. Новосибирск*

**Введение.** Для решения многих задач распознавания образов и анализа изображений требуется знание априорной вероятности того, что в процессе генерации случайного поля, формируемого малоразмерными (в идеале – точечными) сигнальными источниками, не будет образовано ни одного локального сгущения. Под локальным сгущением в данном случае понимается компактный фрагмент поля, который имеет ограниченный размер и содержит количество сигнальных объектов, превосходящее некое наперед заданное пороговое значение. В работах [1, 2] показано, как двумерная задача, связанная с отысканием

вероятности безошибочной регистрации координат малоразмерных объектов, формирующих случайное пуассоновское изображение, может быть редуцирована к следующей весьма простой по постановке одномерной задаче (которая на сегодняшний день не имеет общего аналитического решения):

«Какова вероятность  $P_{n,k}(\varepsilon)$  события, состоящего в том, что при случайном бросании  $n$  точек на интервал  $(0, 1)$  не будет образовано ни одной  $\varepsilon$ -группировки, содержащей более  $k$  точек?»

Ответ на этот вопрос необходимо знать в тех случаях, когда требуется обеспечить заданную надежность регистрации случайного поля, которая в свою очередь зависит от размеров сканирующей апертуры, количества ее пороговых уровней и мощности сигнального источника-генератора. Особенностью работы является то, что продвижение в решении представленной задачи проводилось поэтапно с использованием нестандартных программно-аналитических и комбинаторно-дискретных методов.

**Постановка задачи.** Существующие способы решения проблем, связанных со случайным разбиением интервала  $[3, 4]$  – а именно к ним относится поставленная во введении задача-вопрос, – не позволяют найти замкнутые аналитические формулы, по которым вычисляются вероятности  $P_{n,k}(\varepsilon)$  при произвольных целочисленных значениях  $n$  и  $k$ . На сегодняшний день общее аналитическое соотношение, описывающее вероятность  $P_{n,k}(\varepsilon)$ , известно лишь для случая  $k=1$  [5]:

$$P_{n,1}(\varepsilon) = (1 - (n-1)\varepsilon)^n, \quad (0 \leq \varepsilon \leq 1/(n-1)). \quad (1)$$

Вообще говоря, при  $k=1$  формула (1) рассчитывается относительно просто. Например, в [5] эта вероятность получена как результат интегрирования многомерного повторного интеграла:

$$P_{n,1}(\varepsilon) = n! \int_{(n-1)\varepsilon}^1 dx_n \left\{ \int_{(n-2)\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} dx_{n-1} \cdots \left\{ \int_{2\varepsilon}^{x_4-\varepsilon} dx_3 \left\{ \int_{\varepsilon}^{x_3-\varepsilon} dx_2 \left\{ \int_0^{x_2-\varepsilon} dx_1 \right\} \right\} \right\} \right\}.$$

Для  $k \neq 1$  получить замкнутую аналитическую зависимость, подобную формуле (1), не удастся. Для этого случая нами найдены частные формулы  $P_{n,k}(\varepsilon)$ , справедливые при фиксированных целочисленных параметрах  $n$  и  $k$  для  $k \leq n \leq 14$ . Такие формулы были рассчитаны с применением программ, осуществляющих трудоемкие аналитические выкладки для вычисления многомерных интегралов по выпуклым многогранникам в  $n$ -мерном пространстве. Кроме того, в [1, 2] в результате анализа программно рассчитанных частных решений получены замкнутые относительно целочисленного параметра  $n$  аналитические соотношения, которыми описывается вероятность  $P_{n,k}(\varepsilon)$  в отдельных

диапазонах изменения непрерывной переменной  $\varepsilon$  для случая, когда параметр  $k$  равен 2. В частности, для четных значений  $n$  на участке  $1/(n/2) < \varepsilon < 1/((n/2)-1)$  нами установлена «подсказанная» компьютером формула

$$P_{n,2}(\varepsilon) = (2/n)C_n^{(n/2)-1}(1 - ((n/2) - 1)\varepsilon)^n. \quad (2)$$

При  $k > 1$  решение  $P_{n,k}(\varepsilon)$  нельзя представить в таком же компактном виде, как формула (1), поскольку в этом случае оно описывается не одним, а несколькими степенными полиномами от параметра  $\varepsilon$ , состыкованными в нескольких узловых точках. Выходом из этой ситуации является создание для каждого из диапазонов изменения параметра  $\varepsilon$  индивидуальной вычислительной схемы, что в большинстве случаев приводит к необходимости решения весьма трудоемких вероятностных подзадач. Усложняет расчеты еще и то обстоятельство, что во всех таких подзадачах (т.е. во всех диапазонах изменения параметра  $\varepsilon$ ) возникают разные модификации обобщенных чисел Каталана, знание явного вида которых требуется при упорядочении взаимозависимых случайных числовых последовательностей.

Для продвижения в решении задачи нами был разработан новый подход к отысканию вероятностных зависимостей  $P_{n,k}(\varepsilon)$ , использующий исключительно методы комбинаторно-дискретного анализа. Практической реализацией этого подхода являлся расчет приведенных выше непрерывных вероятностных формул (1) и (2) исключительно с помощью средств дискретной математики и перечислительной комбинаторики, не требующих применения аппарата дифференциального и интегрального исчисления.

**Доказательства вероятностных формул (1) и (2).** Доказательство формулы (1) было проведено по такой схеме. Сначала (на первом этапе) было установлено, что в диапазоне  $1/n < \varepsilon < 1/(n-1)$  вероятность  $P_{n,1}(\varepsilon)$  задается соотношением (1). На втором этапе чисто комбинаторными методами был обоснован индукционный шаг, а именно: из предположения о справедливости формулы (1) в диапазоне  $1/(n+J) < \varepsilon < 1/(n+J-1)$  (здесь  $J$  – некое целое неотрицательное число) была доказана ее справедливость для следующего значения  $J=J+1$  (т.е. для диапазона  $1/(n+J) < \varepsilon < 1/(n+J-1)$ ). Таким образом, было установлено, что формула (1) справедлива для всех значений  $J = \overline{0, \infty}$  и, как следствие этого, что она верна во всем диапазоне  $0 < \varepsilon < 1/(n-1)$ .

В отыскании и доказательстве вероятностных аналитических зависимостей важную роль играют созданные нами программы машинной аналитики. В частности, их применение позволило произвести расчет частных формул  $P_{n,k}(\varepsilon)$  и установить новые ранее неизвестные зависи-

мости. В частности, недавно нами предложено компактное доказательство аналитической формулы (2), проводимое чисто комбинаторными методами. Эти методы основаны на применении классических чисел Каталана [6] и не требуют использования аппарата дифференциального и интегрального исчисления.

**Заключение.** Дискретные методы, включая программно-аналитические расчеты, применимы не только при обработке случайных сигналов и изображений, но также в теории надежности, при исследовании распределенных вычислительных систем и систем передачи данных, при изучении многоканальных обслуживающих систем с постоянным временем обслуживания и во многих других научно-технических приложениях. Представленные в настоящем докладе результаты свидетельствуют об эффективности разработанных программно-аналитических и комбинаторно-дискретных методов, что дает основание полагать, что их дальнейшее развитие может привести к новым научным результатам.

**Благодарности.** Работа выполнена в Институте автоматики и электротехники СО РАН за счет субсидии на финансовое обеспечение выполнения государственного задания (№ 0319-2016-0008) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00313).

### Библиографический список

1. Reznik A.L., Solov'ev A.A. and Torgov A.V. On the Probability of the Formation of Local Groups in Random Point Images // *Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications*. – 2016. – Vol. 26, No. 4. – P. 714–719.
2. Reznik A.L., Tuzikov A.V., Solov'ev A.A., Torgov A.V. Analysis of Random Point Images with the Use of Symbolic Computation Codes and Generalized Catalan Numbers // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. – 2016. – Vol. 52, No. 6. – P. 529–536.
3. Darling D.A. On Class Problems Related to the Random Division of an Interval // *Ann. Math. Stat.* – 1953. – Vol. 24: p. 239–253.
4. Barton D.E. and David F.N. Combinatorial Extreme Value Distributions // *Mathematika*. – 1959, no 6: p. 63–76.
5. Parzen E. *Modern Probability Theory and Its Applications*, John Wiley and Sons, Inc., New York-London, 1960, p.464.
6. Stanley, R.P. (1999) *Enumerative Combinatorics*. vol. 2, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 62, Cambridge University Press.

## УДК 004.4

## Возможности технологии краудсорсинга для студентов направления подготовки «Прикладная информатика»

*О.В. Рязанова, М.В. Досьмова, Е.И. Кирибаев*

*РИ (филиал) АлтГУ, г. Рубцовск*

Одним из методов сетевого взаимодействия является технология краудсорсинга, которая в настоящее время применяется в различных областях знаний и востребована как в студенческой среде, так и в среде работодателей. Краудсорсинг в настоящее время активно развивается, в связи с этим издано много научных трудов, изучающих различные его аспекты, сферы применения к бизнес-проектам, научным исследованиям и в образовании. Существуют разные варианты трактовок термина «Краудсорсинг», некоторые из них представлены на рисунке 1.

Трактовка термина и источник	
Краудсорсинг – это	<i>Портал крауд-сервисов - <a href="http://crowdsourcing.ru/article/what_is_the_crowdsourcing">crowdsourcing.ru/article/what_is_the_crowdsourcing</a> «мобилизация ресурсов людей посредством информационных технологий с целью решения поставленных задач, стоящих перед бизнесом, государством и обществом в целом»</i>
	<i>Свободная энциклопедия Wikipedia - <a href="http://ru.wikipedia.org">ru.wikipedia.org</a> «привлечение к решению тех или иных проблем инновационной производственной деятельности широкого круга лиц для использования их творческих способностей, знаний и опыта по типу субподрядной работы на добровольных началах с применением инфокоммуникационных технологий»</i>
	<i>Сайт «Свободное программное обеспечение» - <a href="http://pro-spo.ru/freelance/3289-что-такое-kraudsorsing">pro-spo.ru/freelance/3289-что-такое-kraudsorsing</a> передача «определенных производственных функций неопределенному кругу лиц на основании публичной оферты, не подразумевающей заключение трудового договора»</i>
	<i>Witopedia - энциклопедия Witology с теорией и практикой краудсорсинга - <a href="http://wiki.witology.com">wiki.witology.com</a> «практика получения необходимых услуг, идей или контента путем просьб о содействии, обращенных к большим группам людей, особенно - к онлайн-овому сообществу в отличие от обычных сотрудников или поставщиков»</i>

Рисунок 1 – Трактовки термина «Краудсорсинг»

Рассмотренные определения позволяют сделать вывод, что по своей сути метод краудсорсинга подразумевает сетевую организацию работы с помощью Интернета, социальных сетей и специализированных ИТ-платформ с веб-интерфейсом. Сообщества людей с самыми разными интересами и целями объединяются для реализации каких-либо проектов или получения общественно востребованного продукта (идей). Краудсорсинг предусматривает выполнение работы без денежного вознаграждения или за небольшую плату, без заключения трудового договора. Проекты, использующие краудсорсинг, выполняются

заинтересованными талантливыми лицами, обитающими в сети, в группах или индивидуально. Работу над проектом принято разбивать на мелкие части, для каждой части назначается исполнитель [5].

Три направления краудсорсинга, реализуемые в сети, представлены на рисунке 2.

Направление	Спектр решаемых задач	Пример реализации
<b>краудкриэйшн</b> (crowdcreation)	генерирование и разработка идей, решений, концепций, дизайн-проектов	свободная энциклопедия Wikipedia, предлагающая всем желающим готовить и править статьи
<b>краудвотинг</b> (crowdvoting)	изучение общественного мнения, социологические опросы, голосование, оценка законопроектов и общественных инициатив	успешно применяется в сфере государственного и муниципального управления, примером является проект «Активный гражданин», платформа на организацию сетевого взаимодействия органов управления и общества, разработка закона «Об образовании» в Российской Федерации.
<b>краудфандинг</b> (crowdfunding)	коллективное финансирование проектов	русская платформа «Планета», которая предназначена для размещения общественных проектов в целях привлечения средств на их реализацию с помощью коллективного финансирования

Рисунок 2 – Направления краудсорсинга

Краудсорсинг в вузах используется для улучшения качества образовательного продукта и услуг, а также в рамках социально значимых проектов.

Для студентов направления «Прикладная информатика» в соответствии с Федеральным государственным стандартом высшего образования использование технологий краудсорсинга позволяет освоить такие профессиональные компетенции, как:

- способность ставить и решать прикладные задачи с использованием современных информационно-коммуникационных технологий (ПК-4);

- способность принимать участие в реализации профессиональных коммуникаций в рамках проектных групп, презентовать результаты проектов и обучать пользователей ИС (ПК-14).

Для повышения практикоориентированности студентов используются разные направления краудсорсинга в зависимости интересов от участия в краудсорсинговых проектах.

Так, в рамках дисциплины «Учебное предприятие» студентами выпускных групп было получено задание по изучению новых видов организации сетевых взаимодействий. В результате ими было выбрано направление – краудвотинг с целью разработать проект «Активный студент» для улучшенного взаимодействия студентов, администрации

и сотрудников филиала, интеграция с порталом Рубцовского института (филиал) АлтГУ осуществляется по ссылке (<http://student.rb.asu.ru/>).

«Активный студент» – это сайт для тех, кому не всё равно, что происходит в Институте. Это сайт, где студентам предлагается обсудить важные для них вопросы, отвечая на которые, можно напрямую влиять на принимаемые администрацией решения. На рисунке 3 представлена страница сайта.

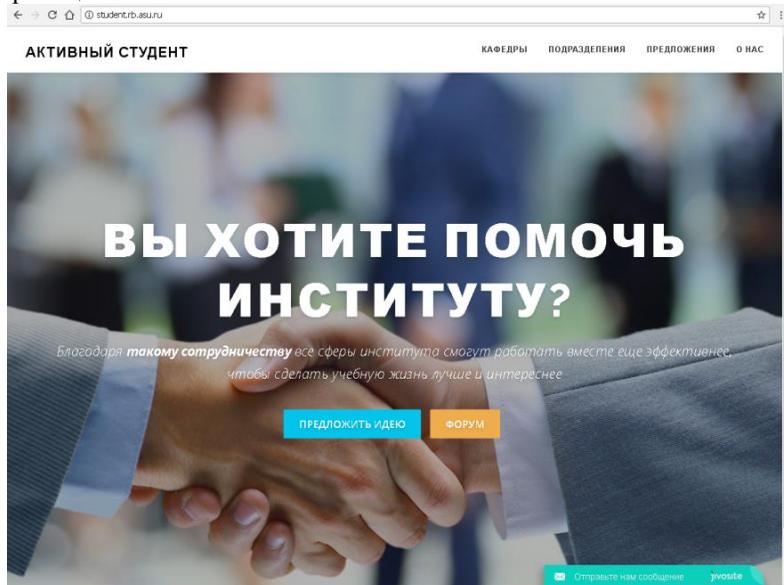


Рисунок 3 – Главная страница сайта «Активный студент»

Работа в студенческой лаборатории позволила инициативной группе студентов разработать краудфандинговую платформу РИ (филиала) АлтГУ, интегрированную на портале по следующей ссылке (<http://studstartup.rb.asu.ru/>). На рисунке 4 представлена стартовая страница проекта. В заключении следует отметить, что в рамках данной статьи приводятся лишь некоторые аспекты реализации возможностей краудсорсинга для студентов Рубцовского института (филиала) АлтГУ направления подготовки «Прикладная информатика». На самом же деле погружение студентов в краудсорсинговую среду открывает для них огромные возможности: развивает принципы волонтерства, оказывает влияние на формирование общекультурных и профессиональных компетенций, способствует развитию умения анализировать ситуацию, оценивать альтернативы, прививает навыки решения практических задач. Краудсорсинговые платформы, созданные студентами, позво-

ляют также организовать связь с выпускниками вуза, являющимися представителями различных сфер профессиональной деятельности.

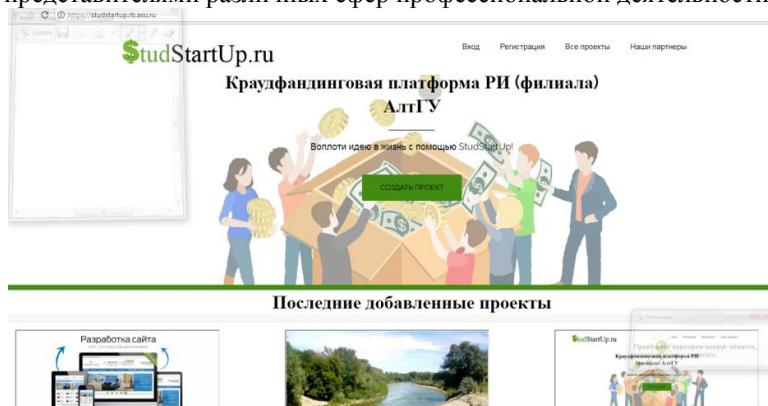


Рисунок 4 – Главная страница краудфиндинговой платформы

Надеемся, что работа в такой среде будет полезна нашим студентам, и в дальнейшем поможет им ориентироваться в проблемных ситуациях, генерации новых идей, а самое главное – работать в команде.

### Библиографический список

1. Лихачев, Е.Ф. Краудсорсинг, как новое явление в экономике. Его социоинновационная природа и классификация // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» [Электронный ресурс]. – Том 8, №1 (2016). – Заглавие с экрана. – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/76EVN116.pdf> (доступ свободный).

## УДК 004.94

### Применение компилятора MATLAB для создания независимых приложений

*Е.Ю. Токарева*  
АлтГУ, г. Барнаул

MATLAB – одна из наиболее мощных универсальных систем компьютерной математики, которая широко применяется для решения различных математических задач. Программы, написанные на языке, работают только в среде MATLAB, однако существуют возможности создание автономных и независимых приложений с помощью пакета расширения MATLAB Compiler. Данные возможности

продукта избавляют пользователя от таких проблем как написание своих библиотек или поиск их у сторонних разработчиков.

Compiler – программа, выполняющая преобразование высокоуровневого языка программирования в эквивалентный низкоуровневый язык. Все приложения, созданные с MATLAB Compiler, используют MATLAB Component Runtime (т.е. среду выполнения, состоящую из набора dll-библиотек и обеспечивающую полную поддержку языка MATLAB), что дает возможность разрабатывать ПО для пользователей, которые не нуждаются в MATLAB.

Для создания файла требуется обертка, которая выполняет инициализацию и завершение как требуется определенным интерфейсом; определяет массивы данных, содержащие информацию о путях, ключи шифрования; обеспечивает необходимый код, чтобы отправить вызовы от функций интерфейса к функциям MATLAB в MCR; содержит точку входа для каждой m-функции, если это библиотека. В своей работе я исследую обертки C++ Shared Library для интеграции Matlab в MS Visual Studio, а также Excel Add-in для создания надстроек в Excel.

В используемой версии системы R2015b Matlab Compiler не создает компоненты .dll. Для создания библиотек требуется установка SDK. Предпочтение было отдано Microsoft Windows SDK 7.1, который содержит все необходимые файлы – библиотеки C++, компиляторы. Используя таблицу поддерживаемых продуктов, было установлено, что перед установкой SDK для устранения конфликта несовместимости программ необходима установка (переустановка предыдущей версии, если такая имелась) .NET Framework 4.0.

Программный продукт, полученный с помощью Компилятора MATLAB, называется компонентом. Процесс создания программных компонентов был полностью автоматизирован. Достаточно добавить список необходимых файлов, которые составляют приложение или библиотеку. Далее Компилятор выполняет анализ зависимости m-файлов, генерирует объектный код, создает архив, производит компиляцию и завершается процесс компоновкой.

Опишем алгоритм создания автономных компонентов:

1) пишем код будущего приложения или функции на языке Matlab, в составе которого могут быть файлы: \*.m, \*.fig, и др. используемые для работы приложения или функции компоненты;

2) с помощью команды mbuild – setup выбираем компилятор (Компилятор SDK синхронизируются автоматически с компилятором Matlab), на выходе получаем конфигурацию с одним из подключенных Компиляторов (в данном случае с SDK);

3) заходим во вкладку APPS – Application Deployment и выбираем необходимый инструмент. В своей работе я использовала Application Compiler для создания приложения, и Library Compiler для создания C++ библиотеки и надстройки Excel;

4) далее, если создается приложение, выбираем Application Compiler, в появившемся окне добавляем один из необходимых m-файлов. В результате срабатывает встроенная функция для определения связей между файлами проекта и автоматически подгружаются недостающие компоненты.

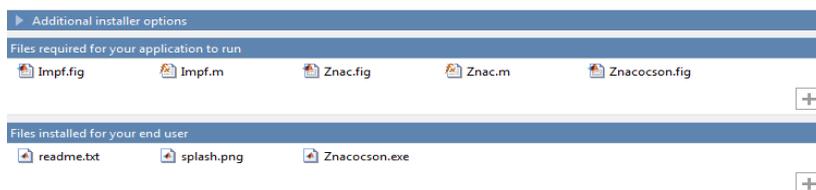


Рисунок 1 – Результат работы функции для анализа зависимости файлов

Если создается библиотека (в т.ч. надстройка Excel), выбираем Library Compiler, активируем поле Excel Add-in и выбираем нужный Matlab – файл \*.m. Далее нажимаем на кнопку Package;

5) копируем созданную компилятором папку на любой переносной носитель или в облако, и переходим к установке готового приложения, или подключению библиотек.

Для экономии места по умолчанию в папки не помещаются необходимые для работы библиотеки, а загружаются из интернета вместе с установкой среды MCR. Среда выполнения устанавливается при запуске исполняемого файла \*.exe из папки for\_redistribution. Альтернативный вариант. В папку помещаются необходимые библиотеки, и пользователю не нужен будет интернет и установка будет в разы быстрее.

Перед добавлением надстройки в Excel требуется добавить все необходимые библиотеки на диск C:\ с помощью запуска MuAppInstaller\_web.exe или скопировать готовую папку Matlab Runtime на диск C:\ (если она включена в архив). Добавление надстройки происходит по следующему алгоритму: а) Открываем Excel, заходим во вкладку Разработчик; б) Заходим в Visual Basic, в левой колонке находим VBAProject, правой клавишей мышки Import file... Выбираем файл из папки for\_redistribution\_files\_only – \*.bas, свернем окно; в) Возвращаемся на Книга1 Excel и сохраняем добавленный файл, как макрос. Файл – Сохранить как, указываем тип файла

Надстройка Excel (\*.xlam), сохраняем; d) Добавляем надстройку: Файл – Параметры – Надстройки – Управление, выставляем галочку возле появившейся надстройки, которую добавили ранее, сохраняем; e) Надстройка готова к использованию, вызывается обычным способом, как любая встроенная функция Excel.

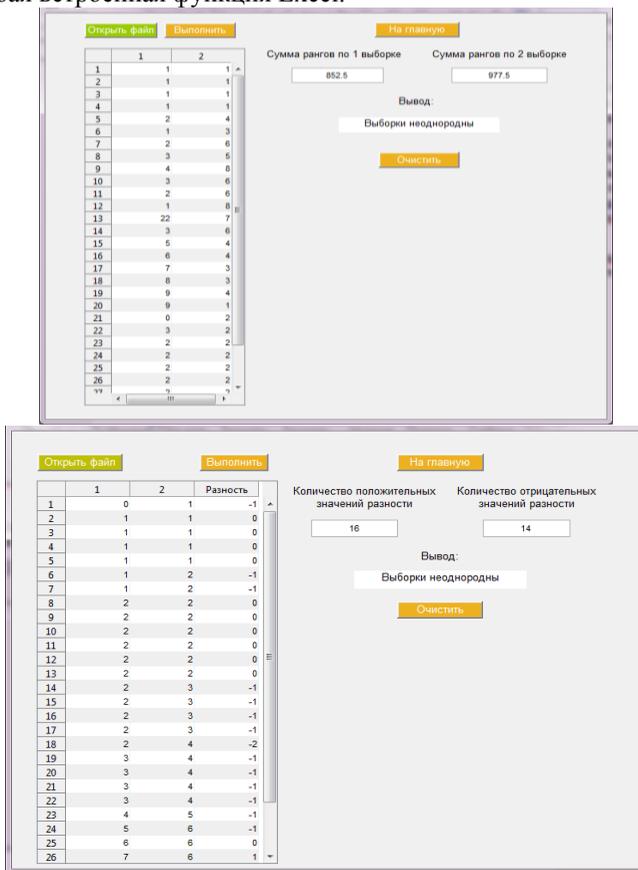


Рисунок 2 – Результат выполнения операций над выборками на стационарном компьютере без установки MATLAB

Для реализации независимого приложения был запрограммирован алгоритм проверки гипотезы однородности показателя, измеренного в двух группах пациентов. В основе алгоритма взяты 2 способа проверки: Критерий Уилкоксона и Критерий знаков. Для работы с выборками, реализовано 2 способа ввода данных: вручную и импорт значений из Excel. Разработка осуществлялась в среде GUIDE, которая позволя-

ет создавать графический интерфейс приложения. Готовая программа использует 3 окна: Главное меню, где можно выбрать один из способов работы с выборками (файл Znacocson.m), критерий Уилкоксона (файл Impf.m), критерий знаков (файл Znac.m). Таким образом, проект содержит файлы: Znacocson.m, Impf.m, Znac.m, Znacocson.fig, Impf.fig, Znac.fig. Далее следуя алгоритму, описанному выше, было создано автономное от MATLAB приложение.

Для реализации надстройки Excel были запрограммированы алгоритмы нахождения собственных чисел и собственные векторы заданной матрицы.

В результате компиляции были получены файлы \*.dll – динамическая библиотека, \*.bas – код VBA, необходимый для создания дополнения Excel из созданного компонента, \*.ctf – архив, содержащий все, основанное на MATLAB, \*.bat для запуска установки библиотек MCR.

Для тестирования надстройки Eigval, зададим матрицу 5x5 и прочитаем для неё собственные числа.

The image shows two screenshots of an Excel spreadsheet. The top screenshot shows the input matrix in cells A1:E5. The bottom screenshot shows the result of the Eigval function in cell G1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	3	6	4	6		=eigval(A1:E5)	
2	2	5	0	1	1			
3	3	4	3	2	2			
4	2	1	4	3	8			
5	5	2	2	4	6			
6								
7								

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	3	6	4	6		16	
2	2	5	0	1	1		-3	
3	3	4	3	2	2		-1	
4	2	1	4	3	8		4	
5	5	2	2	4	6		2	
6								
7								

Рисунок 3 – Результат выполнения функции Eigval в Excel

Таким образом получается, что практически любая функция MATLAB, или написанный на m-языке алгоритм может быть легко скомпилирован и выполнен из Excel, не вызывая среду MATLAB. Это позволяет пользователю создавать математические приложения, дополняющие возможности популярного офисного пакета Excel или работающие самостоятельно.

### Библиографический список

1. Смоленцев Н.К. Создание Windows приложений с использованием математических процедур MATLAB. – М.: ДМК-Пресс, 2008. – 456 с.
2. Дьяконов В.П. Полный самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.
3. Иглин С.П. Теория вероятностей и математическая статистика на базе MATLAB. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2006. – 612 с.
4. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. MATLAB 7. Самоучитель. – М.: ИТ Пресс, 2006. – 496 с.
5. Кривилев А.В. Основы компьютерной математики с использованием системы MATLAB. – М.: Лекс-Книга, 2005. – 497 с.
6. Потемкин В.Г. Система MATLAB. Справочное пособие. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1997. – 350 с.
7. Потемкин В.Г. Вычисления в среде MATLAB. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2004. – 720 с.
8. Официальный сайт MathWorks: [электронный ресурс]. URL: <https://matlab.ru/products/matlab-compiler> (дата обращения: 15.03.2018).

### УДК 004.9

#### Информационная система для перерасчета учебной нагрузки преподавателей

*Т.М. Тушкина, Н.В. Павлова, В.В. Смирнов*  
*БТИ (филиал) АлтГТУ, г. Бийск*

Автоматизация организации учебного процесса вуза является одним из направлений внедрения информационных технологий в образование. Распределение учебной нагрузки между преподавателями кафедры является достаточно трудоемким процессом, требующим учета большого количества данных. К их числу принадлежат, в первую очередь, сведения, указанные в учебных планах направлений подготовки/специальностей, и данные о распределении учебной нагрузки преподавателей.

На практике часто случаются ситуации, когда возникает необходимость произведения перерасчета учебной нагрузки преподавателей (изменение контингента студенческих групп, в том числе расформирование и т.д.). Настоящая работа посвящена решению вопроса автоматизации перерасчёта объёма учебной нагрузки преподавателей кафедры вуза.

Используя интегрированную среду разработки программного обеспечения Delphi, авторы разработали программный продукт, позволяющий автоматизировать перерасчет учебной нагрузки преподавателей кафедры. Входными данными служат: дата изменения учебной нагрузки, «старый» и «новый» объемы учебной нагрузки (в соответствии с первоначальным и актуализированным учебными поручениями преподавателя).

Перераспределение учебной нагрузки производится равномерно на оставшийся период учебного года, начиная с указанной даты. При этом учитывается объем отработанных часов и вычисляется объем часов, подлежащих проведению. Программа в автоматическом режиме формирует следующие документы: заявление преподавателя на отмену/изменение учебной нагрузки, заявление преподавателя на совмещение научно-педагогической работы. Также предусмотрена возможность вывода различных вариантов отчетов.

Программа имеет интуитивно понятный интерфейс и позволяет уменьшить рутинную работу в результате автоматизации оформления документов и отчетов.

**УДК 502.7 + 577.4**

**Разработка компьютерной системы  
обработки больших данных  
для персонализированного анализа особенностей генома**

*А.А. Цхай<sup>1,2</sup>, С.В. Мурзинцев<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup> АлтГТУ им. И.И.Ползунова, <sup>2</sup> АлтГУ, г. Барнаул*

Изучение структурно-функциональной организации биоразнообразия продолжает оставаться магистральным направлением, развивающимся на стыке биологии и информационных технологий [1].

В последнее время подход, основанный на сравнении геномов, стал весьма широко и эффективно использоваться в генетике и молекулярной биологии. Благодаря развитию математических алгоритмов и информационных технологий данный подход выделился в новое самостоятельное направление под названием «сравнительная геномика». Это направление объединяет исследования, посвященные сопоставлению свойств совокупностей генов различных живых организмов.

На данный момент времени исследователи, помимо широко известным результатов по геному человека, обладают расшифрованными геномами как простейших организмов (дрожжи, мухи дрозофилы, кишечная палочка), так и сложных живых существ, таких как обезьяны,

крысы, собаки и т.д. Параллельно ведется расшифровка ещё множества других геномов, как организмов, так и растений. Текст ДНК во всех геномах написан четырьмя буквами, у птиц число этих букв составляет сотни миллионов, у человека и млекопитающих «текст» ДНК доходит до миллиарда символов. Поскольку запись генома любого существа осуществляется четырьмя буквами, то возникает возможность сравнения геномов живых существ между собой для выявления закономерностей и поиска соответствия, например, с отклонениями или нарушениями в жизнедеятельности изучаемых организмов. В свою очередь это позволяет составлять БД организмов и БД отклонений, нарушений в ДНК. Это в перспективе позволит находить и анализировать отклонения в геномах живых существ, в том числе человека, на ранних стадиях развития и заблаговременно заниматься профилактикой и лечением.

В статье получены результаты, позволяющие найти подтверждение гипотезе о применимости распределенных нереляционных БД для сравнения и поиска различных поведенческих отклонений на основе персонифицированного анализа геномов живых существ.

Для поиска отклонений в геномах живых существ использованы алгоритм Wnnowing и распределенная система поиска и хранения данных MongoDB представленная на рисунке 1 [2–4].

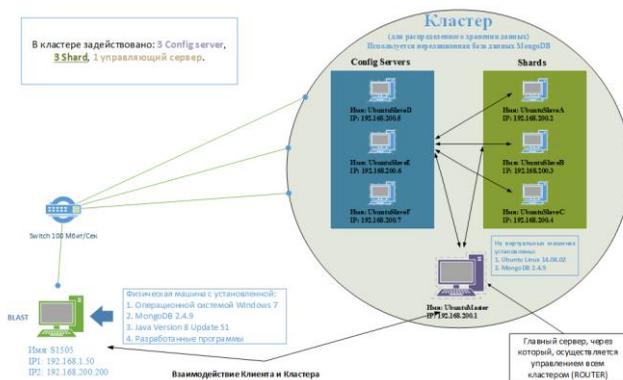
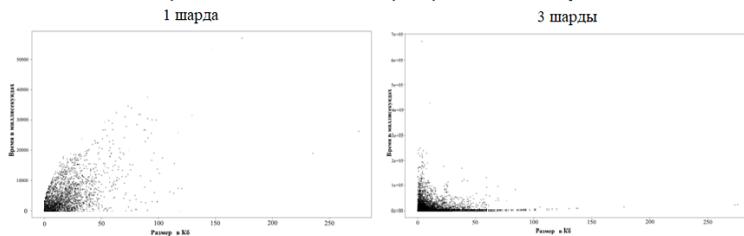


Рисунок 1 – Схема распределенной информационной системы для поиска отклонений у организмов

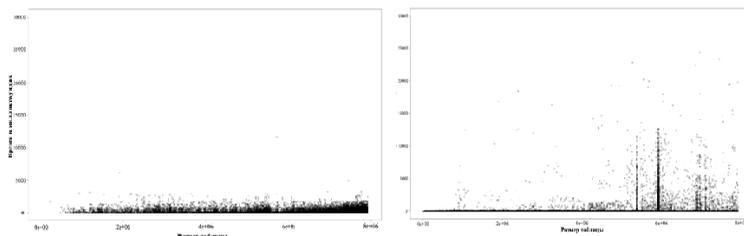
В данном исследовании в качестве источника элементов БД геномов организмов была выбрана БД Киотской энциклопедии генов и геномов KEGG GENOME (Секвенированные геномы различных живых

организмов), включающая расшифрованные представления около пяти тысяч живых существ ([http://www.genome.jp/kegg/catalog/org\\_list.html](http://www.genome.jp/kegg/catalog/org_list.html)). Объем генома одного живого существа достигает 1 ГБ в сжатом виде. Суммарный объем геномов живых существ в данном информационном ресурсе, таким образом, составляет приблизительно пять ТБ. В связи с большим объемом данных, возникающим при обработке исходной информации, был осуществлен переход от реляционных БД к нереляционным, как к более гибким и масштабируемым.

Скорость записи в зависимости от размера генома живого существа



Скорость поиска в зависимости от размера таблицы



Время поиска в зависимости от размера генома живого существа

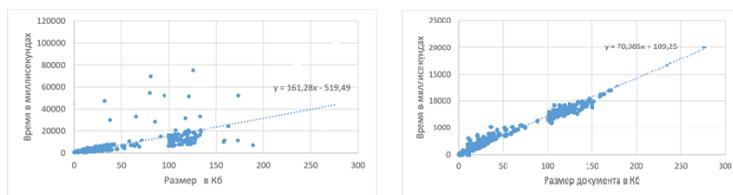


Рисунок 2 – Скорость поиска информации (1 и 3 шарды)

В работе были проделаны эксперименты, направленные на подтверждение применимости распределенных БД для поиска отклонений в геномах организмов. Применимость данного подхода оценивалась через два параметра. Первый параметр – это масштабируемость инфраструктуры и второй – это скорость работы ИС. Скорость работы распределенной ИС оценивалась во время сравнения отклонений с гено-

мами живых существ и времени загрузки отклонений и геномов организмов в БД.

Оценка масштабирования инфраструктуры, осуществлялась благодаря построению прототипа ИС с использованием различных конфигураций. Были протестированы конфигурации без разделения записей по индексу, а так же с разделением записи по индексу между одной шардой и тремя.

Продолжение исследований видится в нескольких направлениях. Первое направление – это решение задачи об определении момента, при котором, необходимо добавлять узел к кластеру при возрастании рассматриваемого количества отклонений и увеличении числа геномов в БД организмов.

Второе – это практическое наполнение и дальнейшее формирование БД с как можно большим количеством реальных геномов существ. Использование полученных результатов в междисциплинарных геномных системных исследованиях позволило бы говорить о детализации и развитии модели в перспективном плане.

### **Библиографический список**

1. Биоразнообразие и динамика экосистем: информационные технологии и моделирование / отв. ред. В.К. Шумный, Ю.И. Шокин, Н.А. Колчанов, А.М. Федотов. - Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2006. – 648 с.

2. Цхай А.А., Бутаков С.В., Мурзинцев С.В., Ким Л.С. Обнаружение плагиата с использованием нереляционных баз данных // Вестник алтайской науки.– 2015. – №1. – С. 280–285.

3. Бутаков С.В., Мурзинцев С.В., Цхай А.А. Использование горизонтально-масштабируемой инфраструктуры при поиске заимствований в тексте // Информационные технологии. – 2016. – Т. 22, №8. - С. 576–581.

4. Butakov S., Murzintsev S., Tskhai A. (2016). Detecting Text Similarity on a Scalable No-SQL Database Platform. Platform Technology and Service (PlatCon). Proc. of Int. Conf. 2016; doi: 10.1109/PlatCon.2016.7456789.

## Секция 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ, ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 51:33

### О механизмах формирования олигопольных рынков с конкурентоспособными агентами

*Г.И. Алгазин*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Как правило, для описания условий олигопольного рынка и нахождения равновесия привлекается математическое моделирование. Необходимым условием присутствия агента на равновесном рынке является положительный объем выпуска (см., например, [1–6]). Но формальные модели не могут учесть влияние всего спектра экономических ограничений рынка на равновесие, что часто обуславливает необходимость последующего анализа полученных решений с целью выработки обоснованных рекомендаций по формированию рынка, состоящего только из агентов-олигополистов с положительным равновесным выпуском.

С точки зрения экономического положения в олигополии агенты, получающие в равновесии нулевой выпуск, определяются как неконкурентоспособные, а агенты с отрицательным выпуском – не имеющими содержательного смысла. Если возможность появления таких агентов не была исключена соответствующими ограничениями в модели, то не всегда оправданы, лежащие на поверхности, простые решения: 1) считать, что равновесия не существует; 2) удалить таких агентов с рынка и оставить только агенты, выпуск которых был положительным (см., например, [4, 6]). В ряде случаев на рынке, конъюнктура которого изменилась только за счет уменьшения числа конкурирующих фирм, агент, который был вытеснен с исходного рынка как неконкурентоспособный, может вместе с оставшимися агентами в новом равновесии иметь положительный объем выпуска. Поэтому якобы неконкурентоспособный агент может потенциально таким не являться. Соответственно, некоторые из оставшихся на рынке агенты могут не выдержать конкуренцию среди всех агентов, имевших положительные выпуски. Поэтому такие агенты могут потенциально являться неконкурентоспособными. При этом для моделей рынков с разными гипотезами поведения агентов подобного рода ситуации, как показано в настоящей работе, имеют свои особенности.

Базовой для проведенного исследования является классическая однопродуктовая теоретико-игровая модель олигополии с линейными

функциями спроса и затрат агентов, конкурирующих объемами выпуска. Кооперация между агентами и ограничения по мощности отсутствуют. Полагается, что выпуск каждого агента будет реализован по единой рыночной цене, которая определяется общим объемом выпуска. Агенты рациональны и выбор ими объема выпуска направлен на максимизацию собственной прибыли (см., например, [7]).

Для моделей рынка олигополии обсуждаются понятия, необходимые и достаточные условия конкурентоспособности и в совокупности конкурентоспособных агентов-олигополистов, задачи и процедуры формирования рынка в совокупности конкурентоспособных агентов, задачи управления конкурентоспособностью. Формулируются и доказываются соответствующие утверждения. Приводятся многочисленные примеры. Исследования приводятся в сравнении для модели олигополии Курно, модели Штакельберга с одним и несколькими агентами-лидерами.

### **Библиографический список**

1. Novshek W. On the Existence of Cournot Equilibrium // Review of Economic Studies, 1985. – P. 85–98.
2. Myerson R. Game Theory: Anaysis of Conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.
3. Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г. Моделирование поведения экономических агентов в системе «производитель–посредник–конкурентный рынок» // Управление большими системами, 2011. – № 32. – С. 83–108.
4. Алгазина Ю.Г. Модельные исследования взаимодействия взаимодействующих субъектов на товарных рынках / Препринт № 7/10. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2010. – 33 с.
5. Гераськин М.И., Чхартишвили А.Г. Анализ игровых моделей рынка олигополии при ограничениях по мощности и конкурентоспособности агентов // Автоматика и телемеханика, 2017. – Вып. 11 – С. 105–121.
6. Дюсуше О.М. Статическое равновесие Курно–Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек // Экономический журнал ВШЭ, 2006. – № 1. – С. 3–32.
7. Mas-Collel A., Whinston D., Green J. Microeconomic Theory. New York: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.

УДК 519.8

**О задаче оптимизации структур ответственности  
на конкурентных рынках**

*Г.И. Алгазин, Д.Г. Алгазина*

*АлтГУ, г. Барнаул*

В теории управления организационными системами, являющейся разделом математической теории управления, задача поиска оптимальных структур ответственности относится к основным математическим задачам структурного синтеза.

Актуальность исследований, направленных на ее решение, обусловлена важностью объективного научного изучения потенциальных возможностей повышения эффективности функционирования систем, в которых хозяйствующие субъекты должны обеспечивать не только собственное стабильное положение на рынке в условиях быстро меняющихся ситуаций и жесткой конкуренции, но и брать на себя ответственность за результаты, а также установление правил взаимодействия и принятия решений другими субъектами с несовпадающими экономическими интересами и неполной, асимметричной информированностью.

Такие исследования в наиболее полной мере могут быть реализованы в теоретико-игровом подходе. На его основе в работах отечественных и зарубежных ученых изучались устойчивые связи в организационных системах, включая информационные, управляющие связи между участниками, отношения подчиненности и распределение прав принятия решений. Современные обзоры, акцентирующие внимание на распределение ролей в базовых теоретико-игровых моделях организационных структур, в том числе рыночных, представлены, например, в [1–8].

Несмотря на множество различных моделей распределения ролей и определения игр на них, на сегодняшний день отсутствует более-менее завершенные их исследования. Среди современных исследований важное место занимает создание системы систематизации и классификации теоретико-игровых моделей распределения ролей, которая учитывала бы подходы к их построению и изучению, а также способствовала их анализу. В [6] предложена система классификаций математических моделей анализа и синтеза организационных структур, включающая 13 оснований, в том числе основание «распределение ролей». По этому основанию введено 2 класса моделей: распределение ролей фиксировано и распределение ролей произвольно. Как признают сами

авторы, данная система, несомненно, требует дополнений, поскольку ее классы содержат огромное число весьма сложных задач.

Подавляющее большинство работ по структурному синтезу посвящено исследованию не рыночных конкурентных систем, а иерархических систем, причем с фиксированной подчиненностью участников (см., например, [9–14]). В них обсуждаются преимущества и недостатки различных организационных структур, но для рыночных систем задача синтеза оптимальной структуры даже не упоминается. К тому же в работах, посвященных задачам оптимизации структур, практически не учитывается характерная для участников организационных систем целенаправленность поведения, либо исследуется взаимодействие агентов с фиксированными ролями. Что в большой степени справедливо и для чрезвычайно популярных на сегодняшний день многоагентных рыночных систем. Для иерархических систем можно выделить незначительное число теоретико-игровых моделей, в которых было введено понятие сетевого взаимодействия, характерным признаком которого является потенциальная возможность каждого из участников организационных систем выступать в роли центра или активного элемента, или одновременно и в роли центра, и в роли активного элемента (при взаимодействии с различными участниками). К сожалению, для рыночных систем с целенаправленным (активным) поведением и сетевым взаимодействием участников, подобного рода работ практически нет. Здесь можно отметить отдельные публикации научной школы Института проблем управления РАН, в которых качественно формулируются задачи структурного синтеза в рамках теоретико-игровых моделей, и приводится их решение для ряда частных случаев (см., например, [6, 15]).

В целом задача теоретического обоснования методов управления взаимодействием на конкурентных рынках с нефиксированными ролями участников и оценки того или иного ролевого поведения последних остается нерешенной.

Нельзя также не отметить, что значительное влияние на современное состояние исследований ролевого поведения участников на конкурентных рынках оказали также работы по моделям экономического поведения (В.А. Булавского, А. Cournot, Н. Simon, D. Nash, Н. Stackelberg, W. Novshek, Н. D. Sherali, J. Tirole, С. Metzler, и др.), экономическим сетям (В.Л. Макарова, В. Dutta, М.О. Jackson, А.А. Volinsky и др.), сетевым структурам и организационным системам (В.Н. Буркова, Д.А. Новикова, М. Florian и др.), сетевым играм (В.М. Губко, М.О. Jackson, R.В. Myerson, V. Bala, F. Page, и др.), рефлексивному управлению (Д.А. Новикова, А.Г. Чхартишвили, М. Costa-Gomes, P. Wilson и др.).

Традиционно в теоретико-игровых моделях проблема распределения ролей и структур ответственности в системах с постоянным составом участников описывается через право первого хода или порядок ходов. Современное состояние исследований и многообразие теоретико-игровых моделей, направленных на описание и решение проблемы, обуславливает необходимость в развитии этого подхода.

По нашему мнению, новую научную идею может определять постановка и решение теоретико-игровых задач, в которых проблема распределения ролей и структур ответственности на конкурентном рынке описывается первоначально, как борьба за приоритетное право распоряжаться выбором управлений (переменных), а затем как борьба за право первого хода.

Поэтому особенно перспективными для развития этой идеи видятся такие задачи исследований, как теоретическое изучение и практическое использование моделей с неразделенными управляющими переменными и нефиксированными правами первого хода (порядка ходов). Базис соответствующих исследований могут составить модельные конструкции концепции системного компромисса [16, 17]. С имеющимся научным заделом можно ознакомиться, например, в [18–21].

### **Библиографический список**

1. Camerer C. Behavioral game theory: experiments in strategic interactions. – Princeton: Princeton University Press, 2003. – 544 p.
2. Jackson M. O. Social and economic networks. – Princeton: Princeton University Press, 2008. – 648 p.
3. Laffont G., Martimort D. The theory of incentives: the principal-agent model. – Princeton: Princeton University Press, 2001. – 421 p.
4. Shoham Y., Leyton-Brown K. Multiagent systems: algorithmic, game-theoretic and logical foundations. – N. Y.: Cambridge University Press, 2008. – 504 p.
5. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
6. Губко М.В., Коргин Н.А., Новиков Д.А. Классификация моделей анализа и синтеза организационных структур // Управление большими системами. – 2004. – Вып. 6. – С. 5–21.
7. Караваев А.П. Модели и методы управления составом активных систем. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 151 с.
8. Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 102 с.
9. Mesarovic M., Mako D., Takahara Y. Theory of hierarchical multi-level systems. – N. Y.: Academic, 1970. – 294 p.

10. Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 210 с.
11. Гермейер Ю.Б., Моисеев Н.Н. О некоторых задачах теории иерархических систем управления // Проблемы прикладной математики и механики. – М.: Наука, 1971. – С. 30–43.
12. Губко М.В. Математические модели оптимизации иерархических структур. – М.: Ленанд, 2006. – 264 с.
13. Мамченко О.П., Оскорбин Н.М. Иерархические системы управления в экономике. – Барнаул: АлтГУ, 2007. – 281 с.
14. Мишин С.П. Оптимальные иерархии управления в социально-экономических системах. – М.: ПМСОФТ, 2004. – 207 с.
15. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002. – 148 с.
16. Алгазин Г.И. Модели системного компромисса в социально-экономических исследованиях. – Барнаул: Азбука, 2009. – 238 с.
17. Алгазин Г.И. Централизация и децентрализация в базовых игровых моделях организационных систем // Управление большими системами. – 2012. – № 36. – С. 144–172.
18. Алгазина Д.Г. Моделирование сетевого взаимодействия на конкурентных рынках с неоднородным составом участников (автореферат дис. ... канд. техн. наук). – Изд-во Алт. ун-та, 2014. – 21 с.
19. Алгазин Г.И., Оскорбин Н.М. Применение моделей системного компромисса для анализа и оптимизации производственных систем (на примере стимулирования напряженных производственных заданий) // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2002. – №1. – С. 46–52.
20. Алгазина Д.Г., Алгазин Г.И. Модельные исследования сетевого взаимодействия на конкурентных рынках с нефиксированными ролями участников. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015. – 146 с.
21. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Распределение ролей в базовых теоретико-игровых моделях // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2016. – №1 (89). – С. 92–96.

УДК 519.865

## **Моделирование поведения посредников в торговых системах товарами**

*Ю.Г. Алгазина*

*АлтГТУ им. И.И. Ползунова, г. Барнаул*

Торговая система товарами в большинстве случаев состоит из трех звеньев: производителя, посредника и потребителя. Посредническое звено позволяет соединить предложение и спрос, поэтому его поведение дифференцируется в зависимости от рыночных условий и мотивируется получением экономической выгоды.

Посредническая деятельность понимается исходя из затратных (торговая наценка) и функциональных составляющих (т.е. посредником выступают не только физические и юридические лица, привлеченные со стороны, но и точки продаж от самого изготовителя, реализующие товар конечному потребителю).

Посредник делает выбор, у каких поставщиков, по каким ценам и в каком количестве следует закупить товар. Кроме того, промежуточное звено принимает решение о том, каким товарным ассортиментом будет заниматься (замкнутым, насыщенным, широким или смешанным), поскольку ассортиментной политикой определяется положение посредника на рынке как оптового либо розничного продавца, а также круг поставщиков, состав клиентуры потребителей, цена продажи, объем продаж [1].

Задачей деятельности посреднического звена является определение таких объемов продаж и таких цен закупки и продажи продукции, при которых достигается максимальная экономическая выгода.

При взаимодействии с производителем посредник учитывает, что данное звено также ориентировано на максимизацию экономической выгоды при существующих рыночных ограничениях, а при взаимодействии с потребителем опирается на максимизацию покупателем полезности при одновременном снижении затрат, связанных с приобретением и использованием товара.

Согласование спроса и предложения достигается посредником путем совмещения разнонаправленных интересов производителя и потребителя.

Так, подстраиваясь под конъюнктуру рынка, посредник диктует или принимает как данность правила распределения приоритетов между субъектами рынка в выборе управлений (параметров) рынка: цен спроса и предложения, объемов рыночных сделок. Этот аспект пове-

дения посредника рассмотрен с применением моделей системного компромисса на примере структурных вариантов функционирования торговой системы [2].

Другой аспект поведения промежуточного звена связан с достижением равновесных состояний товарных рынков. Проведен формализованный анализ рынка с теми же управляющими параметрами в условиях конкурентного равновесия Курно, равновесия Штакельберга и неравновесия Штакельберга.

Кроме того, поведение посредников меняется при наличии на рынке более одного промежуточного звена. Изучены механизмы выбора наиболее выгодных партнеров при конкуренции между посредническими звеньями. Данные механизмы реализованы с применением комплекса экономико-математических моделей, в которых для разрешения конфликта между посредниками используется аппарат теории позиционных игр [3].

Другая возможность снижения конфликтов между промежуточными звеньями заложена в распределении производителем реализуемого товара между несколькими посредниками, т.е. диверсификации портфеля посредников. На модельном примере задачи оптимизации выбора посредников показана важность для производителя диверсификации портфеля посредников [4].

В данной статье изучено поведение посредника: в процессе согласования спроса и предложения путем выбора управлений рынка, достижения равновесных рыночных состояний; при наличии на рынке конкуренции со стороны других посреднических звеньев. Предложено формализованное описание данных процессов, реализованное в соответствующих модельных примерах.

### **Библиографический список**

1. Алгазина Ю.Г. Исследование рисков торговой системы с применением принципов системного компромисса / Монография. – Барнаул: Азбука, 2014. – 165 с.
2. Алгазин Г.И. Модели системного компромисса в социально-экономических исследованиях / Монография. – Барнаул: Азбука, 2009. – 239 с.
3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр: Учебник. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
4. Алгазина Ю.Г. Диверсификация портфеля посредников на товарных рынках // Экономические науки: научно-информационный журнал. – М.: Изд-во ООО «24-Принт», 2010. – № 10 (71). – С. 108–112.

УДК 314.382, 51.77

**Моделирование динамики показателя ожидаемой продолжительности жизни населения Алтайского края методом нечеткой линейной авторегрессии**

***С.В. Варакин<sup>1</sup>, Н.В. Варакина<sup>2</sup>***

*<sup>1</sup>АлтГУ, г. Барнаул, <sup>2</sup>Алтайский филиал РАНХиГС, г. Барнаул*

Математические модели, использующие технику нечетких множеств и нечеткой логики, применяются все шире в последние десятилетия. Начало этим исследованиям положила краеугольная работа Л. Заде [1]. Авторы ранее уже использовали технику нечетких чисел в гуманитарных исследованиях [3]. В данной работе продолжается использование техники нечетких чисел для моделирования социально-демографических процессов в Алтайском крае. Для построения математической модели динамики изменения ожидаемой продолжительности жизни при рождении в Алтайском крае предлагается использовать аппарат нечеткой линейной авторегрессии.

Модель стандартной линейной авторегрессии порядка  $r$  временного ряда  $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$  имеет вид

$$x_i = k_1 x_{i-1} + k_2 x_{i-2} + \dots + k_r x_{i-r} + b + e_i, \quad (1)$$

где  $e_i$  – случайная величина с нулевым математическим ожиданием [2]. В данной работе для построения модели временного ряда предлагается использовать зависимость вида

$$x_i = k_1 x_{i-1} + k_2 x_{i-2} + \dots + k_r x_{i-r} + b, \quad (2)$$

где все значения временного ряда  $x_i$  являются обычными числами, но считаются дефазификациями соответствующих нечетких треугольных чисел  $A_i$ , все коэффициенты являются обычными числами, а свободный член  $b$  является треугольным числом вида  $(b-\Delta, b, b+\Delta)$ . Коэффициенты регрессии  $k_j$ ,  $b$  и параметр степени нечеткости  $\Delta$  находится из условия наибольшей правдоподобности, т.е. решается задача  $\Delta \rightarrow \min$  при дополнительных условиях  $|x_i - k_1 x_{i-1} - k_2 x_{i-2} - \dots - k_r x_{i-r} - b| \leq \Delta$ ,  $i = r + 1, \dots, n$ . Эта задача сводится к задаче линейного программирования, которая решается симплекс-методом. В данной работе определяются параметры нечеткой линейной авторегрессии порядка 5 для временного ряда изменения показателя ожидаемой продолжительности жизни населения Алтайского края при рождении за период 2005–2016 гг. Сведения взяты из базы данных Алтайского краевого статистического управления. Данные представлены в следующих таблицах

Таблица 1 – Ожидаемая продолжительность жизни мужчины при рождении

Год				2005	2006	2007	2008
Ожидаемая продолжительность жизни мужчины, лет				58.26	60.33	60.90	61.32
2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
62.52	62.69	63.29	63.49	64.11	64.33	64.97	65.12

Таблица 2 – Ожидаемая продолжительность жизни женщины при рождении

Год				2005	2006	2007	2008
Ожидаемая продолжительность жизни женщины, лет				71.73	73.16	73.60	73.72
2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
74.37	74.17	74.72	74.79	75.44	75.72	75.84	76.34

Определение параметров нечеткой линейной авторегрессии с помощью симплекс-метода дает следующие значения:

Для моделирования ожидаемой продолжительности мужчин  $k_1 = 0.44$ ,  $k_2 = 0.78$ ,  $k_3 = -0.25$ ,  $k_4 = 0.23$ ,  $k_5 = -0.16$ ,  $b = -1.9$ ,  $\Delta = 0.049$ ;

Для моделирования ожидаемой продолжительности женщин –  $k_1 = 0.19$ ,  $k_2 = 0.51$ ,  $k_3 = -0.13$ ,  $k_4 = 0.087$ ,  $k_5 = 0.33$ ,  $b = 2.6$ ,  $\Delta = 0.12$ ;

Найденные параметры авторегрессии используются для построения шести прогнозных значений с 2017 по 2022 гг. Построим графики исходных и прогнозных значений на следующих рисунках:

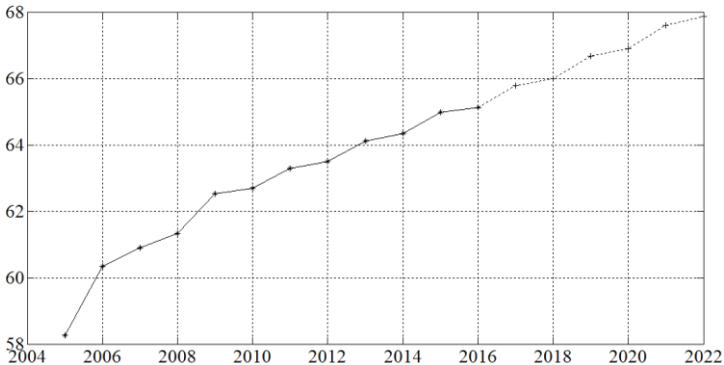


Рисунок 1 – Динамика ожидаемой продолжительности жизни мужчин при рождении

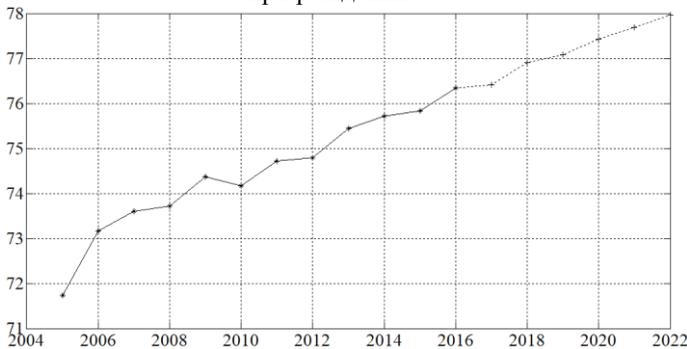


Рисунок 2 – Динамика ожидаемой продолжительности жизни женщин при рождении

Построенные графики наглядно показывают рост ожидаемой продолжительности жизни в Алтайском крае, что подтверждает потенциал использования нечеткой линейной авторегрессии и возможность ее использования в математическом моделировании социально-демографических процессов. Все вычисления проведены в системе MatLab.

*Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ, проект №16-06-00350 «Прогностический потенциал теории нечетких временных рядов в построении модели демографического поведения населения».*

#### **Библиографический список**

1. Zadeh L.A., Fuzzy sets // Information and Computation. – 1965. – Vol. 8. – P. 338–353.

2. Gebhard Kirchgässner, Jürgen Wolters, Introduction to Modern Time Series Analysis // Springer. – Berlin, 2007. – 274 p.

3. Вараксин С.В., Вараксина Н.В. Моделирование демографических показателей Алтайского края методом нечеткой линейной регрессии // Сборник трудов Всероссийской конференции по математике «МАК-2017», Барнаул, 29 июня – 2 июля 2017 г. : / АлтГУ [и др.] ; [гл. ред. Н. М. Оскорбин]. – Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2017.

## УДК 51-74

### Анализ предположений о стационарности некоторых временных рядов

*М.С. Вершинина*

*ЦУКС ГУ МЧС России по ХМАО-Югре, г. Ханты-Мансийск*

Временные ряды описывают чрезвычайно широкий круг явлений, например, метеорологические условия, характеристики состояния здоровья человека или макроэкономические показатели. Все статистические данные подобного рода изменяются во времени.

Типичные физические эксперименты являются стационарными рядами, их вероятностные свойства (функции математического ожидания и дисперсии) с течением времени остаются постоянными. Что касается финансовых временных рядов, то они являются варьирующими, нестационарными, их характеристики меняются во времени. В общем случае значения функций математического ожидания, дисперсии и корреляции могут быть зависимыми от момента времени  $t$ . Как правило, выделяются различные группы рядов по особенностям их нестационарности. Использование в регрессионной модели нестационарных временных рядов может привести к фиктивным результатам.

Для определения класса временного ряда существуют различные методы тестирования стационарности. Однако все тесты обладают некоторыми недостатками или ограничениями, ни один из них не является однозначным и самодостаточным. Принято использовать последовательно несколько тестов для достоверности результатов при анализе рядов на принадлежность их к классу стационарных или нестационарных. Обычно предлагаются подходы

- **визуальной оценки стационарности**: если имеется массив конкретных данных, но нет модели временных рядов, нужно построить и осмотреть график временного ряда. В предположении, что график исходного массива данных выглядит стационарным, проверить коррело-

грамму. Построить графики функции автокорреляции (АКФ) и частичной автокорреляционной функции (ЧАКФ);

- **статистической оценки стационарности:** в программном пакете финансовых вычислений Ecometrics Toolbox™ от Matlab реализовано четыре официальных метода тестирования на стационарность: ADF-тест (расширенный тест Дики-Фуллера), PP-тест (тест Филлипса-Перрона), KPSS-тест (тест Квятковского-Филлипса-Шмидта-Шина), Variance ratio-тест (процедура Кохрейна, отношение дисперсий).

В качестве объекта применения тестов используем временной ряд 1 – данные о количестве дорожно-транспортных происшествий (ДТП) в Ханты-Мансийском автономном округе-Югре за 2016 год. Этот массив данных представляет для нас интерес в силу ряда причин. Во-первых, применение современных методов анализа для подобных данных практически не применяется из-за отсутствия актуальной статистики. Во-вторых, в дальнейшем предполагается составление краткосрочного и среднесрочного прогноза развития количества ДТП в ХМАО-Югре. Особенно актуальным это является для проведения работ по профилактике и обеспечения готовности подразделений, осуществляющих ликвидацию последствий дорожно-транспортных происшествий (ГИБДД, оперативные бригады медицинских учреждений, силы и средства МЧС России, аварийно-спасательные формирования субъектов и муниципальных образований). К данным применим подходы визуальной и статистической оценки стационарности.

### **Визуальная оценка стационарности**

Если на графике коррелограммы заметно убывание линейных сегментов по наклонной вниз, это указывает на процесс единичного корня. Если длины линейных сегментов на участке АКФ медленно убывают по угасающей экспоненте (синусоиде), значит временной ряд нестационарный.

На рисунке 1 представленный график данных о ДТП выглядит стационарным, АКФ быстро убывает после нескольких первых значений, но линейные сегменты имеют повторяемость. ЧАКФ также после нескольких первых значений быстро убывает с последующей повторяемостью. Графический анализ показывает стационарность исследуемого временного ряда 1.

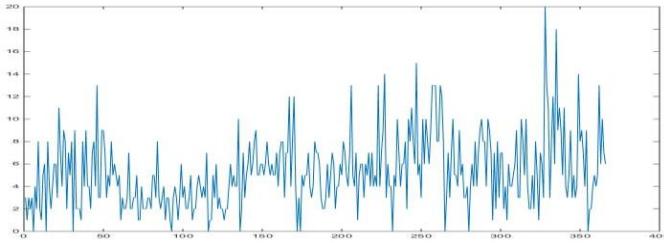


Рисунок 1 – График временного ряда 1

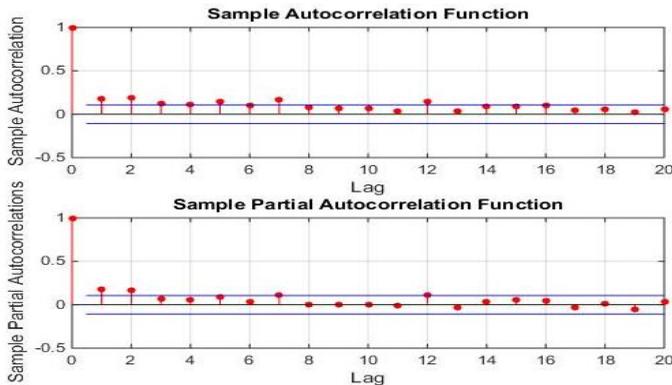


Рисунок 2 – Графики АКФ и ЧАКФ временного ряда 1

**Статистическая оценка стационарности.** В системе MatLab проведем 4 тестирования на стационарность ряда 1.

**1. ADF-тест** проверяет нулевую гипотезу о том, что процесс интегрирован в первой степени  $I(1): H_0 = Y_t \approx I(1)$ , относительно альтернативной гипотезы о том, что процесс не интегрирован,  $I(0)$ . В ADF-тесте проверяется отсутствие интеграции процесса, т.е. степень  $h=0(Y_t \approx I(0))$ , а несущественность этого параметра означает первую степень интеграции, т.е.  $h=1(Y_t \approx I(1))$ .

**2. Тест KPSS** проверяет нулевую гипотезу  $H_0 = Y_t \approx I(0)$ , т.е.  $d=0$ . Это означает стационарность процесса  $I(0)$  при альтернативной гипотезе  $H_1 = Y_t \approx I(1)$ , т.е.  $d=1$ , свидетельствующей о наличии интеграции первой степени.

**3. Тест PP** проверяет нулевую гипотезу о нестационарности процесса  $H_0 = Y_t \approx I(1)$  при альтернативной гипотезе  $H_1 = Y_t \approx I(0)$  о том, что процесс стационарен.

**4. Тест VR, Процедура Кохрейна** основывается на изучении характера поведения отношения дисперсий  $VR_k = \frac{V_k}{V_1}$ , где

$V_k = \frac{1}{k} D(x_t - x_{t-k})$ . Если  $x_t$  – случайное блуждание, то  $VR_k = 1$ , а если  $x_t$  – стационарный процесс, то  $VR_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

В таблице представлены результаты тестов, полученные в системе MatLab:

ADF	H=1	Результат указывает на отказ от процесса единичного корня в пользу альтернативной модели. Отвержение нулевой гипотезы говорит об отсутствии необходимости брать разности для приведения ряда к стационарному виду.
KPSS	H=0	Результат указывает на отказ от процесса единичного корня в пользу альтернативной модели.
PP	H=1	Результат указывает на отказ от процесса единичного корня в пользу альтернативной модели.
VR	H=0	Результат указывает на то, что ряд стационарный и не является процессом случайного блуждания.

Каждый из проведенных тестов подтверждает гипотезу стационарности. Результаты тестов подтверждают решение об отсутствии оснований для принятия нулевой гипотезы, т.е. временной ряд 1 характеризуется стационарностью типа  $I(1)$ .

**Выводы.** В данной работе применено два подхода для оценки стационарности временного ряда – визуальный и статистический. Оба показали стационарность исследуемого ряда 1. Полученные результаты анализа статистических данных по ДТП в ХМАО-Югре за 2016 год возможно использовать для разработки организационно-планирующих документов, разрабатываемых на уровне субъектов (планов прикрытия автомобильных дорог, программ строительства и реконструкций автомобильных дорог), а также для обеспечения в полной мере деятельности комиссии по безопасности дорожного движения.

### Библиографический список

1. Econometrics Toolbox™ R2017b User's Guide.

2. Иткина А.Я. Методические указания для практических занятий «Анализ временных рядов» / РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина. – 2012. – 56 с.
3. Бокс Дж., Дженкинс Г.М. Анализ временных рядов, прогноз и управление. – М.: Мир, 1974. – 406 с.
4. Экспериментальное исследование состоятельности оценок периодической составляющей М.С. Вершинина // МАК : «Математики – Алтайскому краю» : сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. – 361 с.

### УДК 911.3

## **К вопросу об исследовании производственной деятельности в хозяйствах населения Республики Бурятия**

*О.А. Екимовская*

*Байкальский институт природопользования СО РАН,  
г. Улан-Удэ*

Отечественные исследования значения личных подсобных хозяйств для экономики страны и жизнедеятельности сельской семьи активно развиваются с 1970-х гг., когда частное сельскохозяйственное производство в рамках домашнего хозяйства было официально «реабилитировано» [1–3]. Большинство современных работ отличается отраслевым подходом, анализирует социальные и экономические стороны производственного процесса, рассматривают условия формирования и дифференциации доходов, содержание и характер труда [4–6]. В меньшей степени распространены специальные математические и экономико-географические методы исследования, комплексно освещающие проблемы территориальной организации хозяйств населения, участие граждан в земельной реформе, товарность продукции, специализацию и значение отдельных отраслей в формировании домашнего бюджета.

В Республике Бурятия основными производителями сельскохозяйственной продукции являются хозяйства населения. Занимая всего 11% сельскохозяйственной площади республики, они производят 89,6% молока, 86,1% картофеля, 75,8% овощей и 57,3% мяса. Для большинства домохозяйств подсобное хозяйство является вынужденной стратегией выживания, производимая продукция идёт на нужды семьи. Денежные поступления, получаемые от продажи выращенной продукции, носят нерегулярный, сезонный характер. В то же время хозяйства, расположенные в районах первого порядка по отношению к

столице республике – г. Улан-Удэ, регулярно, в течение всего года привозят на продажу «в город» свежую молочную продукцию. Фактически речь идёт о мелкомасштабном товарном производстве. Эти хозяйства заняли экономическую нишу, предназначавшуюся для фермеров. Они являются «точками роста», отражающими один из путей развития современного аграрного сектора республики.

Хозяйства населения, сумели использовать выгоды своего экономико-географического положения, хорошую транспортную доступность и близость постоянного рынка сбыта, большой спрос на свежую молочную продукцию. Коллективные хозяйства в пригородных районах республики прекратили своё существование, оставшиеся испытывают нехватку товарного сырого молока для переработки. Молочная продукция коллективных предприятий дороже, чем продаваемая частниками «с машины». Продажа молока и овощной продукции осуществляется на необорудованных свободных местах возле крупных торговых центров, во дворах жилых домов рядом с автомагистралями.

Нами выбран крупномасштабный уровень исследования. Элементы территориальной и социально-экономической структуры, в том числе сформированные под влиянием натуральной экономики (использование земельного фонда, дифференциация отраслей растениеводства и животноводства, самообеспеченность и товарность продукции, диверсификация доходов), а также вклад личного подсобного хозяйства в благосостояние семей мы рассмотрим на примере хозяйств населения Республики Бурятия. Методические трудности изучения данного социально-экономического уклада в агрогеографии обусловлены присущей натуральному хозяйству закрытостью и неформальным характером организационно-экономических отношений.

Информационную базу исследования составили материалы Федеральной службы государственной статистики, Всероссийской сельскохозяйственной переписи 2016 г., похозяйственные книги муниципальных районов Республики Бурятия за 2010-2016 годы.

Актуальность исследования условий реализации молочной и овощной продукции обусловлена значительным вкладом хозяйств населения в аграрное производство республики. Но исследования производственной деятельности сельских домохозяйств, особенностей и условий реализации продукции затруднены присущей хозяйствам населения закрытостью и неформальным характером организационно-экономических отношений.

Положительная корреляционная зависимость между стоимостью валовой внутренней продукции (ВВП) и стоимостью молочной и мясной продукции, а также картофеля отражает наибольший вклад этих

отраслей в ВВП. О гарантированном получении дохода, стабильном развитии этих отраслей свидетельствует уравнение регрессии, рассчитанное по показателям 2013–2016 гг.:

$$\text{ВВП} = 112,14\text{К} - 57,22\text{О} + 387,59\text{С} \\ + 103,77\text{М} - 579,46\text{Я} - 59184,11\text{Ш} - 14174,92,$$

где ВВП – валовая внутренняя продукция: К – картофелеводство, О – овощеводство, М – молочное производство, С – производство мяса скота на убой, Я – производство яиц, Ш – шерстное овцеводство.

Коэффициент корреляции между ВВП и стоимостью продукции яичного птицеводства и шерстного овцеводства отрицательный, т. е. существует определенный экономический риск, связанный с производством данной продукции, производство которой не приносит гарантированной прибыли.

Несмотря на убыточность отдельных видов продукции, спектр производства в хозяйствах населения очень широк. Политика диверсификации позволяет компенсировать убыточные отрасли прибылью от производства доходной продукции, обеспечивать домохозяйство всеми необходимыми продуктами питания. Основные внутренние факторы, определяющие использование стратегии диверсификации, – это большой размер семьи, наличие в ней безработных и низкий уровень образования ее членов. Внешний фактор – уровень регионального развития. В экономически слабых регионах сельские домохозяйства в силу низкой платежеспособности вынуждены расширять набор производимой продукции, увеличивать источники несельскохозяйственной самозанятости (продажа грибов, ягод, дикоросов, рыбы, дичи, меха, оказание услуг, сдача в наем жилья, предоставление в аренду земли и т.д.).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ р\_а №18-45-030039

### **Библиографический список**

1. Калугина З.И., Антонова Т.П. Личное подсобное хозяйство сельского населения: проблемы и перспективы. – Новосибирск: Наука, 1984. – 190 с.
2. Шмелев Г. И. Личное подсобное хозяйство. Возможности и перспективы. – М.: Политиздат, 1983г. – 96 с.
3. Серова Е.В., Карлова Н.А, Тихонова Т. и др. Альтернативная занятость в сельской местности России. – <http://www.iet.ru/files/text/usaaid/alter.pdf>.
4. Буздалов И.Н. Аграрная теория: концептуальные основы, тенденция развития, современные представления. – М.: Академия, 2005. – 411 с.

5. Прауст Р.Э. Апология и проблематика семейного сельского хозяйства // Изд-во «Экономика российских деревень» (ЭРД), Всероссийский институт аграрных проблем и информатики имени А.А. Никонова (ВИАПИ), 2008. – Вып. 11. – 249 с.

6. Лысенко Е.Г. Личные подсобные хозяйства населения в структуре сельскохозяйственного производства // Вестн. РАСН. – 2007. – № 1. – С. 13–15.

**УДК. 517.958**

### **Неявные итерационные схемы для стационарных задач гидродинамики**

***Е.К. Ергалиев, А.Б. Тойганбаев, А.Солтанбеккызы**  
ВКГУ им. С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан*

Рассматривается стационарная задача несжимаемой жидкости в переменных «вектор скорости, давление». Для построенной итерационной схемы показана ограниченность итерации и скорость сходимости.

В прямоугольной области  $D = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N\}$  рассматриваем стационарную систему уравнений несжимаемой жидкости

$$(\vec{U}, \nabla)\vec{U} + \text{grad}p = \nu \Delta \vec{U} + \vec{f}, \quad (1)$$

$$\text{div} \vec{U} = 0, \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$\vec{U} \Big|_{\partial D} = 0, \quad (3)$$

где  $\vec{U} = (U_1, U_2, \dots, U_N)$  – вектор скорости,  $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$  – вектор-функция источников,  $p$  – гидростатическое давление,  $\nu$  – коэффициент вязкости,  $N = 2, 3$  – пространственная размерность задачи.

Для численного решения задачи (1)–(3) конечно-разностным методом рассмотрим итерационную схему вида

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + L_h \vec{U}^{n+1} + \overline{\text{grad}_h} p^{n+1} = \nu \Delta_h U^{n+1} + \vec{f}^n, \quad (4)$$

$$\varepsilon \frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} + \underline{\text{div}_h} \vec{U}^{n+1} = 0, \quad (5)$$

с однородными краевыми условиями

$$\vec{U}^{n+1} \Big|_{\partial D_h} = 0, \quad (6)$$

где  $\tau, \varepsilon$  – положительные итерационные параметры.

Здесь и в далее сохранены общеизвестные обозначения из теории разностных схем [1]. Предположим, что операторы  $L_h$ ,  $m = \overline{1, N}$ , соответствующие аппроксимации конвективных членов, являются энергетически “нейтральными”, т.е. [2, 3]

$$(L_h U_m, U_m) = 0, \quad \forall m = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Для доказательства ограниченности итерации (4)–(6) умножим уравнение (4) скалярно в  $L_2$  на  $2\tau U^{n+1}$ , а уравнение (5) – скалярно в  $L_2$  на  $2\tau p^{n+1}$ . Полученные результаты складываем, тогда

$$\begin{aligned} & \|\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n\|^2 + \|\bar{U}^{n+1}\|^2 - \|\bar{U}^n\|^2 + \\ & + 2\tau \nu \|\nabla_h \bar{U}^{n+1}\|^2 + \varepsilon (\|p^{n+1}\|^2 - \|p^n\|^2) + \\ & + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\operatorname{div} \bar{U}^{n+1}\|^2 = 2\tau (\bar{f}, \bar{U}^{n+1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Из уравнения (4) оценим норму  $\|p^{n+1}\|$ ,

$$\|p^{n+1}\| \leq c_0 \left( \frac{1}{\tau} \|\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n\| + \nu \|\nabla_h \bar{U}^{n+1}\| + c_1 \|\bar{U}^n\| \cdot \|\nabla_h \bar{U}^{n+1}\| + \|\bar{f}\|_{-1} \right),$$

где  $\|\bar{f}\|_{-1} = \sup_{\bar{\varphi} \in H_0^1} \frac{(\bar{f}, \bar{\varphi})}{\|\nabla \bar{\varphi}\|}$ ,  $\bar{\varphi} \in H_0^1$ .

Возведя обе части в квадрат, оценивая правую часть, получим

$$\begin{aligned} \|p^{n+1}\|^2 & \leq 4c_0^2 \left( \frac{1}{\tau^2} \|\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n\|^2 + \nu^2 \|\nabla_h \bar{U}^{n+1}\|^2 + \right. \\ & \left. + c_1^2 \|\bar{U}^n\|^2 \cdot \|\nabla_h \bar{U}^{n+1}\|^2 + \|\bar{f}\|_{-1}^2 \right) \end{aligned}$$

Далее, умножим обе части полученного неравенства на  $\varepsilon \gamma \tau^2$ , складывая с (8), имеем

$$\begin{aligned} & \|\bar{U}^{n+1}\|^2 - \|\bar{U}^n\|^2 + (1 - 4c_0^2 \varepsilon \gamma) \|\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n\|^2 + \\ & + 2\tau (\nu - 2c_0^2 \varepsilon \gamma \alpha (\nu^2 + c_1^2 \|\bar{U}^n\|^2)) \|\nabla_h \bar{U}^{n+1}\|^2 + \\ & + \varepsilon (1 + \gamma \tau^2) \|p^{n+1}\|^2 - 4c_0^2 \varepsilon \gamma \tau^2 \|\bar{f}\|_{-1}^2 - \varepsilon \|p^n\|^2 \leq \tau \|\bar{f}\|_{-1}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) следует оценка

$$\begin{aligned} & \|\bar{U}^{n+1}\|^2 + (1 - 4c_0^2 \varepsilon \gamma) \|\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n\|^2 + \\ & + 2\tau(\nu - 2c_0^2 \varepsilon \gamma \alpha(\nu^2 + c_1^2 M^2)) \|\nabla_h \bar{U}^{n+1}\|^2 + \\ & + \varepsilon(1 + \gamma \tau^2) \|p^{n+1}\|^2 \leq \|\bar{U}^n\|^2 + \varepsilon \|p^n\|^2 + \tau(1 + 4c_0^2 \varepsilon \gamma \tau) \|\bar{f}\|_{-1}^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $M$  положительная константа. Пусть  $\|\bar{U}^n\|^2 + \varepsilon \|p^n\|^2 \leq M^2$ , тогда  $M$  выбираем так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|\bar{U}^{n+1}\|^2 + \varepsilon \|p^{n+1}\|^2 \leq M^2. \quad (11)$$

При фиксированном  $M$  выбираем  $\varepsilon, \tau$  таким образом, чтобы выполнялись неравенства,

$$\begin{aligned} 1 - 4c_0^2 \varepsilon \gamma & \geq 0, \\ \nu - 2c_0^2 \varepsilon \gamma \alpha(\nu^2 + c_1^2 M^2) & \geq 0.5. \end{aligned}$$

Тогда из неравенства (10) имеем,

$$\left(1 + \frac{\tau}{2}\right) \|\bar{U}^{n+1}\|^2 + \varepsilon(1 + \gamma \tau^2) \|p^{n+1}\|^2 \leq \|\bar{U}^n\|^2 + \varepsilon \|p^n\|^2 + 2\tau \|\bar{f}\|_{-1}^2 \quad (12)$$

Из (12) видно, что для выполнения (11) достаточно, чтобы имела место оценка

$$(1 + c_2 \tau^2)^{-1} (M^2 + 2\tau \|\bar{f}\|_{-1}^2) \leq M^2,$$

где  $c_2 = \min\{0.5, \gamma\}$ . Из последнего неравенства получаем следующую оценку ограниченности итерации (4)–(6)

$$M^2 \geq \max\left\{\|\bar{U}^0\|^2 + \varepsilon \tau \|p^0\|^2, \frac{2}{c_2} \|\bar{f}\|_{-1}^2\right\}.$$

### Библиографический список

1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
2. Данаев Н.Т., Ергалиев Е.К. Об одном итерационном методе решения стационарных уравнений Навье-Стокса // Вычислительные технологии. – Новосибирск, 2006. Т. 11, №4. – С. 37–43.
3. Ергалиев Е.К. Неявные итерационные схемы для решения стационарных задач несжимаемой жидкости с большим запасом устойчивости // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2018. – №1(99). – С. 81–87.

## Компьютерное моделирование причинно-следственных связей в предположения конfluence анализа

*Ж.И. Косолап, Н.М. Оскорбин*

*АлтГУ, г. Барнаул*

*Ключевые слова:* математическое моделирование процессов, метод наименьших квадратов, конfluence анализ, компьютерное моделирование

Цель работы – постановка задачи моделирования в предположении конfluence анализа и создание компьютерной модели для изучения данного метода.

В современном мире информационные технологии прочно закрепились в нашей жизни, доступность и объем получаемой информации, скорость ее обработки требуют нововведений в сфере математических методов. Для применения математических методов, прежде всего, необходимо построить математическую модель системы, под которой понимают приближенное описание системы с помощью математических соотношений. Математическое моделирование представляет собой исследование математической модели, которое включает построение модели, изучение ее и перенос полученных сведений на моделируемую систему.

Рассмотрим одно из актуальных направлений математического моделирования, которым является конfluence анализ, применяемый для исследования реальных процессов по результатам наблюдения за входными и выходными переменными в случае, когда эти переменные измеряются с ошибками.

В литературе конfluence анализ определяется как совокупность методов математического моделирования процессов в условиях, когда входные переменные  $x_1, \dots, x_n$  являются количественными (случайными или неслучайными) и наблюдаются в каждом опыте с ошибками. Этим методы конfluence анализа отличаются от методов классического регрессионного анализа.

Относительно ошибок обычно предполагается их случайность и независимость от входных переменных, от прошлых значений. Предполагаем, что ошибки наблюдений, как входных факторов, так и выходной переменной процесса являются нормальными с нулевыми математическими ожиданиями и постоянной в каждом наблюдении дисперсией. Связь входных и выходных переменных предполагаем заданной и

линейной следующего вида:  $f(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ , а задачу конфлюэнтного анализа можно ограничить оценкой истинных значений коэффициентов приведенного уравнения. Другие постановки задач анализа данных рассмотрены в работе [1].

Нахождение оценок истинных коэффициентов моделируемого процесса сводится к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$a_i(R_{ii} - d_i) + \sum_{k=1, k \neq i}^n a_k R_{ik} = R_{iy}, \quad i, k = 1, \dots, n$$

В приведенной системе  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными коэффициентами выступают ковариации соответствующих переменных, вычисленные по таблице наблюдений.

Работоспособность конфлюэнтного анализа оценивалась при сравнении с методом наименьших квадратов (МНК) путем организации многовариантных компьютерных экспериментов в среде Excel.

Рассматривался трехфакторный линейный процесс входные переменные, которого моделировались как равномерно распределенные в заданных интервалах. Ошибки измерения моделировались независимыми от значений входных и выходных переменных, нормально распределенными с заданными дисперсиями. В результате проведения серий вычислительных экспериментов показано, что при больших ошибках наблюдений метод конфлюэнтного анализа работает эффективнее, чем метод наименьших квадратов.

### **Библиографический список**

1. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования : монография. – 2-е изд. испр. и доп. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2013. – 264 с.

**УДК 519.87**

### **Обзор моделей некооперированной олигополии**

***К.И. Костюк***

*АлтГУ, г. Барнаул*

*Ключевые слова:* микроэкономика, олигополия, рассредоточенный рынок, однородный продукт, равновесие, конкуренция, общественное благосостояние, объемы производства, издержки, эффективность.

Развитие теории микроэкономики, которое исследует поведение отдельных элементов и структур, таких, как отрасли производства и предприятия, товарные и финансовые рынки, банки, различные фирмы, домашние хозяйства и многое другое, привело к формированию новых самостоятельных разделов рыночной экономики. Экономические аспекты деятельности предприятия описывают организационные формы финансового и хозяйственного планирования фирмы, способы мобилизации капитала, ценообразования, расчеты издержек производства и реализации продукции, уровень монополизации рынка и оценка конкурентоспособности.

Основной задачей микроэкономики является рациональное распределение ограниченных ресурсов предприятия, для достижения поставленных целей. К таким задачам относятся, распределение объемов производства отдельных товаров и цены на них, влияют дохода на цели потребления и на сбережения, распределение общей суммы расходов на потребление между различными видами товаров и услуг. Проблема рационального ведения хозяйства рассматривается с помощью метода математической оптимизации. Целью данного метода является нахождение оптимального значения переменных, при которых целевая функция достигает максимума. Для реализации данного метода использовалась концепция теории игр [1 с.227].

Самые ранние классические модели, описывающие конкуренцию на товарном рынке, были предложены в начале XX века. Совокупность таких моделей в условиях ограниченного количества агентов (производителей) относится к классу моделей олигополии. Как правило, число олигополистов ограничено несколькими фирмами, хотя в некоторых случаях может доходить до N-го количества производителей. Размер каждой фирмы должен позволять ей значимо влиять на ситуацию на рынке. Именно для олигополии в наибольшей степени характерно стратегическое взаимодействие участников.

Общая форма модели конкуренции агентов в условиях олигополии имеет вид:

$$\pi_i(y_i, p_i(y_i)) \rightarrow \max_{i \leq (1, \dots, N)} y_i \quad (1)$$

где  $p_i$  – цена реализации товара  $i$ -ой фирмы;  $y_i$  – объем реализации товара продукции  $i$ -ой фирмы.

Классические варианты модели (1), описывающие конкуренцию по объемам производства (управляемая переменная  $y_i$ ) и существующие ситуации равновесия на нем принадлежат французскому математику, экономисту и философу Антуану Огюстено Курно в 1838 году [2; 8, с. 443–449] и немецкому экономисту Генриху фон Штакельбергу в 1934 году [3; 8, с. 443–449].

При максимизации прибыли каждый олигополист должен учитывать реакцию конкурентов. В частности, при понижении цены они будут сокращать, а при повышении – увеличивать поставки на рынок. Если олигополисты в состоянии спрогнозировать действия остальных участников рынка (т.е. построить их кривые реакции  $Y_i(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ ), то они могут отыскать свой оптимальный объем поставок продукции. Однако равновесие в чистых стратегиях существует не всегда. Множественность результатов равновесия  $Y_i = f(y_{-i})$  приводит к невозможности построения конечной теории олигополии. Демонстрацией этого факта явилось формулировкой множества различных равновесных решений, соответствующих разным стратегиям поведения агентов.

Эдварт Чемберлен, выдвинул положение о взаимозависимости производителей. Когда количество продавцов небольшое и существует однородный товар, олигополисты будут избегать действий, которые привели бы к ухудшению положения всех игроков. в интересах каждого действовать так, чтобы их совместная прибыль была бы максимальной. Таким образом, не вступая в сговор, они придут к желательности установления монопольной цены на свою (однородную) продукцию. Необходимость формальных отношений между олигополистами отсутствует. Наблюдается доктрина сознательного параллелизма. Олигополисты действуют независимо (никаких соглашений между ними нет), при этом они не конкурируют друг с другом [4, с. 62–70].

Модель Курно неоднократно подвергалась критике в связи с тем, что именно цена, а не выпуск продукции должна являться стратегической переменной. Данные сводились к тому, что в условиях однородности продукции логичнее ждать от фирм, действующих на рынке, конкуренции в ценах, а не в объемах производства. Вследствие чего возникла классическая модель ценовой олигополии, которая была предложена в 1883 г. Жозефом Бертраном [5; 8, с. 443–449] как альтернатива модели Курно. В модели Бертрана каждый из олигополистов принимает уровень цен конкурентов как данный и независимо от всех остальных принимает решение об уровне своей цены.

При предположении о том, что весь спрос достается продавцу, установившему минимальную цену, и одинаковых для всех средних издержках производства  $C$ , единственным равновесием Нэша будет всеобщая продажа продукции по издержкам  $i$ , как следствие, нулевая экономическая прибыль. Действительно, при любых ценах конкурентов, превышающих себестоимость, оптимальной стратегией является удешевление продукции с целью захвата всего рынка. Очевидно, конкуренты не захотят мириться с такой ситуацией, тем более что они

тоже имеют возможность снизить цены, переманить покупателей и обеспечить себе максимальную при данных условиях прибыль. Если же средние издержки производства  $c_i$  различны, то фирма (одна или несколько) с минимальными издержками устанавливает максимальную цену, блокирующую вход на рынок конкурентов.

Равновесие на рынке в модели Бертрана достигается, когда ни один из конкурентов больше не может получать выгоды от снижения цены. При этом предельные и средние затраты остаются неизменными, экономичность от масштабов производства отсутствует.

Ввести в модель Бертрана ограничение мощности предложил Фрэнсис Исидор Эджуорт. В модели вводится условие - ограничение производственных мощностей. В модели Эджуорта фирма имеет предельные издержки  $C$ , которые могут возрастать вместе с выпуском продукции. Фирма имеет возможность увеличить объем производства выше его эффективного уровня, например за счет аренды дополнительного оборудования. При этом выпуск каждой фирмы ограничен величиной, составляющей половину спроса при цене, равной предельным издержкам. Поскольку функции предельных издержек всех конкурентов монотонно возрастающие, система имеет единственное решение, в котором фирмы получают положительную прибыль. Равновесие существует только в смешанных стратегиях. Стабильного равновесия не наблюдается. Более подробно данная модель исследована в работах М.Бекмана [6] для случайного рационирования и Р.Левитана и М.Шубика [7] для эффективного рационирования.

Анализ литературных источников показал, что имеющиеся подходы не учитывают возможностей предприятия по управлению процессами функционирования, а так же переменных эффектов от расширения масштабов деятельности производства. Все рассмотренные модели поведения олигополистов базируются на предположительных вариациях, на определенных предположениях соперников-олигополистов о поведении друг друга в условиях конкуренции. Можно заметить, что конкурентная борьба является важнейшим элементом рыночной экономики и вместе с механизмом цен служит необходимым ее регулятором. Разумеется, для конкуренции требуется наличие на рынке множества производителей однородных товаров, причем каждый из этих производителей не мог бы предоставить на рынок такое количество товаров, которое бы заметно повлияло на установившуюся рыночную цену [1, с. 227–244; 8, с. 443–449].

### Библиографический список

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория: пер. с англ. / под ред. Г.И. Жуковой, Ф.Я. Кельмана. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 576 с.
2. Cournot A. Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses. – 1838.
3. Von Stackelberg, H. Markform und Gleichgewicht. Wien: Springer, 1934.
4. Чемберлин Э. Теория монополистической конкуренции. – М., 1996.
5. Bertrand J. Theorie Mathematique de la Richesse Sociale // Journal des savants. – 1883 – P. 499–508.
6. Beckman M. Edgeworth-Bertrand Duopoly Revisited // Operation Research-Verfahren, III. – Verlag, 1967.
7. Levitan R. Shubik M. Price Duopoly and Capacity Constraints // International Economic Review. – 1972. – V. 13. – P. 111–122.
8. Kreps D. A Course in Micro-economic Theory. New York et al., 1990.

### УДК 519.8

#### Исследование точности интервальных оценок в задачах моделирования процессов

*М.Н. Мадияров<sup>1</sup>, Н.М. Оскорбин<sup>2</sup>, С.И. Суханов<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*ВКГУ им. С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск;*

<sup>2</sup>*АлтГУ, г. Барнаул*

**Ключевые слова:** моделирование процессов, интервальные системы линейных алгебраических уравнений, модели прогноза, модели оценки параметров.

В данной работе проводится исследование точности интервальных оценок параметров процессов. Различные аспекты этой задачи и статистические методы ее решения рассматривались, например, в работах [1–7]. В данной работе исследование выполняется методами вычислительного эксперимента процесса прогноза прибыли корпорации [8].

Прикладной интервальный анализ в нашем случае линейных моделей детерминированных процессов проводится с использованием множеств решений ИСЛАУ, коэффициенты и правая часть которой записана по результатам интервальных наблюдений. В матричной

форме ИСЛАУ записывается интервальной ( $N \times n$ ) матрицей коэффициентов и ( $N \times 1$ ) интервальным вектором правой части в следующем виде:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (1)$$

Интервальное задание СЛАУ (1) понимается так, что элементы матриц  $\mathbf{A}, \mathbf{b}$  заданы интервалами:  $A^H \leq \mathbf{A} \leq A^V$  и  $B^H \leq \mathbf{b} \leq B^V$ .

Применительно к задачам анализа данных в литературе [2, 3, 5, 6] рассматриваются три базовых множеств решений ИСЛАУ: объединенное множество решений,  $\Xi uni(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  предикатная формула которого записывается так:

$$\Xi uni(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in R^n / (\exists \mathbf{A} \in \mathbf{A})(\exists \mathbf{B} \in \mathbf{b})(\mathbf{Ax} = \mathbf{B})\}; \quad (2)$$

допусковое  $\Xi tol(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и управляемое  $\Xi ctl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  множества решений:

$$\Xi tol(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x / (\forall \mathbf{A} \in \mathbf{A})(\mathbf{Ax} = \mathbf{B})\}; \quad \Xi ctl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x / (\forall \mathbf{B} \in \mathbf{b})(\mathbf{Ax} = \mathbf{B})\}. \quad (3)$$

Запишем задачи исследования множеств решений ИСЛАУ, которые возникают при моделировании процессов. Обозначим  $X_S \subset R^n$  – одно из трех введенных множеств решения ИСЛАУ в задаче анализа экспериментальных данных. Эти задачи запишем в обозначениях работы [8].

1. **Задача прогноза выходной переменной** моделируемого процесса на период времени ( $N+1$ ). Учитываем при прогнозе только оценки прибыли предприятий:  $A_i^{H, N+1}; A_i^{V, N+1}, i = 1, \dots, n$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \hat{B}^{H, N+1} &= \min_{x \in X_S} (A_1^{H, N+1} x_1 + \dots + A_n^{H, N+1} x_n); \\ \hat{B}^{V, N+1} &= \max_{x \in X_S} (A_1^{V, N+1} x_1^p + \dots + A_n^{V, N+1} x_n^p). \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что прогноз по измеренным значениям  $A_i^{N+1}, i = 1, \dots, n$  не является корректным, поскольку оцениваемый интервал может не содержать истинного значения  $B^{N+1}$  прогнозируемой прибыли.

2. **Задача оценки коэффициентов** линейной зависимости моделируемого процесса (предполагаем для нашего примера, что коэффициенты баланса прибыли корпорации нам неизвестны).

В качестве интервальной оценки этих коэффициентов можно решить  $2n$  задач линейного программирования. Например,  $x_1$  принадлежит интервалу  $[x_1^H, x_1^V]$ :

$$x_1^H = \min_{x \in X_S} x_1; \quad x_1^V = \max_{x \in X_S} x_1. \quad (5)$$

Имитация условий анализа прибыли корпорации проводилась в среде Excel при следующих исходных данных:  $n=3$ ;  $N=12$ ; истинные значения прибылей  $A'_i$ ,  $i=1, \dots, 3$  в каждом из  $(N+1)$  временных периодов принимались как равномерно распределенные псевдослучайные числа на интервалах  $[0, 100]$ ; соответствующие значения прибыли корпорации  $B'$  определялись на основе балансного уравнения; ошибки измерения (2) и (3) во всех испытаниях принимались равномерно распределенными на одинаковых симметричных относительно нуля интервалах:  $[-5, 5] \times [-5, 5] \times [-5, 5] \times [-\varepsilon_B, \varepsilon_B]$ . Здесь верхние оценки ошибки выходной переменной задавались переменными для обеспечения условия, при котором исследуемое множество решений ИСЛАУ не пусто и сравнимо с двумя другими. Пример точных значений прибылей корпорации и их оценок представлен в таблицах 1 и 2.

Объединенное множество решений ИСЛАУ содержит точку  $x^d = (1, 1, 1)$  по определению этого множества для правильных измерений, что следует и по результатам численного решения задачи (10).

Таблица 1 – Данные без ошибок измерения

	A1	A2	A3	B
1	23,93	19,84	97,14	140,91
2	13,84	91,08	65,11	170,03
3	35,27	18,48	70,67	124,42
4	68,21	39,87	84,02	192,09
5	76,78	22,20	13,35	112,33
6	24,28	88,86	64,10	17 ,23
7	1,60	6 ,28	26,29	99,18
8	12,92	49,01	83,69	145,62
9	91,99	26,19	21,89	140,07
10	29,43	61,70	16,77	107,90
11	58,73	80,64	95,76	235,12
12	83,98	89,17	5,45	178,60
<b>13</b>	<b>17,01</b>	<b>73,08</b>	<b>51,91</b>	<b>142,00</b>

Таблица 2 – Данные с ошибок измерения,  $\varepsilon_B = 10$ 

	A1	A2	A3	B
1	26,99	19,99	98,11	149,74
2	17,80	93, 8	68,41	160,7
3	38,41	14,64	67,47	127,32
4	67,48	38,84	88,28	191,76
5	75,53	23,05	11,26	113,07
6	19,37	83,87	64,64	182,70
7	16,57	57,07	30,77	94,54
8	17,00	47,84	79,19	150,69
9	89,93	27,74	22,38	147,71
10	24,47	65,00	18,49	107,10
11	57,86	84,12	95,31	240,01
12	79,54	89,72	4,98	169,15
<b>13</b>	<b>15,94</b>	<b>73,27</b>	<b>47,94</b>	<b>135,37</b>

Для данных таблицы 2 решение задач (8) является следующим:

$$\begin{aligned} \hat{B}^{H,N+1} &= 109,7; \quad \hat{B}^{V,N+1} = 160,3; \quad B^{C,N+1} \\ &= 0.5(\hat{B}^{H,N+1} + \hat{B}^{V,N+1}) = 135; \quad \Delta = 17.8\%. \end{aligned} \quad (11)$$

Для сравнения приведем значения и погрешности прогноза по оценкам аналитиков. Эти данные в порядке выражения (11) имеют следующие значения: 125,4; 145,4; 135,4; 7,0%. Приведем соответствующие значения, полученные с использованием балансового уравнения по нижним и верхним значениям прибылей предприятий: 122,2; 152,2; 137,2; 10,6%. Приведенные числовые данные не противоречат визуальному анализу и свойствам объединенного множества решений. Следует отметить, что использование объединенного множества решений ИСЛАУ в качестве инструмента прогноза прибыли корпорации в рассмотренном случае не позволяет улучшить оценки, полученные визуальным анализом данных.

Допусковое множество решений ИСЛАУ для данных таблицы 2 и заданных предельных значений погрешностей измерения является пустым. Этот результат вполне согласуется с исследованиями С.П. Шарого [3], т.е. в данном случае произведение  $Ax$  получает «большой размах» в сравнении с размахом вектора  $b$ . В нашем случае для данных таблицы 1 и принятых оценок погрешностей измерения, в кото-

рых  $\varepsilon_B = 20$  с дополнительным коэффициентом расширения  $k_B$  размаха вектора  $\mathbf{b}$  равным двум ( $k_B = 2$ ) получена ИСЛАУ с подходящими свойствами. Ее исследование для 15 вариантов выборок независимых ошибок измерения показало, что в 5 вариантах допустимое множество не пусто и содержит точку  $x^d = (1, 1, 1)$ ; в 8 вариантах оно не пусто, но необходимое для корректности модели условие  $x^d \in$  не выполнено; в 2 вариантах множество  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  оказалось пустым.

Для одного из первой группы вариантов приведем решение задач (8):

$$\begin{aligned} \hat{B}^{H,N+1} &= 121,1; \quad \hat{B}^{V,N+1} = 162,5; \quad B^{C,N+1} = \\ &= 0,5(\hat{B}^{H,N+1} + \hat{B}^{V,N+1}) = 141,8; \quad \Delta = 14,6\% \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим формально по аналогии с вышеизложенным свойства управляемого множества решений ИСЛАУ для данных таблицы 2 и заданных предельных значений погрешностей. Следует отметить, что примеры использования множества  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  в задачах моделирования процессов представлены в работе [8].

Как и следовало ожидать, это множество для рассматриваемой таблицы измерений является пустым. Поступая зеркально схеме исследования множества  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  зададим  $\varepsilon_B = 5$  с дополнительным коэффициентом сжатия размаха вектора  $\mathbf{b}$  равным 0,6 ( $k_B = 0,6$ ) и получим ИСЛАУ с подходящими свойствами. Ее исследование для 15 вариантов выборок независимых ошибок измерения показало, что в 11 вариантах управляемое множество не пусто и содержит точку  $x^d = (1, 1, 1)$ ; в 4 вариантах оно не пусто, но необходимое для корректности модели условие  $x^d \in \Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  не выполнено.

Для одного из первой группы вариантов приведем решение задач (8):

$$\begin{aligned} \hat{B}^{H,N+1} &= 119,1; \quad \hat{B}^{V,N+1} = 160,9; \quad B^{C,N+1} = \\ &= 0,5(\hat{B}^{H,N+1} + \hat{B}^{V,N+1}) = 140; \quad \Delta = 14,7\% \end{aligned} \quad (13)$$

Как видим, эти данные с учетом точности их вычисления совпадают с (12), как и оценки погрешностей с использованием визуальных методов прогнозирования.

Полученные результаты позволяют уточнить методические подходы применения теоретических результатов ИСЛАУ в задачах анализа данных и математического моделирования реальных процессов.

**Библиографический список**

1. Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701–709.
2. Шарый С.П. Решение интервальной линейной задачи о допусках // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 10. – С. 147–162.
3. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск: Изд-во «XYZ», 2017. – 618 с.
4. Оскорбин Н.М., Жилин С.И., Максимов А.В. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределенности // Известия АГУ. – 1998. – № 1. – С. 35–38.
5. Жолен Л. и др., Прикладной интервальный анализ. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 468 с.
6. Шарый С.П. Сильная согласованность в задаче восстановления зависимостей при интервальной неопределенности данных // Вычислительные технологии. – 2017. – Т. 22, № 2. – С. 150–172.
7. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования. – 2-е изд. испр. и доп. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013. – 264 с.
8. Мадияров М.Н., Оскорбин Н.М., Суханов С.И. Примеры интервального анализа данных в задачах моделирования процессов // Известия АГУ. – 2018. – № 1.

**УДК 518.868**

**Исследование применения математической модели  
линейного программирования для оптимизации  
транспортного маршрута (на примере автотранспортных  
грузоперевозок Москва – Калининград)**

***А.В. Михалева***  
*АлтГУ, г. Барнаул*

*Ключевые слова:* грузоперевозка, линейное программирование, транспортная задача, математическая модель, оптимизация, методы оптимизации

Целью исследования выступает изучение возможности практического применения математической модели линейного программирования для оптимизации процесса транспортировки, то есть составления оптимального её плана.

С каждым годом всё большую популярность набирают транспортные перевозки. Это связано со стремительным производственным и экономическим развитием. Для производства и ведения бизнеса транспортные грузовые перевозки имеют большое значение. Ведь грамотно оптимизированная перевозка грузов поможет снизить стоимость затрат на саму перевозку, тем самым снизить стоимость конечного товара для потребителей, повысить рентабельность бизнеса, а также сэкономить некоторую сумму денег и перераспределить их на другие нужды организации. Именно по-этому вопрос оптимизации транспортировки грузов и по сей день не теряет своей актуальности.

Модель – некоторое описание логики системы, при помощи которого могут быть исследованы свойства данной системы и спрогнозированы варианты её поведения.

При помощи метода линейного программирования [1] решим задачу перевозки груза (10 тонн меди) автомобильным транспортом из Москвы в Калининград. При помощи сервиса Яндекс карты [2] было построено три маршрута:

- 1) Россия (Москва) – Беларусь – Литва – Россия (Калининград);
- 2) Россия (Москва) – Латвия – Литва – Россия (Калининград);
- 3) Россия (Москва) – Беларусь – Латвия – Литва – Россия (Калининград).

Будем оптимизировать данную схему перевозки относительно двух важных для нас параметров:

- а) минимальные совокупные затраты на прохождение маршрута;
- б) минимальное расстояние от пункта загрузки в Москве до пункта выгрузки в Калининграде.

Не стоит забывать, что в условиях ежемесячного роста цен на топливо оптимизация маршрута и рациональный выбор параметров перевозки позволит существенно сократить расходы на транспортные издержки.

Расчеты и проведенный анализ показывают, что наиболее выгодным вариантом для перевозки груза стоит считать маршрут №2. Это обусловлено тем, что расстояние маршрута №2 сократилось по сравнению с остальными на 100 км. Расходы на перевозку в маршруте №2 по-сравнению с №3 уменьшились в 1,7 раза, а по-сравнению с №1 в 2,1 раза.

### **Библиографический список**

1. Плоткин Б.К., Делюкин Л.А. Экономико-математические методы и модели в логистике : учебное пособие. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2010. – 96 с.

2. СибАК [Электронный ресурс]. – Заглавие с экрана. Режим доступа: <https://sibac.info/studconf/econom/xi/32971>

## УДК 519.8

### Математическое моделирование линейных процессов по наблюдениям с интервальными ошибками

*Ю.И. Ничкова, Н.М. Оскорбин*

*АлтГУ, г. Барнаул*

*Ключевые слова:* методы анализа данных, интервальная система линейных алгебраических уравнений, управляемое множество решений ИСЛАУ, вычислительный эксперимент

Целью исследования является изучение возможностей прикладного интервального анализа в задачах моделирования процессов при ошибках наблюдения всех переменных и его сравнения с методом наименьших квадратов. Исследование проводится методами компьютерного моделирования и вычислительного эксперимента.

Задача математического моделирования процессов при условии достаточно точных наблюдений за входными переменными и выходной переменной формулируется следующим образом [1]: найти функцию  $y_0 = F(x, a)$  и доверительный интервал  $[\varepsilon_H, \varepsilon_V]$  для значений  $\varepsilon_y$ . Тогда на практике можно оценить ожидаемые значения выходной переменной при известных значениях вектора входных переменных  $x$ :  $y_0 + \varepsilon_H \leq y \leq y_0 + \varepsilon_V$ .

Для моделирования процессов при ошибках наблюдения всех переменных используется подход, описанный в работе [2], в которой оценки параметров линейного процесса сводятся к решению интервальных систем линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ). В нашей работе мы проводим исследование управляемого множества решений ИСЛАУ, применимость которого в рассматриваемой задаче отмечена в [3].

В матричной форме ИСЛАУ записывается интервальной  $(N \times n)$  матрицей  $\mathbf{A}$  коэффициентов и  $(N \times 1)$  интервальным вектором правой части  $\mathbf{b}$  в следующем виде:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , где элементы матриц заданы интервалами:  $A^H \leq \mathbf{A} \leq A^V$  и  $B^H \leq \mathbf{b} \leq B^V$ . Размерности матриц определяются числом наблюдений  $N$  и числом оцениваемых коэффициентов моделируемого процесса  $n$ . Матрицы  $A^H, A^V$  и векторы  $B^H, B^V$  при анализе данных записываются с использованием результатов

наблюдений и оценок интервальных ошибок, как правило, симметричных относительно нулевого значения.

В работе [3] показано, что управляемое множество  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  решений ИСЛАУ в решения  $R_+^n$  является многогранным множеством и задается системой линейных неравенств в следующем виде:  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in R_+^n / A^V x \geq B^V; A^H x \leq B^H\}$ . Таким образом, задача моделирования линейных процессов с ошибками наблюдения всех переменных сводится к решению совокупности задач линейного программирования. Например, для оценивания точечных значений коэффициентов линейного процесса допустимо использования оценки метода центра неопределенности, вычислительные задачи которого описаны в работе [1].

Записанные задачи моделирования процессов реализованы в среде Excel и проведены сравнения точечных оценок параметров процесса прикладного интервального анализа с оценками метода наименьших квадратов. Вычислительные эксперименты показали, что при малых ошибках измерения переменных процесса оценки МНК оказываются более точными. Приведены примеры таблиц наблюдений, анализ которых методом центра неопределенности дает по сравнению с МНК лучшие результаты.

### Библиографический список

1. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования : монография. – 2-е изд. испр. и доп. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2013.
2. Шарый С.П. Решение интервальной линейной задачи о допусках // Автоматика и телемеханика, № 10, 2004.
3. Мадияров М.Н., Оскорбин Н.М., Суханов С.И. Примеры интервального анализа данных в задачах моделирования процессов // Изв. Алт. гос. ун-та. – 2018. – № 1.

## Оценка финансовой устойчивости предприятия с использованием динамического норматива

*Д.С. Орлова*

*ЮГУ, г. Ханты-Мансийск*

В настоящее время для получения комплексной оценки функционирования предприятия используется множество различных методов, в том числе метод динамического норматива.

Под динамическим нормативом (далее ДН) принято понимать совокупность показателей, упорядоченных по темпам роста так, что поддержание этого порядка на длительном интервале времени в реальной деятельности предприятия обеспечит последнему устойчивое финансовое состояние [2, 3]. ДН задает нормативный (эталонный) порядок темпов роста показателей, выражающий требования к лучшему динамическому состоянию функционирующего предприятия, которое характеризуется определенным набором финансовых оперативных коэффициентов (далее ФОК). Таким образом, ДН представляет собой упорядоченную определенным образом конечную последовательность абсолютных или относительных величин, в том числе и темпов роста ФОК, дающих оценку устойчивому функционированию и развитию предприятия.

Существует несколько подходов к реализации методологии ДН применительно к решению задач анализа и оценки финансово-хозяйственной деятельности предприятия. В этой работе предлагается рассмотреть подход, описанный в работах Погостинской Н.Н. и ее коллегами [2, 3, 5, 6].

Порядок построения ДН таков:

1) выбор ФОК, характеризующих состояние финансово-хозяйственной деятельности предприятия;

2) построение ДН – эталонного ряда упорядоченных темпов роста ФОК. При упорядочении темпов роста ФОК используется «граф предпочтений», для которого строится «матрица предпочтений»;

3) расчет фактических темпов роста показателей и построение фактического ряда соотношений темпов роста показателей (ФОК);

4) сравнение эталонного ряда упорядоченных темпов роста ФОК с фактическим рядом соотношений темпов роста этих показателей [1–6].

В работах автора данной статьи [7, 8, 10] представлены результаты разработки программного обеспечения для оценки финансовой устойчивости предприятия, реализующего методологию динамического

норматива согласно подходу, сформированного в работах Погостинской Н.Н., Погостинского Ю.А. [2, 3, 5].

В качестве апробации разработанного программно-информационного обеспечения для АСУП, обеспечивающего формирование интегральной комплексной оценку финансового состояния предприятия, были использованы данные о функционировании «АО «ЮТЭК» (г. Ханты-Мансийск, Ханты-Мансийский автономный округ-Югра) за период с 2014 по 2016 гг. [9].

Далее составляется перечень из 43 ФОК, строится матрица предпочтений, после чего дается комплексная оценка финансовой устойчивости предприятия:

$$C = \Phi Y^{\frac{2}{H+1}}, \quad (1)$$

где  $\Phi Y$  – оценка близости фактического ( $\Phi$ ) и нормативного ( $H$ ) упорядочений показателей;  $I$  – оценка изменчивости финансового состояния предприятия;

$$\Phi Y = I - \frac{M(\Phi, H)}{n(n-1)} = I - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}}{n(n-1)}; \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } r_i > r_j \text{ или при } i = j; \\ 1, \text{ если } r_i < r_j; \\ 0, \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (2)$$

где  $M(\Phi, H)$  – сумма инверсий в фактическом порядке показателей ( $\Phi$ ) относительно ДН ( $H$ );  $r_i, r_j$  – ранги  $i$ -го и  $j$ -го ФОК в их фактическом упорядочении для рассматриваемого предприятия;  $n$  – число ФОК, включенных в ДН;

$$I = \frac{M(\Phi^{\circ}, H) - M(\Phi^{\circ}, H)}{M(\Phi^{\circ}, \Phi^{\circ})}, \quad (3)$$

здесь  $M(\Phi^{\circ}, H)$ ,  $M(\Phi^{\circ}, H)$  – суммы инверсий в фактическом порядке показателей ( $\Phi$ ) относительно ДН ( $H$ ) для базового и отчетного периодов;  $M(\Phi^{\circ}, \Phi^{\circ})$  – сумма инверсий в фактическом порядке показателей ( $\Phi$ ) для отчетного периода по отношению к базовому.

Результаты расчетов можно увидеть в таблице 1.

В работе [6] было предложено существенно сократить общее количество ФОК, включаемых в ДН. При этом авторы указанной работы отказались от использования при формировании ДН коэффициентов в виде относительных величин. Модифицированный ДН включает такие показатели: внеоборотные активы, оборотные активы, капитал и резервы, долгосрочные обязательства, краткосрочные обязательства, выручка.

Выражения для оценки величин  $\PhiУ$ ,  $I$ ,  $C$  на основе используемого модифицированного ДН авторы работы [6] предлагают оставить без изменений.

Результат расчета модифицированного ДН можно также увидеть в таблице 1.

Таблица 1 – Расчетные значения показателей  $\PhiУ$  (2),  $I$  (3),  $C$  (1) для рассматриваемых периодов

Структура ДН	Показатель	Рассматриваемые периоды	
		2014-2015 гг.	2015-2016 гг.
Структура ДН согласно [6,7,9]	$\PhiУ$	0,9	0,86
	$I$	-0,21	
	$C$	0,68	
Модифицированная структура ДН согласно [10]	$\PhiУ$	0,8	0,53
	$I$	-0,8	
	$C$	0,02	

Анализ имеющихся данных [9] с применением методики, сформированной в работах Погостинской Н.Н., Погостинского Ю.А, позволяет сделать вывод о том, что большее количество нормативных соотношений между показателями реализовано в реальной хозяйственной деятельности рассматриваемого предприятия. Однако, изменчивость режима деятельности предприятия показывает, что изменения за рассмотренный период имеют негативный характер. Данное обстоятельство, впрочем, пока не особо не влияет на оценку стабильности, которая в изучаемый период является близкой к устойчивой [3]. При анализе сокращенного списка показателей (6 вместо 43) по той же самой методике можно заметить, что результат принимает более негативный характер, чем при анализе полного списка, как по оценке реализации нормативных соотношений, так и по изменчивости.

После проведения сравнительного анализа можно заметить, что оценки финансовой устойчивости не совпадают. Это объясняется тем, что, несмотря на похожий алгоритм проведения оценки, обе описанные методики покрывают разное количество показателей.

### Библиографический список

1. Сыроежин И.М. Совершенствование системы показателей эффективности и качества. – М.: Экономика, 1980. – 192 с.
2. Погостинская Н.Н. Системная финансово-экономическая диагностика: учеб. пособие для вузов. – СПб.: Изд-во МБИ, 2007. – 159 с.
3. Погостинская Н.Н., Погостинский Ю.А. Системный анализ финансовой отчетности. – СПб.: Изд-во Михайлова В.А., 1999. – 96 с.

4. Тонких А.С. Моделирование результативного управления корпоративными финансами. – Екатеринбург: Институт экономики УрО РАН, 2006. – 200 с.

5. Азарская М.А., Поздеев В.Л. Оценка непрерывности деятельности организации с использованием метода динамического норматива // Учет. Анализ. Аудит. – 2007. – №1. – С. 24–32.

6. Погостинская Н.Н., Погостинский Ю.А. «Золотое правило» финансовой устойчивости предприятия // Ученые записки Международного банковского института. – 2014. – № 7. – С. 154–169.

7. Орлова Д.С., Кутышкин А.В. Об использовании структурно-функционального моделирования в рамках системного анализа финансовой отчетности предприятия // Вестник Югорского государственного университета. – 2016. – № 2 (41). – С. 49–53.

8. Орлова Д.С., Кутышкин А.В. Проектирование программного обеспечения для анализа финансовой устойчивости предприятия на основе динамического норматива // МАК: «Математики – Алтайскому краю» : сборник трудов всероссийской конференции по математике, Барнаул. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. – С. 117–119.

9. Акционерное общество «Югорская территориальная энергетическая компания» // (АО «ЮТЭК»). Режим доступа: <http://www.yutec-hm.ru/> (дата обращения 09.12.2017).

10. Орлова Д.С., Кутышкин А.В. Разработка информационной системы для анализа финансового состояния предприятия // Математическое и информационное моделирование. – Тюмень, 2017. – С. 282–286.

## **УДК 330.15.519.95**

### **Проектирование институциональных условий эффективной реализации ресурсных мегапроектов с использованием игровой модели**

***Н.И. Пляскина***

*ИЭиОПП СО РАН, НГУ, Новосибирск*

В работе предлагается использование игровой модели поиска равновесия к формированию институциональных условий развития ресурсного мегапроекта как единого системно организованного межотраслевого проекта, при которых достигается согласование стратегических интересов его участников: федеральных, региональных органов власти и компаний, как субъектов хозяйствования с различной структурой собственности (недропользователи, энергетика, строительство, транспорт, и др.).

*1. Актуальность.* На современном этапе структурных преобразований реального сектора экономики возросла актуальность создания новых межотраслевых многорегиональных ресурсных мегапроектов, направленных на формирование нового инфраструктурного и индустриального базиса России, освоения природных ресурсов Арктики и Востока России, востребованных на мировых рынках. Приоритетной стратегической целью создания мегапроекта является достижение в заданные сроки высокой экономической эффективности создаваемого межотраслевого комплекса, как для государства, так и для всех его участников при высокой конкурентоспособности лидеров мегапроекта на мировом рынке.

Создание мегапроектов преследует геополитические, макроэкономические, социально-экономические цели устойчивого развития Российской Федерации и обеспечения национальной безопасности государства. Важным условием эффективности мегапроекта является консолидация усилий и ресурсов участников для достижения как государственных стратегических, так и корпоративных целей.

Особенностью формирования мегапроекта является экономическая самостоятельность его участников при принятии стратегических решений: они обладают как собственными ресурсами, так и возможностью привлечения инвестиционных ресурсов с финансового рынка, разрабатывают собственную стратегию поведения и формируют инвестиционные намерения с учетом экономической и коммерческой эффективности их проектов. Успешность и эффективность реализации мегапроекта зависит от качества подготовки проекта на начальной стадии и степени согласованности стратегических интересов участников. Структура и состав участников мегапроекта меняется в динамике. Государство выступает координатором в формировании стратегии мегапроекта: определяет сроки, масштабы, отраслевой и территориальный состав участников, условия привлечения внешних инвестиционных ресурсов исходя из государственных целей мегапроекта.

*2. Постановка задачи.* В условиях активного освоения новых нефтегазовых провинций и принятия Плана развития нефтегазохимии РФ до 2030 г. важной задачей реализации ресурсного мегапроекта ВСНГК является выбор институциональных условий, при которых достигается согласование стратегических интересов его институциональных участников. Участниками мегапроекта (игроками) являются компании и государство, координирующее их действия [1]. На стадии заключения контрактов по выполнению государственного Плана возникает конфликт интересов игроков. Компании стремятся максимизировать чистую прибыль, государство - увеличить бюджет за счет по-

ступления налогов. В организации согласования интересов участников необходимо учитывать, что компании, обладая собственными материальными и финансовыми ресурсами, склонны к изменению приоритетов и выходу из мегапроекта.

Предметом согласования интересов является выбор вариантов схем финансирования проектов, привлечения государственных инвестиций, внешних кредитов и займов, реинвестирования доходов, интеграции активов компаний для реализации инвестиционных проектов, а также учет институциональных барьеров межотраслевого перелива капитала.

В условиях ограниченности инструментов прямого воздействия государства на инвестиционную политику компаний суть стратегического управления реализацией мегапроекта состоит в государственной координации инвестиционных намерений компаний – участников и разработке механизмов управления мегапроектами: разработке косвенных инструментов регулирования в виде благоприятных вариантов изменения институциональной среды. Центральное место отводится выбору вариантов государственных предпочтений и государственной поддержки проектов компаний, взаимоприемлемых для участников.

3. *Алгоритм поиска равновесия.* Поиск компромисса между государством и компаниями-участниками осуществляется с использованием игровой модели равновесия по Штакельбергу. В игре имеется информационная асимметрия: государство выступает лидером и информировано о проектах компаний, компании менее информированы о предпочтениях государства. На федеральном уровне существует множество различных схем предоставления государственной поддержки компаниям – производителям нефтегазовых ресурсов. Проигрываются различные стратегии государства: предоставление предпочтений компаниям – налоговые льготы или освобождение от налогов; субсидирование инвестиционных проектов компаний на условиях возврата средств при выходе на проектную мощность и др.

Предлагается поэтапное построение равновесной стратегии для процесса принятия управленческих решений государством.

1 этап – формирование стратегий игроков с учетом институциональных условий на основе имитационной модели оценки экономической эффективности инвестиционных проектов компаний;

2 этап – поиск равновесия посредством реализации игровой модели на основе равновесия по Штакельбергу;

3 этап – выбор институциональных условий достижения равновесной стратегии реализации ресурсных мегапроектов.

Алгоритм поиска равновесия представлен последовательностью решения следующих задач:

– построение упорядоченного массива ставок налога на прибыль и соответствующая им рентабельность компаний по рассматриваемым периодам;

– построение матрицы выигрышей всех участников для каждого периода в соответствии с налоговыми ставками;

– государство оценивает отклик участников для всех значений налога на прибыль посредством выбора отрасли инвестирования максимизирующей прибыль компании;

– варьирование ставок налога на прибыль в выбранной отрасли до получения максимальных налоговых поступлений в государственный бюджет;

– государство перебирает налоговые ставки и выбирает стратегию налогообложения, при которой чистая прибыль компаний не снижается, а совокупный доход государства максимален.

– найденная ставка является равновесием по Штакельбергу.

Механизмы государственной поддержки нефтегазохимических проектов признаются эффективными, если достигается приемлемые для компаний и государства показатели коммерческой эффективности проектов. Инвестиционная программа мегапроекта является продуктом согласования их интересов. В процессе согласования выявляются возникающие противоречия и четко прописываются возможные пути их разрешения, которые фиксируются в договорах между государством и участниками мегапроекта с регламентацией их обязательств по реализации мегапроекта. Координирующий орган осуществляет управление мегапроектом и контроль за реализацией государственных контрактов.

Адаптация данного алгоритма осуществлена на примере формирования мегапроекта создания нефтегазового комплекса Восточной Сибири и Дальнего Востока и выхода России на Азиатско-Тихоокеанский энергетический рынок [2], как важнейшей составной части «Энергетической стратегии России на период до 2020 г.».

### **Библиографический список**

1. Plyaskina N.I., Kharitonova V.N. Strategic planning of cross-sectoral resource megaprojects: methodology and instruments // *Studies on Russian Economic Development*. – 2013. – Vol. 24, No. 2. – P. 108–116.

2. Пляскина Н.И., Харитонов В.Н. Стратегическое управление и согласование интересов институциональных участников мегапроектов // *Проблемы управления*. – 2016. – № 1. – С. 29–48.

УДК 519.688

## Об одном методе проверки статистических данных на наличие выбросов

*И.В. Пономарев*  
*АлтГУ, г. Барнаул*

При работе со статистическими данными возникает необходимость проверки построенной модели на предмет выбросов. Наличие выбросов может негативно сказаться на адекватности модели и ее прогностических способностях. Разработке методов поиска выбросов посвящены работы [1–4].

В данной работе рассматривается универсальный метод для исследования регрессионной модели на наличие выбросов. Универсальность этого метода заключается в том, что он может применяться к моделям, основанным на разных функционалах качества.

Пусть имеется линейная регрессионная модель

$$y = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k + \varepsilon, \quad (1)$$

где  $y$  – зависимая переменная;  $x_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) – независимые переменные;  $\varepsilon$  – ошибка;  $a_i$  ( $i = \overline{0, k}$ ) – параметры модели.

Для оценки параметров модели необходимо минимизировать функционал качества

$$F = d(Y, \hat{Y}), \quad (2)$$

где  $Y$  – вектор наблюдаемых значений зависимой переменной;  $\hat{Y}$  – вектор расчетных для модели (1) значений зависимой переменной;  $d$  – выбранная метрика.

В зависимости от выбранной метрики получаются различные типы регрессионных зависимостей [5–8]:

1) если  $d$  манхэттенская метрика, то соответствующая модель будем обозначать  $L_1$ -регрессией;

2) если  $d$  евклидова метрика, то соответствующая модель будем обозначать  $L_2$ -регрессией;

3) если  $d$  чебышевская метрика, то соответствующая модель будем обозначать  $L_\infty$ -регрессией.

Будем обозначать минимальное значение функционала (2) через  $\alpha_p$ , где  $p$  выбирается согласно используемой метрики (1, 2 или  $\infty$ ).

Задачу о нахождении выбросов сформулируем следующим образом: пусть из данного множества наблюдений  $\Omega = \{(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, y_i) : i = \overline{1, N}\}$  требуется исключить фиксированный процент наблюдений так, чтобы оставшиеся  $\Omega_0$  данные имели наименьшую величину разброса  $\alpha_p(\Omega_0)$ , т.е.

$$\alpha_p(\Omega_0) = \min \{ \alpha_p(\Omega') : \Omega' \subset \Omega, \#[\Omega'] = N_0 \}, \quad (3)$$

где  $\#[\Omega']$  – число элементов во множестве  $\Omega'$ ;  $N - N_0 = M_0$  – число выбросов.

Изучаемый алгоритм основан на преобразовании Лежандра.

**Определение.** Пусть  $\Omega = \{A_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, y_i) : i = \overline{1, N}\}$  – конечное множество точек и дана пара натуральных чисел  $1 \leq r, s \leq N$ . Обозначим через

$$MAX_r \left[ \{c_i\}_{i=1}^N \right] = c_{i_{r+1}}, \quad MIN_s \left[ \{c_i\}_{i=1}^N \right] = c_{i_{N-s}},$$

где  $\{c_k\}_{k=1}^N$  – перестановка последовательности  $\{c_i\}_{i=1}^N$  в порядке убывания.

Используя введенные функции можно определить обобщенные преобразования Лежандра. Например, для  $L_2$ -регрессии преобразования Лежандра имеет вид:

$$f_r^+(a_0, \dots, a_k) = MAX_r \left\{ (a_0 + a_1 x_{i1} + \dots + a_k x_{ik} - y_i)^2 : i = \overline{1, \dots, N} \right\},$$

$$f_s^-(a_0, \dots, a_k) = MIN_s \left\{ (a_0 + a_1 x_{i1} + \dots + a_k x_{ik} - y_i)^2 : i = \overline{1, \dots, N} \right\}$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Справедливо равенство

$$\min \{ \alpha_2(\Omega') : \Omega' \subset \Omega, \#[\Omega'] = N_0 \} = \min_{a_0, \dots, a_k} \sum_{0 \leq r \leq M_0 - 1} f_r^-(a_0, \dots, a_k).$$

### Библиографический список

1. Weisberg S. Applied linear regression. – 3th ed. – Jonh Wiley & Sans, Inc., 2005.
2. Cook R.D. Detection of Influential Observation in Linear Regression // *Technometrics*. – 1977. – Vol. 19, No. 1. – P. 15–18.
3. Andrews D.F., Pregibân D. Finding the outliers that matter // *Journal of the Royal Statistical Society*. – 1978. – Vol. 40. – P. 84–93.
4. Пономарев И.В. Исследование статистических данных на выбросы // *МАК: Математики – Алтайскому краю : сборник трудов всероссийской конференции по математике*. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. – С. 133–135.
5. Ponomarev I.V., Slavsky V.V. Uniformly fuzzy model of linear regression // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2012. – Vol. 186. – Issue 3. – P. 478 – 494.
6. Пономарев И.В., Славский В.В. Нечеткая модель линейной регрессии // *Доклады Академии наук*. – 2009. – Т. 428, №5. – С. 598–600.
7. Пономарев И.В., Родионов Е.Д., Родионова Л.В., Славский В.В. Комплекс моделей для построения и оценки вариантов развития регионального рынка труда // *Вестник Алтайской науки*. – 2013. – №1. – С. 86–88.
8. Родионов Е.Д., Родионова Л.В., Славский В.В. и другие. Применение пакетов символьных вычислений к решению задач теории и практики: монография. – Концепт, Барнаул, 2014.

**УДК 330.131.7**

### **Актуализация программы капитального ремонта многоквартирных домов с использованием нейтрософских компонентов**

***Е.В. Токарева, С.П. Пронь***  
*АлтГУ, г. Барнаул*

Региональная программа капитального ремонта (КР) многоквартирных домов (МКД) как документ планирования, в котором указаны выборочные КР для каждого включенного в программу МКД с указанием трехлетнего планового периода (в некоторых регионах этот срок увеличен до шести лет) требует ежегодной актуализации. Формально в статье рассматривается математическая модель, позволяющая обоснованно переупорядочить массив выборочных КР МКД в текущем периоде.

Прежде всего, стоит задача минимизировать ситуации, когда из программы исключаются МКД со степенью износа выше 70% и подлежащие расселению, особенно важно исключить такие ситуации, когда программа актуализируется (изменяется) 2-3 раза за год и каждый раз обнаруживаются новые МКД с указанными характеристиками.

Итак, актуализированная программа проведения КР включает часть МКД из краткосрочного трёхлетнего плана КР с возможными изменениями по виду выборочных КР, связанными с ошибочными или неточными сведениями, полученными ранее (например, включение работ по замене лифтового оборудования в МКД где его нет, или необходимость провести замену лифтового оборудования ранее ремонта крыши согласно проведенному мониторингу технического состояния строительных конструкций МКД). Для построения системно-динамической модели денежных потоков в системе КР МКД, соответствующей запланированной программе КР МКД, в имитационном эксперименте необходимо иметь возможность задавать актуализированные программы КР МКД на каждый моделируемый период. В дальнейшем считаем, что все собранные средства (за исключением некоторой доли, обеспечивающей финансовую устойчивость организации) направляются на финансирование региональной программы КР МКД [1].

В связи с тем, что постоянно возникает неопределенность в изменении программы, для моделирования эксперимента, рассчитанного на весь период действия региональной программы (25–30 лет), можно использовать аппарат нейтрософской логики [2, 3]. В данном случае это позволит представлять неопределённость, связанную с противоречивыми и спорными сведениями.

Пусть имеется  $k$  элементов фиксированного множества  $X$ . Элементом, соответствующим  $x_j \in X$ , будет нейтрософский тройной элемент  $n_j$  множества  $A$  :

$$n_j = \langle t_j, i_j, f_j \rangle, \quad (1)$$

где  $1 \leq j \leq k$ ,  $t_j$  – степень принадлежности,  $i_j$  – степень неопределённости,  $f_j$  – степень непринадлежности элемента  $x_j \in X$  множеству  $A$ .

Примем, что  $t_j$  – множество нескольких  $\delta$  таких, что  $0 \leq \delta \leq 1$ , аналогично  $i_j$  – множество  $0 \leq \gamma \leq 1$  и  $f_j$  – множество  $0 \leq \eta \leq 1$ .

С помощью функций  $S(n_j)$  и  $A(n_j)$  будем проводить сравнение нейтрософских чисел для каждого  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$ :

$$S(n_j) = \frac{1}{3} \left( 2 + \frac{1}{l_t} \sum_{\delta \in t} \delta - \frac{1}{l_i} \sum_{\gamma \in i} \gamma - \frac{1}{l_f} \sum_{\eta \in f} \eta \right) \quad (2)$$

$$A(n_j) = \frac{1}{l_t} \sum_{\delta \in t} \delta - \frac{1}{l_f} \sum_{\eta \in f} \eta \quad (3)$$

где  $l_t, l_i, l_f$  – число элементов множеств  $t_j, i_j, f_j$ ;

Если  $S(n_{j_1}) > S(n_{j_2})$ , то  $n_{j_1} > n_{j_2}$ .

Если  $S(n_{j_1}) = S(n_{j_2})$  и  $A(n_{j_1}) > A(n_{j_2})$ , то  $n_{j_1} > n_{j_2}$ .

Если  $S(n_{j_1}) = S(n_{j_2})$  и  $A(n_{j_1}) = A(n_{j_2})$ , то  $n_{j_1} = n_{j_2}$ .

При реализации имитационного эксперимента в модели КР возникает необходимость определить порядок проведения выборочных КР, т.е. установить предпочтительный порядок следования пар значений  $(V_m, v_r)$ , где  $V_m$  ( $1 \leq m \leq M$ ) МКД с видом требуемых к выполнению работ по КР  $v_r$  ( $1 \leq r \leq R$ ). На приоритетность порядка влияют две группы показателей показатели повышения и показатели понижения  $(P_{s_1}, P_{s_2})$  ( $1 \leq s_1 \leq S_1$ ,  $S_1 + 1 \leq s_2 \leq S$ ). Примерами показателей повышения могут служить степень физического износа МКД (чем выше, тем приоритетнее пара  $(V_m, v_r)$ ) или собираемость взносов на КР. Примерами показателей понижения могут служить степень законодательного риска в регионе проведения КР (чем ниже, тем приоритетнее пара  $(V_m, v_r)$ ) или стоимость проведения выборочного КР.

Пусть матрица  $x_{mrs} = \langle t_{mrs}, i_{mrs}, f_{mrs} \rangle$  – это матрица нейтрософских оценок показателей  $P_s$   $V_m$  – го МКД с заданным видом работ  $v_r$  ( $1 \leq m \leq M$ ,  $1 \leq r \leq R$ ,  $1 \leq s \leq S$ ).

По всем показателям определяется идеальный «положительный» вектор  $A^+ = (A_{m,r,1}^+, A_{m,r,2}^+, \dots, A_{m,r,S_1}^+)$ , где  $A_{m,r,s}^+ = \max_{1 \leq s \leq S_1} x_{m,r,s}$ , т.е. находятся максимумы по столбцам для показателей повышения и  $A_{m,r,s}^- = \min_{S_1+1 \leq s \leq S} x_{m,r,s}$  т.е. находится минимумы по столбцам для показателей понижения. Аналогично по всем показателям определяется идеальный «отрицательный» вектор  $A^- = (A_{m,r,1}^-, A_{m,r,2}^-, \dots, A_{m,r,S_1}^-)$ , где  $A_{m,r,s}^- = \min_{1 \leq s \leq S_1} x_{m,r,s}$ , т.е. находятся минимумы по столбцам для показателей повышения и  $A_{m,r,s}^+ = \max_{S_1+1 \leq s \leq S} x_{m,r,s}$  т.е. находятся максимумы по столбцам для показателей понижения. Заметим, что компоненты векторов являются векторами нейтрософских чисел.

Далее, определяется «положительный» коэффициент ранжирования [3] по формуле (4):

$$\xi_{mrs}^+ = \frac{\min_{m,r} \min_{1 \leq s \leq S_1} D(x_{m,r,s}, A_s^+) + \max_{m,r} \max_{1 \leq s \leq S_1} D(x_{m,r,s}, A_s^+)}{D(x_{m,r,s}, A_s^+) + 0.5 \max_{m,r} \max_{1 \leq s \leq S_1} D(x_{m,r,s}, A_s^+)}, \quad (4)$$

где

$$D(n_1, n_2) = \frac{1}{3} \left( \left| \frac{1}{l_{t_1}} \sum_{\delta_1 \in t_1} \delta_1 - \frac{1}{l_{t_2}} \sum_{\delta_2 \in t_2} \delta_2 \right| + \left| \frac{1}{l_{i_1}} \sum_{\gamma_1 \in i_1} \gamma_1 - \frac{1}{l_{i_2}} \sum_{\gamma_2 \in i_2} \gamma_2 \right| + \left| \frac{1}{l_{f_1}} \sum_{\eta_1 \in f_1} \eta_1 - \frac{1}{l_{f_2}} \sum_{\eta_2 \in f_2} \eta_2 \right| \right) - \text{аналог расстояния Хэм-}$$

минга для нейтрософских чисел [3]. Здесь уже коэффициенты – действительные числа.

Отрицательный коэффициент ранжирования  $\xi_{m_r}^-$  определяется аналогично, заменяя компоненты вектора  $A^+$  компонентами вектора  $A^-$ .

С учётом весов показателей ( $\sum_{s=1}^S w_s = 1$ ) находятся уточнённые положительный  $\xi_{m_r}^+$  и уточненный отрицательный  $\xi_{m_r}^-$  коэффициенты ранжирования:

$$\xi_{m_r}^+ = \sum_{s=1}^S w_s \xi_{m_r s}^+, \quad \xi_{m_r}^- = \sum_{s=1}^S w_s \xi_{m_r s}^- \quad (5)$$

Обобщённый коэффициент ранжирования находится по формуле:

$$\xi_{m_r} = \frac{\xi_{m_r}^+}{\xi_{m_r}^+ + \xi_{m_r}^-} \quad (6)$$

Упорядочивая по убыванию коэффициенты  $\xi_{m_r}$  получаем актуализацию пар  $(V_m, v_r)$ . Далее, МКД можно сгруппировать по виду работ и получить очереди на проведение выборочных КР.

Воспроизводя последовательность выборочных КР в имитационном эксперименте в среде AnyLogic с учётом всех особенностей системно-динамической модели [4–6], получаем актуализированные программы КР МКД по годам, что поможет обеспечивать обоснованность формирования соответствующих ежегодных планов по КР.

### Библиографический список

1. Богарова Е.В., Пронь С.П. Структура данных имитационной модели финансового потока для формирования фонда КР МКЖД в среде AnyLogic // Сборник научных статей международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования», Барнаул, 20–24 ноября, 2015. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015. – С. 526–530.
2. Smarandache F. Neutrosophy. Neutrosophic Probability, Set, and Logic. – USA, Michigan: ProQuest Information & Learning, 2006. – 105 p.
3. Pranab Biswas, Surapati Pramanik, Bibhas C. Giri. GRA Method of Multiple Attribute Decision Making with Single Valued Neutrosophic Hesitant Fuzzy Set Information // New Trends in Neutrosophic Theory and Applications. – Pons Editions Brussels, Belgium, EU2016. – Pp. 55–65.
4. Богарова Е.В., Оскорбин Н.М., Пронь С.П. Математическая и имитационная модели системы взаимного финансирования КР МКД // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. – Вып. 2. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2016. – С. 4–7.
5. Богарова Е.В., Пронь С.П. Математическая модель платежей в фонд капитального ремонта многоквартирных домов // Сборник тру-

дов Всероссийской конференции по математике «МАК–2017». – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2017. – С. 156–158.

6. Богарова Е. В. Нейтрософские компоненты математических моделей системы капитального ремонта многоквартирных домов // Сборник трудов Всероссийской конференции по математике «МАК–2017». – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2017. – С. 152–155.

## УДК 528.92

### Решение задачи «линейная засечка» методом центра неопределенности

*С.И. Суханов, Н.М. Оскорбин*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Суть метода линейной засечки состоит в определении на местности (рисунок 1) планового положения точки  $P(x_p, y_p)$  по измеренным координатам двух точек  $A(x_a, y_a)$  и  $B(x_b, y_b)$  и измеренным расстояниям  $d_1$  и  $d_2$ .

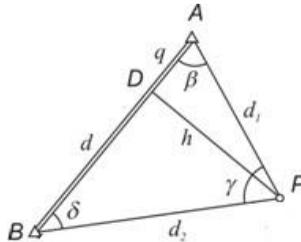


Рисунок 1 – Линейная засечка

Решение данной задачи можно произвести непосредственно по формулам прямой и обратной геодезической засечек, но можно рассчитать координаты искомой точки  $P(x_p, y_p)$  только по координатам двух точек  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$  и измеренным расстояниям  $d, d_1, d_2$  [1]. По координатам исходных пунктов  $A(x_a, y_a)$  и  $B(x_b, y_b)$  определяется расстояние  $d$ , затем – полупериметр

$$p = \frac{S_{ab} + S_1 + S_2}{2},$$

$$q = \frac{d^2 + d_1^2 - d_2^2}{2} - \text{проекция стороны } AP \text{ на сторону } AB. \text{ Из прямо-}$$

угольного треугольника  $APD$  следует, что  $h = \pm\sqrt{d_1^2 - q^2}$ . Знак «+» или «-» выбирается соответственно следованию вершин  $A, P, B$  (по ходу или против часовой стрелки).

Для численного решения задачи удобнее ввести следующие обозначения:  $q' = \frac{q}{d} = \frac{d^2 + d_1^2 - d_2^2}{2d^2}$ ,  $h' = \frac{h}{d} = \frac{\pm\sqrt{d_1^2 - q^2}}{d}$ .

Конечные формулы для определяемой координат точки  $P(x_p, y_p)$ :  
 $x_p = x_a + q'(x_b - x_a) + h'(y_b - y_a)$ ,  
 $y_p = y_a + q'(y_b - y_a) - h'(x_b - x_a)$ .

Для более точного определения координат точки  $P(x_p, y_p)$  применяется многократная линейная засечка (рис 2).

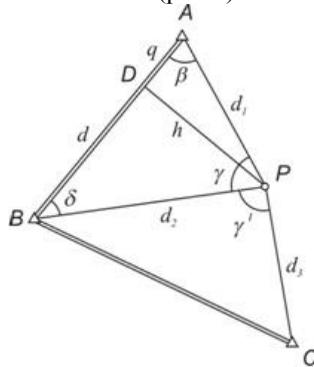


Рисунок 2 – Многократная линейная засечка

Изначально предполагается, что координаты точек  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$ ,  $C(x_c, y_c)$  и расстояния  $d_1, d_2, d_3$  измерены с некоторой погрешностью, для нахождения исходной точки  $P(x_p, y_p)$  можно применить метод центра неопределенности, основы которого изложены в работах Суханова В.А. [2]. Используется следующая схема: предполагается, что ошибки измерения координат исходных пунктов  $x_i$ ,  $y_i$  имеют одинаковую погрешность, а множество неопределенности допустимых значений параметров  $(x_p, y_p)$  в данной схеме записывалось так:

$$Q(k) = \left\{ (x_p, y_p) \mid (x_p - x_i^{расч})^2 + (y_p - y_i^{расч})^2 = d_i^2; \right. \\ \left. x_i - k\overline{\varepsilon}_{x_i} \leq x_i^{расч} \leq x_i + k\overline{\varepsilon}_{x_i}; y_i - k\overline{\varepsilon}_{y_i} \leq y_i^{расч} \leq y_i + k\overline{\varepsilon}_{y_i}; i \in \overline{1, n} \right\},$$

где  $\overline{\varepsilon}_{x_i} = \overline{\varepsilon}_{y_i}$  – оценки модулей ошибок в расчетных значениях  $x_i^{расч}$ ,  $y_i^{расч}$ , которые принадлежат прямоугольнику со сторонами  $2\overline{\varepsilon}_{x_i} = 2\overline{\varepsilon}_{y_i}$ ,  $i \in \overline{1, n}$ .

Применение данной методики позволяет нивелировать ошибки изменений исходных пунктов на начальной стадии.

### Библиографический список

1. Инженерная геодезия: учебник для вузов / Е.Б.Клюшкин, М.И. Киселев, Д.Ш. Михеев [и др.]; под ред. Д.Ш. Михеева. – М. : Высш. шк., 2000. – 464 с.
2. Суханов В.А. Исследование эмпирических зависимостей: нестатистический подход: сборник научных статей / под. ред. Н.М. Оскорбина. П.И. Кузьмина. – Барнаул : Изд-во АлтГУ. 2007. – 290 с.

## УДК 519.24

### О максимально различных кластерных разбиениях конечного множества

*А.П. Фоменко*  
*АлтГУ, г. Барнаул*

При первичной обработке больших массивов данных специалист в любой отрасли науки чаще всего вынужден прибегать к разбиению их на примерно однородные группы, что можно назвать кластеризацией данных. В силу этого кластерные алгоритмы и методы сегодня актуальны и активно разрабатываются, см. [1]. Тем не менее, практически всеми практиками признается, что довольно часто объективная кластеризация невозможна, т.е. при применении разных алгоритмов к одному и тому же множеству объектов в итоге могут получиться существенно разные его разбиения. При этом, изучая степень максимально возможного различия двух кластерных разбиений заданного множества объектов, можно, например, делать заключения о возможности его «объективно правильной» кластеризации.

Целью работы является получение неулучшаемой оценки наибольшего возможного различия кластерных разбиений некоторого множе-

ства  $U$  из  $n$  объектов, если известны количества кластеров в каждом из этих разбиений и использование этой оценки для определения нового вида связи между нечисловыми категоризованными признаками.

Под кластерным разбиением условимся понимать систему непустых дизъюнктивных подмножеств множества  $U$ , объединение которых совпадает с  $U$ . Обычно объекты из одного кластера считаются близкими в каком-то смысле. Ниже мы будем строить кластеры, как наборы объектов, которые обладают одной и той же категорией некоторого нечислового признака, и в этом смысле являются близкими. Именно такое понимание и оправдывает то, что элементы нашей системы подмножеств мы далее будем называть кластерами, а само в достаточной степени произвольное разбиение кластерным.

На семействе кластерных разбиений множества  $U$ , следуя [2], введем расстояние (метрику). Пусть изучаемые разбиения  $A$  и  $B$  состоят из кластеров  $A_1, \dots, A_k$  и  $B_1, \dots, B_m$  соответственно. Обозначим количества элементов в их попарных пересечениях  $a_{i,j} = |A_i \cap B_j|$ ,  $i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m$ . Поместим все числа  $a_{i,j}$  в матрицу размерности  $k \times m$ , которую назовем матрицей пересечений. Нам потребуется также число

$$T_{i,j} = \sum_{t \neq j} a_{i,t} + \sum_{s \neq i} a_{s,j}, \quad i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m,$$

которое равно числу элементов соответственной симметрической размерности кластеров. Тогда вводимое в [2] расстояние вычисляется по формуле

$$d(A, B) = \sum_{i,j} a_{i,j} T_{i,j}. \quad (1)$$

Пусть зафиксировано некоторое кластерное разбиение основного множества  $U$ , которое далее будем называть базовым. Допустим, что в нем  $m$  кластеров, а количество элементов  $i$ -кластера обозначим через  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Ясно, что все  $x_j$  натуральные числа, а их сумма равна общему числу объектов  $n$ .

Условимся разбиения, состоящие из заданного количества  $r$  кластеров, называть  $r$ -разбиениями. Пусть задано натуральное число  $k$ . Поставим задачу среди всех  $k$ -разбиений найти то, для которого значение расстояния  $d$  от базового  $m$ -разбиением является наибольшим. Для этого будем строить матрицу пересечений двух разбиений.

Путем исследования величины (1) на экстремальные значения при наборе условий

$$\sum_{j=1}^k a_{i,j} = x_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

удалось доказать, что справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Если число элементов  $x_i$  в каждом кластере базового разбиения кратно  $k$ , то максимальное расстояние  $d$  от базового  $t$ -разбиения до некоторого  $k$ -разбиения достигается, когда каждая строка матрицы пересечений содержит лишь равные между собой числа. Значение этого максимума задается формулой

$$d_{\max} = \frac{n^2}{k} + \frac{k-2}{k} \sum_{i=1}^m x_i^2.$$

Видим, что  $d_{\max}$  зависит от чисел  $x_j$  и, следовательно, изменяя количества элементов в кластерах базового разбиения, даже не меняя количества этих кластеров, мы будем получать разные значения соответствующего максимума. При этом

$$\sum_{i=1}^m x_i = n, \quad (\forall i)(\exists z_i \in N) x_i = kz_i.$$

Экстремальные значения суммы квадратов таких чисел и условия для их достижения приведены в [3]. Отсюда вытекает

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 наибольшее и наименьшее из значений  $d_{\max}$  достигаются, когда все строки матрицы пересечений содержат лишь равные между собой элементы. При этом наибольшее из них равно

$$\bar{d} = \left( (n - (m-1)k)^2 + (m-1)k^2 \right) \cdot \frac{k-2}{k} + \frac{n^2}{k}.$$

и получается, когда все кластеры  $t$ -разбиения, кроме одного, содержат по  $k$  элементов. Наименьшее  $d_{\max}$  достигается, если каждый из кластеров  $t$ -разбиения относится к одной из двух групп, причем в каждой из групп кластеры одинаковы по числу элементов, но каждый кластер одной из групп содержит ровно на  $k$  объектов больше, каждый кластер другой. Это наименьшее значение  $d_{\max}$  равно

$$\underline{d} = \frac{n^2}{k} + n(k-2) \cdot \left( 2 \left[ \frac{n}{km} \right] + 1 \right) - mk(k-2) \cdot \left[ \frac{n}{km} \right] \cdot \left( \left[ \frac{n}{km} \right] + 1 \right).$$

Чтобы наглядно представить себе утверждение теоремы 1, рассмотрим семейства всех  $k$ -разбиений  $U_k$  и  $t$ -разбиений  $U_m$  множества  $U$  как два непересекающихся многообразия в пространстве всех возможных его кластерных разбиений. Тогда те из базовых разбиений, которые обладают наибольшим  $d_{\max}$  можно считать образующими внешнюю границу  $U_m$ , а те из  $k$ -разбиений, которые максимально от них удалены, образующими противоположный участок внешней границы  $U_k$ . Те же из  $t$ -разбиений, которые соответствуют минимально-

му  $d_{\max}$ , лежат как бы в центре семейства  $U_m$ . При этом максимально удаленные от них  $k$ -разбиения расположены на границах многообразия  $U_k$ .

Если отбросить требование делимости каждого из  $x_j$  на  $k$ , и, тем самым, разрешить  $m$ -разбиению быть в большей степени произвольным, то имеет место следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Наибольшее расстояние  $d$  между  $k$ - и  $m$ -разбиениями основного множества из  $n$  элементов удовлетворяет неравенству*

$$d_{\max} \leq \frac{(k+m-2)n^2}{km}.$$

*Верхняя граница в этом неравенстве достигается, если  $n$  делится нацело на произведение  $km$ .*

Пусть показатель  $X$  имеет  $m$  категорий, а показатель  $Y$  –  $k$  категорий. Возьмем обучающую выборку  $U$  из  $n$  объектов, у каждого из которых известна категория как  $X$ , так и  $Y$ . Тогда можно рассмотреть два разбиения  $A_X, A_Y$  множества  $U$ : в каждом из кластеров  $A_X$  содержатся элементы, попадающие в одну категорию по  $X$ , а в  $A_Y$  кластеры составлены из элементов с одинаковой категорией по  $Y$ . Будем говорить, что показатели кластерно  $d$ -связаны, если расстояние  $d$  между этими кластерными разбиениями имеет достаточно малую величину (разбиения похожи).

Тогда можно ввести принимающее в  $[0,1]$  число

$$J(X, Y) = \frac{d(A_X, A_Y) \cdot km}{(k+m-2) \cdot n^2},$$

и назвать его коэффициентом кластерной  $d$ -связи. Чем величина коэффициента  $J(X, Y)$  меньше, тем сильнее эта степень.

Результаты работы в частном случае  $k=m=2$  были успешно применены автором к задаче выявления значимых признаков ошибочного соединения в сессиях отправки данных с привлечением в качестве обучающей выборки набора данных KDD Cup 1999.

### Библиографический список

1. Chance B.L., Rossman A.J. Investigating Statistical Concepts // Applications, and Methods. – Duxbury Press, 2013.
2. Дронов С.В. Одна кластерная метрика и устойчивость кластерных алгоритмов // Известия АлтГУ. – 2011. – Вып. 1 / 2 (69).
3. Dronov S.V., Evdokimov E.A. Post-hoc cluster analysis of connection between the forming characteristics // Model Assisted Statistics and Applications. – 2018. – № 2.

УДК 519.23+519.25

## Выявление выбросов в методе максимума согласования при анализе интервальных данных

*С.П. Шарый**ИБТ СО РАН, г. Новосибирск*

Наша работа посвящена анализу данных, заданных неточно и имеющих интервальную неопределённость. Рассматривается задача восстановления зависимостей по интервальным данным, которая в последние десятилетия привлекала стабильное внимание специалистов. Для её решения был предложен ряд методов, в частности, так называемый метод максимума согласования [1–5], основанный на максимизации специальных функционалов, которые дают количественную меру согласования (совместности) параметров зависимости и интервальных данных измерений.

Далее в работе мы рассматриваем простейшую зависимость вида

$$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n, \quad (1)$$

в которой значения  $b$  являются линейной функцией от независимых переменных  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Необходимо определить неизвестные коэффициенты  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , чтобы получившаяся функциональная зависимость «наилучшим образом» соответствовала заданному набору значений  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b$ , полученному в результате  $m$  измерений (наблюдений). При этом результаты измерений не известны точно, и нам даны лишь интервалы их возможных значений. Таким образом, результат  $i$ -го измерения  $j$ -ой независимой переменной  $a_j^{(i)}$  принадлежит интервалу  $\mathbf{a}_j^{(i)}$ , а результат  $i$ -го измерения  $b^{(i)}$  зависимой переменной принадлежит интервалу  $\mathbf{b}^{(i)}$ , где  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ . В целом имеем набор интервальных данных

$$\begin{array}{ccccccc} a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}, b^{(1)}, \\ a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_n^{(2)}, b^{(2)}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}, b^{(m)}, \end{array} \quad (2)$$

по которым строится интервальная система линейных уравнений для нахождения параметров зависимости.

В методе максимума согласования оценкой параметров восстанавливаемой линейной зависимости берётся вектор  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , на котором достигается максимум так называемых распознающих функционалов тех или иных множеств решений интервальной системы уравнений, построенной по данным измерений. Это функции, которые задаются либо выражением

$$\begin{aligned} U_{ss}(x, A, b) & \quad (3) \\ & = \min_{1 \leq j \leq m} \left\{ \text{rad } b_i + \sum_{1 \leq j \leq n} (\text{rad } a_{ij}) |x_j| - \left| \text{mid } b_i - \sum_{1 \leq j \leq n} (\text{mid } a_{ij}) x_j \right| \right\} \end{aligned}$$

в случае обычного (слабого) согласования параметров и данных (см. [2, 3, 4]), либо выражением

$$\text{Tol}(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } b_i - \left| \text{mid } b_i - \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j \right| \right\} \quad (4)$$

в случае сильного согласования параметров и данных (см. [5]).

При восстановлении зависимостей важной практической задачей является выявление *выбросов* – таких измерений, результат которых выделяется из общей выборки и никак не характеризует искомую функциональную зависимость. Цель этой работы – изложение простого полуэвристического приёма для выявления измерений, подозрительных на выбросы, в рамках общей вычислительной схемы метода максимума согласования.

Исходный пунктом нашей методики является то простое наблюдение, что выражения для распознающих функционалов имеют весьма специальный вид, в котором окончательное значение получается как минимум от значений ряда выражений одинаковой структуры (стоящих внутри фигурных скобок в (3)–(4)), которые вычисляются по строкам матрицы данных (2). Мы будем называть их *образующими* распознающих функционалов. Фактически, их значения в точке  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  характеризуют отдельные измерения, давая для каждого из них меру согласования (совместности) данных в этом измерении с вектором параметров  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ .

С другой стороны, выбросы – это измерения, удаление которых резко увеличивает меру согласования оставшейся части выборки.

Как следствие, приходим к следующей естественной идее. В точке максимума распознающего функционала нужно посмотреть на значения его образующих, соответствующих отдельным измерениям, и если какие-то из этих образующих существенно меньше остальных, то они и являются кандидатами на выбросы.

Высказанная идея верна по сути, но на пути её успешного применения стоят некоторые принципиальные ограничения, которые следует учитывать при интерпретации результатов расчётов.

Напомним, что в пределе, когда интервалы неопределённости данных вырождаются в точки и мы должны восстанавливать зависимость по точным данным, метод максимума согласования (как слабая, так и сильная версии) переходит в чебышёвское сглаживание данных [4, 5], т.е. в их приближение в равномерной метрике. Один из основных результатов теории равномерного приближения функций — это знаменитая

Теорема Чебышёва [6, 7]. Для того, чтобы многочлен  $n$ -ой степени  $P(x)$  являлся многочленом наилучшего равномерного приближения непрерывной на интервале  $[a, b]$  функции  $f(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы на  $[a, b]$  существовали по крайней мере  $(n+2)$  точки  $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$ , такие что разность  $f(x_i) - P(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n+1$ , принимает в них равные по абсолютной величине значения, которые последовательно меняют знак от точки к точке.

Точки  $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$ , о которых идёт речь в теореме Чебышёва, называются, как известно, точками *чебышёвского альтернанса*. Если ищется наилучшее равномерное приближение линейной функцией, т.е. полиномом первой степени  $n = 1$ , то  $n+2 = 3$ , так что точек альтернанса должно быть не менее трёх штук. Но нередко их бывает гораздо больше. Нетрудно понять, что точки альтернанса соответствуют тем измерениям, значения образующих для которых — наименьшие, и из сделанного наблюдения следует, что таких точек не может одна или две. Их принципиально не меньше трёх, а, вообще говоря, и больше.

Что происходит в случае интервальных данных? Вместо точек мы имеем брусы неопределённости измерений в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ , так что в общем случае теорема Чебышёва здесь, строго говоря, неприменима. Тем не менее, если интервалы данных «не слишком широки» (или «достаточно узки»), то теорема Чебышёва всё-таки остаётся верной, и мы можем считать, что количество точек альтернанса остаётся равным как минимум  $n+2$ , т.е. 3 в линейном случае. Опять-таки, в реальных ситуациях их может быть довольно много, что хорошо демонстрируется при работе с практическими задачами.

Таким образом, в методе максимума согласования выбросы, если они имеются, в силу принципиальных математических причин всегда маскируются обычными информативными измерениями.

Тем не менее, если количество обрабатываемых измерений велико, то любая дополнительная информация о выбросах, любая техника, позволяющая сузить «круг подозреваемых», может оказаться полезной и имеет смысл быть применённой. Особенно, когда затраты на её реализацию пренебрежимо малы, как это имеет место с предложенной выше методикой исследования образующих распознающего функционала в точке максимума.

### **Библиографический список**

1. Шарый С.П. Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределённостями // Автоматика и Телемеханика. – 2012. – №2 – С. 111–125.

2. Шарый С.П., Шарая И.А. Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных // Вычислительные Технологии. – 2013. – Т. 18, №3. – С. 80–109.

3. Kreinovich V., Shary S.P. Interval methods for data fitting under uncertainty: a probabilistic treatment // Reliable Computing. – 2016. – Vol. 23. – P. 105–140.

4. Шарый С.П. Метод максимума согласования для восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределённостью // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. – 2017. – №6. – С. 3–19.

5. Шарый С.П. Сильная согласованность в задаче восстановления зависимостей при интервальной неопределённости данных // Вычислительные Технологии. – 2017. – Т. 22, №2. – С. 150–172.

6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Н. Численные методы. – Москва: Бином-Лаборатория базовых знаний, 2003.

7. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – Москва-Ленинград: ГИТТЛ, 1949.

## УДК 519.8

**Сравнительный анализ концентрации цитокина ИЛ-10 при различных схемах лечения пневмонии**

*А.А. Яковлев<sup>1</sup>, Е.В. Маркелова<sup>2</sup>, А.В. Костюшко<sup>2</sup>,  
А.И. Абакумов<sup>1,3</sup>*

*<sup>1</sup>Дальневосточный федеральный университет, <sup>2</sup>Тихоокеанский медицинский университет, <sup>3</sup>Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

Иммунная система является одной из наиболее чувствительных в организме, быстро реагирующей на контакт с повреждающими агентами. Активированные клетки иммунной системы выделяют цитокины. Цитокины — это низкомолекулярные белки, гликопротеины, которые вырабатываются активными клетками иммунной системы. Они регулируют интенсивность обменных процессов в организме, интенсивность воспаления, т. е. шага воспаления, увеличивая или уменьшая активность клеток иммунной системы. Исследование цитокинов имеет важное значение при интерпретации нарушений функциональной состоятельности иммунной системы организма, оценки степени тяжести, мониторинга эффективности проводимой терапии, прогноза течения и исхода пневмоний. По уровню вырабатываемых цитокинов можно судить о динамике воспалительного процесса [1, с. 27].

Внутрибольничные инфекции во всём мире являются одной из наиболее актуальных проблем здравоохранения. Нозокомиальная пневмония (НП) занимает третье место по частоте внутрибольничных инфекций [2, с. 28]. При этом летальность от НП достигает 70% у пациентов отделений интенсивной терапии с высокой степенью риска, что объясняется тяжестью состояния больных, а также быстротой развития резистентности нозокомиальной микрофлоры к широкому спектру антибиотиков [3, с. 20].

Целью экспериментального исследования было получение данных о влиянии *S.aureus*, как одного из микроорганизмов, наиболее часто вызывающих внутрибольничную пневмонию, и препаратов с иммуномодулирующими свойствами на активность клеток иммунной системы в отношении синтеза противовоспалительного цитокина ИЛ-10.

Исследование выполнено на неинбредных белых мышах весом 18-25 грамм, полученных из питомника лабораторных животных НИИЭМ СО РАМН г. Владивостока. Модель экспериментальной пневмонии получали, интраназально заражая мышей штаммом бактерий

*Staphylococcus aureus*, выделенным из бронхоальвеолярной лаважной жидкости пациента с установленным диагнозом НП.

Экспериментальным особям вводили следующие иммуномодулирующие препараты: препарат А – комплекс природных цитокинов на основе цельной крови здоровых доноров; препарат В – рекомбинантный (синтетический) регуляторный цитокин; препарат С – природный препарат на основе морепродуктов (вытяжки из оптических ганглиев кальмара).

Иммуномодулирующие препараты вводились в разных схемах и режимах. Схема: №1 – введение препарата за 2 суток до заражения *S.aureus*, №2 – в один день с заражением, №3 – через 2 суток после заражения. При введении препаратов использовались следующие режимы: только системное (в зависимости от вводимого препарата – внутримышечно, подкожно или перорально) и системное в сочетании с локальным воздействием (ультразвуковые ингаляции вводимого препарата). Концентрации ИЛ-10 исследовались в динамике через 1, 3, 5, 7, 10, 14 суток после воздействия иммуностропных препаратов.

По схеме №1 концентрация цитокина ИЛ-10 в сыворотке крови после введения препарата С в первые дни значительно выше, чем после введения препаратов А и В и после заражения штаммом бактерии, вызывающей НП, без введения препаратов (рисунок 1) и достигает максимального значения на третий день. Концентрации цитокинов после введения препаратов А и В и без введения препаратов сопоставимы.

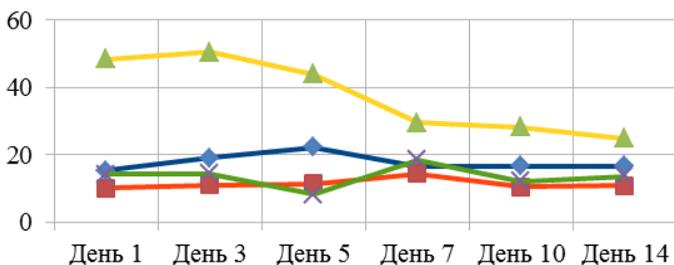


Рисунок 1 – Графики концентрации цитокина ИЛ-10 (пг/мл) в сыворотке крови после введения препаратов А (синий), В (красный), С (жёлтый) по схеме №1 и только при заражении (зелёный)

По схеме №2 концентрации цитокина ИЛ-10 в сыворотке крови после введения препарата С и В в первые 5 дней сопоставимы. При этом, как видно из графиков, концентрации цитокинов после введения препаратов А и после заражения штаммом бактерии, вызывающей НП, без введения препаратов также сопоставимы (рисунок 2).

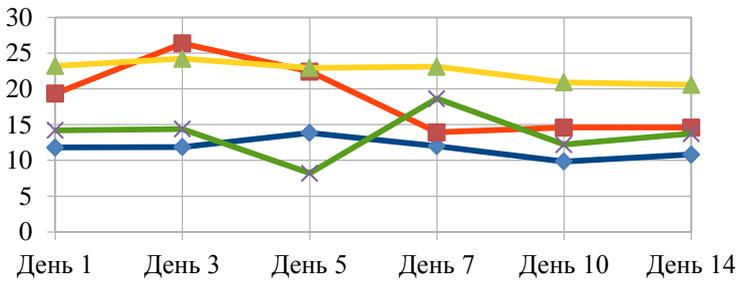


Рисунок 2 – Графики концентрации цитокина ИЛ-10 (пг/мл) в сыворотке крови после введения препаратов А (синий), В (красный), С (жёлтый) по схеме №2 и только при заражении (зелёный)

По схеме №3 концентрации цитокина ИЛ-10 в сыворотке крови после введения препарата С несколько выше, чем после введения препаратов А и В и заражения без введения препаратов. При этом, как видно из графиков, концентрации цитокинов после введения препаратов А и В и после заражения штаммом бактерии, вызывающей НП, без введения препаратов сопоставимы (рисунок 3).

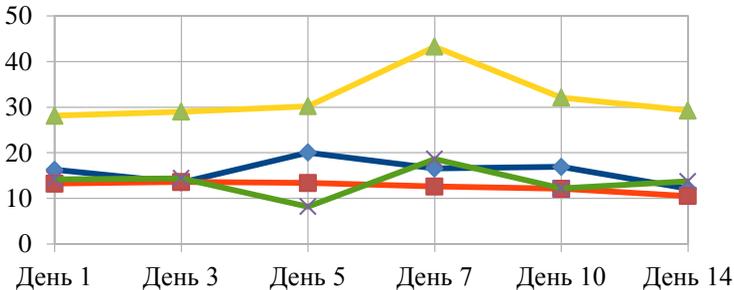


Рисунок 3 – Графики концентрации цитокина ИЛ-10 (пг/мл) в сыворотке крови после введения препаратов А (синий), В (красный), С (жёлтый) по схеме №3 и только при заражении (зелёный)

Сравнительный анализ графиков показывает, что наибольшая концентрация цитокина достигается при применении препарата С по схеме №1. Это позволяет утверждать, что применение данного препарата в профилактических целях увеличивает концентрацию противовоспалительного цитокина.

Основываясь на результатах анализа и качественного описания функционирования иммунной системы при заболевании пневмонией предполагается разработка динамической модели процесса профилактики и лечения НП [4, с. 180]. Моделирование направлено на выработку

ку эффективных методов активизации иммунной системы в борьбе с внутрибольничной пневмонией.

### **Библиографический список**

1. Костюшко А.В., Маркелова Е.В. Цитокиновый профиль при энтеробактериальной пневмонии в эксперименте // Патологическая физиология и экспериментальная терапия. – 2010. – №4. – С. 27–30.
2. Домникова Н.П., Сидорова Л.Д., Непомнящих Г.И. Внутрибольничные пневмонии: патоморфогенез, особенности клиники и терапии, критерии прогноза. – М.: Изд-во РАМН, 2003. – 287 с.
3. Волчек И.В. Современная антибактериальная терапия и перспективы иммунотерапии пневмоний // Terra medica. – 2001. – №4. – С. 20–21.
4. Романюха А.А. Математические модели в иммунологии и эпидемиологии инфекционных заболеваний. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 296 с.

**Секция 6. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**УДК 519.85**

**Алгоритм Дейкстры поиска кратчайшего пути в графе  
с использованием строковых матриц смежности**

*Ю.А. Алябышева  
АлтГУ, Барнаул*

В предыдущей нашей работе [1] было предложено при описании графов использовать матрицы смежности  $A$ , элементы которых  $a_{i,j}$  представляют собой не числа (обычно целые числа 0, 1 для не взвешенных графов, или веса ребер – вещественные числа для взвешенных графов), а записи, которые можно рассматривать как текст, несущий информацию о первом индексе, о весе ребра и о втором индексе. Если вес ребра равен 0, что соответствует случаю отсутствия ребра, то соответствующий матричный элемент заменяется на элемент  $\Lambda$  – пустое слово, для которого справедливо  $\Lambda a = a \Lambda = a$ . Матричная алгебра, ориентированная на использование в алгоритмах на графах, в силу нечислового характера элементов матриц смежности оказывается достаточно специфичной.

В заключении работы [1] было указано, что материалы, представленные на предыдущей конференции и посвященные описанию графов на языке матриц смежности со строковыми элементами, могут оказаться полезными для организации учебного процесса по дискретной математике, информатике для отработки известных алгоритмов на графах. В настоящей работе мы это постараемся продемонстрировать и проиллюстрировать на примере задачи о поиске минимального пути из одной заданной вершины  $x$  в другую, также наперед заданную, вершину  $y$ . Эта задача решается хорошо известным алгоритмом Дейкстры [2–4]. Мы предложим реализацию указанного алгоритма с использованием матриц смежности со строковыми элементами. Классическое описание алгоритма здесь не приводим в силу того, что его можно легко найти в специализированной литературе и многочисленных источниках в сети Интернет (например, в цитирувавшихся [2–4]).

Для цельности восприятия материала напомним некоторые основные содержательные моменты предыдущей публикации, необходимые для понимания решения заявленной задачи. Пусть для определенности имеется ориентированный (это требование не принципиально для дальнейшего обобщения), взвешенный, простой (без петель и кратных

ребер, будем использовать термин «ребро» вместо часто употребляющегося «дуга») граф с количеством вершин  $N$ . Тогда, структура графа в компьютерных программах может быть задана квадратной матрицей смежности  $A$ , элементы которой  $a_{i,j}$  фиксируют вершину  $i$ , вес –  $w_{i,j}$ , ребро  $j$ . Удобно отобразить сказанное записью:  $iw_{i,j}$ . Если ребра нет, на месте  $a_{i,j}$  ставим  $\Lambda$ . Вес пути, который ищется, очевидно равен сумме весов, входящих в него ребер:  $W = \sum w_{i,j}$ . Любой путь может быть записан с использованием введенных обозначений следующим образом:

$$(xw_{x,j})*(jw_{j,k}k)*(kw_{k,l}l)* \dots *(p w_{p,y}) \quad (1)$$

Путь минимальной длины не должен содержать повторно посещенные вершины, то есть в (1) не должно быть кратно встречающихся индексов. Обращаем внимание на последовательную цепочку индексов, описывающих переходы от одного узла к другому. Нетрудно заметить, что подобного рода выражения, полностью аналогичные (1) возникают, когда матрицы перемножаются. В частности, если числовая матрица смежности последовательно умножается сама на себя, порождаются матрицы достижимости вершин графа. Если количество сомножителей в (1) равно числу  $r$ , то для получения таких элементов матрицу смежности надо возводить в  $r$ -ю степень.

Квадрат матрицы смежности при использовании обычных числовых значений (0, 1) для элементов невзвешенных матриц дает количество способов попасть из одной вершины в другую (это хорошо известный результат), перемещаясь из вершины в вершину по ребрам в количестве два. Куб матрицы смежности дает тот же результат, но двигаться можно уже по ребрам в количестве три и т.д.

При использовании чисел в качестве элементов матрицы смежности теряется информация о путях перемещения по ребрам, а остается только информация о числе путей. Чтобы сохранить информацию о путях перемещения и было предложено использование матриц со строковыми элементами. При этом пришлось переопределить произведение матриц, заменив произведение элементов матриц на их конкатенацию. Тем самым можно легко адаптировать рассматриваемую матричную алгебру для реализации алгоритма Дейкстры. Для применимости предлагаемой реализации потребуются уметь извлекать из записи (1) весовые значения ребер и находить их суммы.

Опишем алгоритм.

Имея матрицу смежности  $A$ , нужно строить или вычислять матрицы достижимости  $A^2, A^3, \dots, A^{N-1}$ , последовательно умножая предыдущий результат на  $A$ :

$$A^{r+1} = A^r * A \quad (2)$$

Процесс построения пути обязательно завершится, если путь существует. Путь может обнаружиться даже на первом шаге алгоритма, но он может оказаться не минимальным. Уточнение его может продолжаться до рассмотрения матрицы достижимости  $A^{N-1}$ . Последний случай отвечает перебору всех вершин графа для построения кратчайшего пути из  $x$  в  $y$ . Если не применять никаких правил отбора элементов при вычислении матриц достижимости, будет происходить большой рост числа слагаемых в представлении каждого элемента матриц достижимости. Новые пути конструируются в рамках предлагаемого алгоритма. В конечном итоге построены будут все пути, начинающиеся из любой вершины графа и приходящие в любую другую вершину. Фактически так реализуется переборная задача, требующая больших вычислительных затрат. Однако многие из сконструированных путей для целей рассматриваемой задачи будут лишними.

Ситуацию спасают правила отбора. Опишем их. При  $r=1$  в матрице  $A$  – первом сомножителе в (2) нужно оставить только те элементы, которые имеют первый индекс равный  $x$ , что отвечает стартовой вершине, то есть остается только одна строка в матрице смежности. Второй сомножитель  $A$  берется полным. Вычислять в  $A^2$  нужно только строку  $x$ . В итоге в матрице достижимости  $A^2$  получим отличными от  $\Lambda$  все вершины, в которые можно добраться по одному ребру (если в конкатенации участвовал элемент  $\Lambda$ ), или по двум ребрам. Если элементы матрицы  $A^2$  содержат по два и более слагаемых, то нужно оставить только то из них, которое содержит меньшую сумму весов. Это слагаемое отвечает более короткому пути. Слагаемые, в которых дважды повторяются уже посещенные вершины можно сразу отбрасывать, исключив из рассмотрения.

На следующем этапе полученная строка матрицы достижимости  $A^2$  снова умножается на полную матрицу смежности  $A$ . Поскольку нас интересуют только пути, начинающиеся в  $x$ , в  $A^2$  опять оставляется только строка с номером  $x$ . В результате в матрице  $A^3$  происходит следующее: а) появляются элементы, описывающие попадание из  $x$  в новые вершины, которые ранее были недоступны (элементы, стоящие в строке  $x$  равные  $\Lambda$  в матрице достижимости  $A^2$  превращаются в  $A^3$  в элементы, аналогичные выражению (1) с тремя сомножителями); б) изменяются элементы матрицы  $A^2$ , ранее ставшие отличными от  $\Lambda$ , добавляется новый способ попадания в уже посещенную вершину, за счет путешествия из  $x$  по большему числу ребер. В новой матрице достижимости в элементах, отвечающих случаю б) производим отбор тех

слагаемых, которые описывают более короткий путь из вершины  $x$ . Обращаем внимание на то, что в матрицах достижимости  $A^r$  будут присутствовать элементы аналогичные (1), но содержащие разное число сомножителей.

Процесс построения новых матриц достижимости более высокого порядка нужно продолжать до тех пор, пока степень матрицы достижимости не станет равной  $N-1$ . Элемент, стоящий в  $x$ -ой строке и в  $y$ -ом столбце, будет решать поставленную задачу. Этот элемент также будет содержать и всю информацию о промежуточных вершинах, которые были посещены при реализации пути минимальной длины. Если этот элемент останется равным  $\Lambda$ , то для ориентированных графов это означает, что вершина  $y$  из вершины  $x$  недостижима.

Замечание 1. Если ищется минимальный путь в неориентированном графе, то можно одновременно отслеживать как прямой ход (движение от  $x$  к  $y$ ), так и обратный ход (движение от  $y$  к  $x$ ). Для этого нужно задействовать дополнительную строку с номером  $y$  в матрицах достижимости.

Замечание 2. Можно сократить количество операций по вычислению сумм весовых множителей в выражениях типа (1), если хранить в одномерном массиве результаты суммирования весовых множителей путей, проанализированных на предыдущих этапах реализации алгоритма.

Замечание 3. Получение элементов в матрицах достижимости и отбор нужных слагаемых можно реализовывать в рамках однопроходных алгоритмов, сокращая вычисления.

Нам представляется, что описанная реализация алгоритма Дейкстры достаточно наглядна, а матрицы смежности со строковыми элементами могут быть использованы в процессе реализации других алгоритмов из теории графов.

### Библиографический список

1. Алябышева Ю.А., Веряев А.А. Использование строковых матриц смежности в алгоритмах на графах // «МАК-2017»: сборник трудов Всероссийской конференции по математике. Барнаул, 29 июня – 1 июля 2016 г. – Барнаул : Изд-во Алт-ун-та, 2017. – С. 216–220.

2. Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. – Москва : Изд-во «И.Д. Вильямс», 2013. – 1328 с.

3. Клейнберг Д., Тардос Е. Алгоритмы: разработка и применение. – Санкт-Петербург, 2016. – 800 с.

4. Алгоритм Дейкстры // Заголовок с экрана [Электронный ресурс]  
// Режим доступа: [https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Алгоритм\\_Дейкстры](https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Алгоритм_Дейкстры).

**УДК 004.85**

## **Прикладное направление тематического моделирования в учебном процессе**

*Н.С. Бабкина, Л.Л. Смолякова*

*АлтГУ, г. Барнаул*

*Ключевые слова:* методы анализа текстовых данных, тематическое моделирование, обработка учебно-методических материалов, вычислительный эксперимент

Целью исследования является изучение возможностей современных методов анализа текстовых материалов их систематизация, сжатие для возможности быстрого восприятия и передачи, как во время проведения учебных занятий, так и при дистанционной форме организации учебного процесса. Переход от анализа конкретного текста к анализу коллекций текстов существенно расширяет возможности изучения и практического применения знаний о значении и употреблении слов естественного языка.

В последнее время популярным направлением извлечения информации из информационных потоков является использование различных статистических методов для обработки текста. Одним из таковых методов является метод тематического моделирования, позволяющий построить модель коллекции текстовых документов, определяющую тематическую направленность каждого из них [1].

Тематическое моделирование определяется как способ построения модели коллекции текстовых документов, которая позволяет перейти от набора документов к темам, определяющих содержание каждого документа. Тематическое моделирование способствует семантическому анализу коллекции текстовых документов [2].

Тематические модели — это модели со скрытыми переменными, для выявления которых лучше всего подходит нечеткая кластеризация, при которой любое слово или документ с некоторой вероятностью относится к нескольким темам [2].

Наиболее популярные в настоящий момент методы тематического моделирования можно разделить на две основных группы — алгебраические и вероятностные (генеративные) [1; 3; 4]. К алгебраическим моделям относятся стандартная векторная модель текста VSM (Vector

Space Model) и латентно-семантический анализ LSA (Latent Semantic Analysis), а среди вероятностных наиболее популярными являются вероятностный латентно-семантический анализ pLSA (probabilistic LSA) и латентное размещение Дирихле LDA (Latent Dirichlet Allocation).

### **Библиографический список**

1. Коршунов А., Гомзин А. Тематическое моделирование текстов на естественном языке // Труды Института системного программирования РАН, Том 23. – М.: РАН, 2012. – С. 215–242.
2. Кольцов С.Н., Кольцова О.Ю., Митрофанова О.А., Шиморина А.С. Интерпретация семантических связей в текстах русскоязычного сегмента Живого Журнала на основе тематической модели LDA // XVII Всероссийская объединенная конференция «Интернет И Современное Общество», 2014.
3. Воронцов К.В. Вероятностное тематическое моделирование [Электронный ресурс]. URL: [www.machinelearning.ru/wiki/images/2/22/Voron-2013-ptm.pdf](http://www.machinelearning.ru/wiki/images/2/22/Voron-2013-ptm.pdf).
4. Глушков Н.А. Анализ методов тематического моделирования текстов на естественном языке // Молодой ученый. – 2018. – №19. – С. 101–103. – URL <https://moluch.ru/archive/205/50247/>.

**УДК 519.6:532.5**

## **Некоторые вопросы численного решения двумерных разностных уравнений**

***А.К. Бакишев, Ф.С. Аменова***

*ВКГУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан*

Основными уравнениями, описывающими плоское течение несжимаемой ньютоновой вязкой жидкости с постоянными свойствами при отсутствии внешних сил, являются два уравнения количества движения – уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности [1–2].

При численном решении задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости используются уравнения Навье-Стокса, записанные как относительно переменных «вектор скорости-давление» [3–5], так и в переменных «функция тока-вихрь скорости». Для изучения двумерных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости в большей мере используются уравнения Навье-Стокса, записанные в переменных «функция тока-вихрь скорости». Привлекательность рассмотрения уравнений Навье-Стокса в переменных «функция тока-

вихрь скорости» заключается в том, что удается сократить число уравнений по сравнению с записью в физических переменных «вектор скорости-давление» и тождественно удовлетворить закон сохранения массы.

Вопросам численного решения двумерных краевых задач для уравнений несжимаемой жидкости в переменных «функция тока, вихрь скорости» посвящено достаточное количество научных публикаций. Описания наиболее известных вычислительных технологий, используемые при проведении вычислительных экспериментов для изучения различных течений несжимаемой жидкости можно найти в монографиях П. Роуча, О.М. Белоцерковского, В.М. Пасконова, В.И. Полежаева, Л.А. Чудова, С. Патанкара, Е.Л. Тарунина и др.

**Постановка задачи.** В области  $D = \{0 \leq x, y \leq 1\}$  рассмотрим двумерную систему стационарных уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости следующего вида [1]:

$$\left( \Omega \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_x - \left( \Omega \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_y = \nu \Delta \Omega + f(x, y), \quad (1)$$

$$\Delta \Psi = \Omega, \quad (x, y) \in D \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{n}} \Big|_{\partial D} = 0, \quad (3)$$

где  $\bar{n}$  – внешняя нормаль к границе области;  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа;  $\Psi$  – функция тока;  $\Omega$  – вихрь скорости;  $\nu$  – коэффициент вязкости;  $f(x, y)$  – заданная функция.

Для аппроксимации уравнений (1), (2) в расчетной области  $D_h = \{(kh_1, mh_2), k \in \overline{1, N_1 - 1}, m \in \overline{1, N_2 - 1}\}$ , где  $h_1$  и  $h_2$  шаги конечно-разностной сетки по направлениям  $x$  и  $y$  соответственно, рассмотрим разностную схему на симметричном шаблоне вида:

$$L_h(\Omega)\Psi = \nu \Delta_h \Omega + f, \quad (4)$$

$$\Delta_h \Psi = \Omega, \quad (5)$$

где разностный оператор  $L_h$  соответствует аппроксимации конвективных слагаемых уравнений (1) и имеет вид:

$$L_h(\Omega)\Psi = \left( \Omega \Psi_0 \right)_x - \left( \Omega \Psi_0 \right)_y, \quad (6)$$

где  $\Psi_0$ ,  $\Psi_0$  – разностные производные по направлениям  $x$  и  $y$ .

На участках границ

$$\Psi_{0,m} = \Psi_{N_1,m} = 0, \quad m = \overline{1, N_2 - 1}, \quad \Psi_{k,0} = \Psi_{k,N_2} = 0, \quad k = \overline{1, N_1 - 1}, \quad (7)$$

для вихря скорости краевые условия взяты в виде формул Вудса [1, с. 217–218], которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Omega_{0,m} + \frac{1}{2}\Omega_{1,m} &= \frac{3}{h_1}\Psi_{x,0,m}, & \Omega_{N_1,m} + \frac{1}{2}\Omega_{N_1-1,m} &= -\frac{3}{h_1}\Psi_{x,N_1,m}, & m &= \overline{1, N_2 - 1}, \\ \Omega_{k,0} + \frac{1}{2}\Omega_{k,1} &= \frac{3}{h_2}\Psi_{y,k,0}, & \Omega_{k,N_2} + \frac{1}{2}\Omega_{k,N_2-1} &= -\frac{3}{h_2}\Psi_{y,k,N_2}, & k &= \overline{1, N_1 - 1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Исследование устойчивости и сходимости итерационных алгоритмов численной реализации решения сеточных уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости (4)-(8) существенным образом опираются на результаты, которые могут быть получены для случая линейной задачи Стокса

$$\Delta\Omega = f(x, y), \quad (9)$$

$$\Delta\Psi = \Omega \quad (x, y) \in D, \quad (10)$$

с краевыми условиями вида (3). Здесь, для простоты изложения, полагаем, что  $V=1$ .

В этом случае соотношения (4), (5) могут быть представлены в следующей форме:

$$\Delta_h \Omega_{k,m} = \frac{\Omega_{k+1,m} - 2\Omega_{k,m} + \Omega_{k-1,m}}{h_1^2} + \frac{\Omega_{k,m+1} - 2\Omega_{k,m} + \Omega_{k,m-1}}{h_2^2} = f_{k,m}, \quad (11)$$

$$\Delta_h \Psi_{k,m} = \frac{\Psi_{k+1,m} - 2\Psi_{k,m} + \Psi_{k-1,m}}{h_1^2} + \frac{\Psi_{k,m+1} - 2\Psi_{k,m} + \Psi_{k,m-1}}{h_2^2} = \Omega_{k,m}, \quad (12)$$

$$k \in \overline{1, N_1 - 1}, \quad m \in \overline{1, N_2 - 1}$$

Исследуем устойчивость решения разностной задачи (11), (12) с краевыми условиями вида (7), (8). Соотношение (11) умножим на  $\Psi_{k,m} h_1 h_2$ , просуммируем по внутренним узлам сетки  $D_h$ , далее, используя формулы суммирования по частям и краевые условия (7), имеем энергетическое тождество:

$$\sum_{m=1}^{N_2-1} \left( \Omega_{0,m} \Psi_{x,0,m} - \Omega_{N_1,m} \Psi_{x,N_1,m} \right) h_2 + \sum_{k=1}^{N_1-1} \left( \Omega_{k,0} \Psi_{y,k,0} - \Omega_{k,N_2} \Psi_{y,k,N_2} \right) h_1 + \|\Delta_h \Psi\|^2 = (f, \Psi)$$

где  $\|f\|$  – норма сеточной функции в пространстве  $L_{2,h}(D_h)$ . Отсюда, учитывая краевые условия вида (8), после несложных преобразований имеем:

$$\begin{aligned} & \|\Delta_h \Psi\|^2 + \frac{h_1 h_2}{4} \left( \sum_{m=1}^{N_2-1} (|\Omega_{0,m}|^2 + |\Omega_{N_1,m}|^2) + \sum_{k=1}^{N_1-1} (|\Omega_{k,0}|^2 + |\Omega_{k,N_2}|^2) \right) - \\ & - \frac{h_1 h_2}{12} \left( \sum_{m=1}^{N_2-1} (|\Omega_{1,m}|^2 + |\Omega_{N_1-1,m}|^2) + \sum_{k=1}^{N_1-1} (|\Omega_{k,1}|^2 + |\Omega_{k,N_2-1}|^2) \right) + \\ & + \frac{h_1 h_2}{12} \sum_{m=1}^{N_2-1} \left( (\Omega_{0,m} + \Omega_{1,m})^2 + (\Omega_{N_1,m} + \Omega_{N_1-1,m})^2 \right) + \\ & + \frac{h_1 h_2}{12} \sum_{k=1}^{N_1-1} \left( (\Omega_{k,0} + \Omega_{k,1})^2 + (\Omega_{k,N_2} + \Omega_{k,N_2-1})^2 \right) = (f, \Psi). \end{aligned}$$

Следовательно, можно записать, что

$$\frac{11}{12} \|\Delta_h \Psi\|^2 \leq (f, \Psi).$$

Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского получим оценку:

$$\|\Delta_h \Psi\| \leq c_0 \|f\|.$$

Здесь  $C_0$  константа не зависящая от параметров сетки  $h_1, h_2$ .

### Библиографический список

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
3. Белоцерковский О.М., Гушин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. –1975. – Т.15, №1. – С.197–207.
4. Данаев Н.Т., Урмашев Б.А. Итерационные схемы для решения вспомогательных сеточных уравнений Навье-Стокса // Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. – 2000. – № 4. – С. 74–78.

### Применение векторов при решении задач по элементарной математике

*А.К. Бакишев<sup>1</sup>, Р.О. Нурканова<sup>2</sup>, О.Д. Апышев<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*ВКГУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан;*

<sup>2</sup>*КНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

Понятие вектора может быть успешно применено не только в геометрии, но и при изучении некоторых вопросов элементарной математики, например, при решении систем уравнений (не только алгебраических), доказательстве неравенств, решении тригонометрических, иррациональных неравенств и уравнений, а также при нахождении крайних значений функций. При этом, как будет видно ниже, решения получаются моментально, оригинально и красиво по сравнению со стандартными, традиционными способами.

Для достижения этой цели нам достаточно вспомнить со школьного курса понятия скалярного произведения для конечномерного пространства евклида, неравенство треугольника и коллинеарность векторов.

Теперь перейдем к решению нескольких примеров в действительной области с применением векторов.

Пример 1. Найти все решения уравнения

$$2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93} = 7\sqrt{2x+137}$$

Решение. Введем два трехмерных вектора:

$\vec{a} = (2; 3; 6)$ ,  $\vec{b} = (\sqrt{x+7}; \sqrt{37-2x}; \sqrt{3x+93})$ . Тогда левая часть данного уравнения будет являться скалярным произведением этих векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Найдем длины этих векторов:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(x+7) + (37-2x) + (3x+93)} = \sqrt{2x+137}.$$

Поэтому, исходное уравнение можно переписать в виде  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Так как оба вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – ненулевые, отсюда делаем вывод, что угол между векторами равен нулю, поэтому векторы коллинеарные, равносильно тому, что  $\exists$  число  $k > 0$ , что  $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ , в координатной записи  $\sqrt{x+7} = 2k$ ,  $\sqrt{37-2x} = 3k$ ,  $\sqrt{3x+93} = 6k$ .

Единственным решением этой системы является пара  $(x; k) = (5; \sqrt{3}) \Rightarrow x = 5$ .

Примечание: Если воспользоваться классическим неравенством Коши-Буняковского, то сразу придем к последней системе.

Ответ:  $x = 5$ .

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+y-2} \end{cases} \quad (1)$$

Решение: Из системы уравнений имеем  $x > 1$ . Введем два двумерных вектора

$\vec{a} = (x; y)$ ,  $\vec{b} = (\sqrt{y-1}; \sqrt{x-1})$ , тогда  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{x+y-2}$ . Теперь найдем скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , тогда,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1}$ .

Так как  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 2\sqrt{x+y-2}$ , то из второго уравнения системы (1) следует, что  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ , значит вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  являются коллинеарными, следовательно, соответствующие координаты пропорциональны:  $\frac{x}{\sqrt{y-1}} = \frac{y}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow x\sqrt{x-1} = y\sqrt{y-1}$ .

Введем вспомогательную функцию  $\varphi(x) = x\sqrt{x-1}$ . Тогда получим функциональное уравнение  $\varphi(x) = \varphi(y)$ . Так как  $\varphi'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x}{2\sqrt{x-1}} > 0$  при  $x > 1 \Rightarrow$  функция  $\varphi(x)$  является возрастающей, то из  $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$ . (Монотонная функция каждое свое значение принимает только один раз). В таком случае первое уравнение системы (1) дает  $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ , так как  $x > 1 \Rightarrow x = y = \sqrt{2}$

Ответ:  $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ .

Пример 3. Решить уравнение

$$\sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} = \sqrt{3}$$

Решение: На плоскости  $XOY$  рассмотрим векторы  $\vec{a} = (\sin x; \cos x)$  и  $\vec{b} = (\sqrt{1 + \cos^2 x}; \sqrt{1 + \sin^2 x})$ , тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} = \sqrt{3};$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1; |\vec{b}| = \sqrt{1 + \sin^2 x + 1 + \cos^2 x} = \sqrt{3}.$$

Поэтому исходное уравнение можно записать в виде  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow$  векторы коллинеарные, значит соответствующие координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \Rightarrow \sin^2 x + \sin^4 x = \cos^2 x + \cos^4 x \Rightarrow \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Из условия системы следует, что  $\sin x > 0$  и  $\cos x > 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 4. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{9x^2 - 24x + 41} + \sqrt{9x^2 - 12x + 53}$$

Решение: Запишем функцию  $f(x)$  следующим образом:

$$f(x) = \sqrt{(3x - 4)^2 + 5^2} + \sqrt{(2 - 3x)^2 + 7^2}$$

Введем векторы  $\vec{a} = (3x - 4; 5)$ ,  $\vec{b} = (2 - 3x; 7)$  тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{9x^2 - 24x + 41}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{9x^2 - 12x + 53}$$

$\vec{a} + \vec{b} = (-2; 12)$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{37}$ , итак,  $f(x) \geq 2\sqrt{37}$ , поэтому наименьшее значение  $f(x)$  есть  $2\sqrt{37}$ . Знак равенства достигается тогда и только тогда, если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены, т.е.  $\frac{3x-4}{2-3x} = \frac{5}{7} \Rightarrow 21x - 28 = 10 - 15x \Rightarrow 36x = 38 \Rightarrow x = \frac{19}{18}$ .

Поэтому,  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{19}{18}\right) = 2\sqrt{37}$ .

Ответ:  $2\sqrt{37}$ .

### Библиографический список

1. Супрун В.П., Математика для старшекласников. Нестандартные методы решения задач. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 270 с.
2. Севрюков П.Ф. Смоляков А.Н. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства. – М.: Илекса: Народное образование; Ставрополь: Сервис-школа, 2008. – 352 с.
3. Фалин Г.И. Фалин А.И. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ. – Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 367 с.:ил. (Поступаем в вуз).
4. Лихтарников Л.М. Элементарное ведение в функциональные уравнения. – Санкт-Петербург : Изд. «Лань», 1997. – 160 с.

УДК 378.14

## Математический квест как современная форма промежуточного контроля

**Н.В. Баянова<sup>1</sup>, В.В. Лодейщикова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*АлтГУ, г. Барнаул;*

<sup>2</sup>*АлтГТУ им. И.И. Ползунова, г. Барнаул*

Общий курс математики для студентов нематематических направлений вузов читается на первом-втором курсах и является для обучающихся одним из самых трудных для усвоения.

Безверхний В.Н., Гализдра В.И., Гринблат В.А. [1] выделяют основные причины, не позволяющие студентам эффективно осваивать математические дисциплины:

- слабая школьная подготовка по математике;
- низкая мотивация к обучению;
- принципиальное отличие объемов изучаемой информации в школе и в вузе;
- отсутствие у выпускников школ навыков самостоятельной работы;
- неумение работать с учебной и научной литературой.

Для преодоления трудностей в изучении математики необходимо пересмотреть традиционные формы промежуточного контроля знаний студентов в пользу интерактивных технологий. В настоящее время становятся популярными образовательные квесты.

Понятие «квест» (англ. quest – поиск) обозначает игру, где участник квеста, прибегая к помощи собственных знаний и общаясь с другими игроками, должен выполнить некоторый набор заданий и достигнуть определенной цели.

Образовательный квест можно рассматривать не только как современный метод обучения и получения новых знаний, но и как форму контроля знаний.

Образовательные квесты различают по режиму проведения, сроку реализации, форме работы, структуре сюжетов [2–5].

В зависимости от сюжета различают:

- линейные квесты (игра построена по цепочке: выполнив одно задание, участники квеста получают следующее, и так до тех пор, пока не пройдут весь маршрут);

– штурмовые квесты (все игроки получают основное задание и перечень точек с подсказками, но при этом самостоятельно выбирают пути решения задач);

– кольцевые квесты (линейные квесты, замкнутые в круг, в которых участники стартуют с разных точек, которые будут для них финишными).

По режиму проведения выделяют квесты:

- в реальном режиме;
- в виртуальном режиме;
- в комбинированном режиме.

По сроку реализации квесты бывают долгосрочными и краткосрочными. По форме работы различают групповые и индивидуальные квесты.

Образовательный квест, как правило, содержит:

– введение, в котором прописывается сюжет квеста и определяются роли участников;

– задания, выполнение которых поможет достигнуть цели;

– порядок выполнения заданий, правила получения бонусных баллов и штрафов;

– оценку, которая включает в себя подведение итогов и распределение призов.

В работе [6] авторы рассматривали математический квест как форму проведения входного контроля студентов-первокурсников. В настоящей работе мы предлагаем использовать математический квест как форму промежуточного контроля по теме «Определенный интеграл».

Проведение промежуточного контроля знаний в форме математического квеста позволяет:

1. Содействовать формированию у студентов умения анализировать и находить способы решения практических задач, умения исследовать построенные математические модели реальных ситуаций.
2. Содействовать формированию у студентов умения находить в различных источниках информацию необходимую для решения задачи, принимать решение в условиях неполной или избыточной информации, планировать и осуществлять деятельность на решение задач исследовательского характера.
3. Содействовать формированию у студентов умений ясно, четко, грамотно излагать свои мысли, контролировать процесс и результат решения задач.

Целью квеста «На даче у друзей» является обобщение и систематизация теоретических знаний по теме «Определенный интеграл», а также совершенствование навыков решения задач на вычисление площадей, объёмов, площадей поверхности и т.д.

Для подготовки к квесту студентам предлагается повторить учебный материал по теме. На практическом занятии, предшествующем занятию-квесту, случайным образом происходит распределение на команды (в команде не более 4 человек). На проведение квеста отводится 120 мин. Каждая команда получает свой маршрутный лист и навигатор прохождения по этапам квеста. В качестве награды за прохождение этапа команда получает одну букву, например, испанского алфавита, из которых в итоге необходимо собрать слово. Команда, которая прошла все этапы и собрала слово, считается победителем.

На вычисление пути, пройденного телом, предложен этап «Путь на дачу». Этот этап первый для всех команд. Все остальные этапы команды проходят согласно своему маршрутному листу. На этапе «Клумба» предусмотрено вычисление площади фигур. Формы различных «клумб» задаются рисунками. В ходе выполнения необходимо определить уравнения кривых и границы интегрирования. На вычисление объёма – «Наполним сосуды». На этапе «Строим забор» вычисляется длина кривой. На этапе «Кроем крышу необычной формы» необходимо вычислить площадь поверхности.

Если команда не справляется с заданием или допускает вычислительные ошибки, она получает дополнительное задание – заполнить недостающие слова в определении.

Обычно, по теме «Неопределенный интеграл» проводится контрольная работа. Поскольку типов задач в этой контрольной достаточно много, то добавление задания на вычисление определенного интеграла излишне. Практических занятий по теме «Определенный интеграл» не много, поэтому проведение промежуточного контроля в традиционной форме в виде контрольной работы вызывает у большинства студентов определенные трудности. Проведение же промежуточного контроля по теме «Определенный интеграл» в виде линейного краткосрочного группового квеста позволяет установить взаимодействие между студентами, обучить студентов работать в группе, пробудить у участников квеста интерес к обучению.

### **Библиографический список**

1. Безверхний В.Н., Гализдра В.И., Гринблат В.А. Пути преодоления проблем в изучении высшей математики // Научные и образовательные проблемы гражданской защиты. – 2016. – №2 (29). – С. 76–81.

2. Осяк С.А., Султанбекова С.С., Захарова Т.В., Яковлева Е.Н., Лобанова О.Б., Плеханова Е.М. Образовательный квест – современная образовательная технология // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1-2. – С. 156. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=20247> (дата обращения: 03.05.2018).

3. Кичерова М.Н., Ефимова Г.З. Образовательные квесты как креативная педагогическая технология для студентов нового поколения // Интернет-журнал «Мир науки». – 2016. – №5 (4). – С. 28. [Электронный ресурс]. URL: <https://mir-nauki.com/PDF/28PDMN516.pdf> (дата обращения: 03.05.2018).

4. Кузнецова А.Ю., Шевчук Е.П. Квест-технология в преподавании предметов естественно-математического цикла // МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. – С. 240–243.

5. Игумнова Е.А., Радецкая И.В. Квест-технология в образовании: учеб. пособие / Забайкал. гос. ун-т. – ЧитаЗабГУ, 2016. – 164 с.

6. Баянова Н.В., Лодейщикова В.В. Математический квест как форма проведения входного контроля студентов-первокурсников // Сборник научных статей международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования» – 2017 [Электронный ресурс] / АлтГУ; отв. ред. Е. Д. Родионов. – Электрон. текст. дан. – Барнаул: ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет», 2017. – С. 1833–1834.

## УДК 378.14

### Дистанционное обучение дискретной математике

*А.Р. Джандигулов, К. Тлепбай*

*Евразийский НУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*

Исследования последних лет показывают, что если совсем недавно человечество стремилось научить машины говорить, думать и делать как человек, то сейчас время требует учить людей думать на машинном языке. Если до недавнего времени считалось, что машины могут только воссоздать то, что в них заложено и не могут произвести на свет ни одной новой мысли, то сейчас уже мы имеем массу примеров, когда машины успешно руководят целыми проектами, становятся «лучшими педагогами» вузов [1], проявляют себя почти во всех сферах жизни общества [2]. Под машинным языком надо понимать не программные коды, а об-

щепринятые и широко распространенные стандарты представления, передачи, хранения и обработки информации.

Поэтому обучение машинному языку является одной из важных задач любой современной образовательной программы. На наш взгляд, основой такого языка является дисциплина дискретная математика. Уровень знаний человека по математике начиная со школьной арифметики, геометрии, алгебры и начала анализа, постоянно развивается в профессиональном образовании, охватывая и проникая во все другие дисциплины. Таким же образом параллельно должен развиваться и уровень знаний дискретной математики. Ведь дискретная математика также начинается с теории множеств и булевой алгебры, расширяется и проникает в разные сферы, при этом порождая новые дисциплины, такие как криптография, теория алгоритмов, теория графов и т.д. При этом работая с конечными (или счетными) множествами она, на наш взгляд, является более понятной для человека, так как имеет более прикладной характер. Основным поставщиком задач и направлений развития для дискретной математики являются компьютерные (машинные) технологии.

Развивая данную тематику было бы логично использовать все существующие компьютерные технологии методики компьютерного обучения при обучении дискретной математике. В нашем исследовании как раз рассматриваются дистанционные технологии обучения и методика их применения для обучения дискретной математике.

Практическим результатом является разработка образовательного интернет-портала, призванного стать центром дистанционного обучения дискретной математике. Портал предназначен не только для желающих обучаться дискретной математике, но и для педагогов, которые могут, во-первых, повысить свою квалификацию (с получением соответствующего сертификата), во-вторых, участвовать в обсуждении имеющихся методик, а также поделиться своими разработками в данной области.

Актуальность данной работы обосновывается еще и существованием в стране малокомплектных школ, недостаточность профессиональных кадров, знающих дискретную математику.

Теоретический материал и примеры взяты с учебного пособия [3].

### **Список используемых источников**

1. Робот проработал преподавателем вуза в Джорджии почти полгода, но никто из студентов этого не заметил. <http://www.runyweb.com/articles/usa-today/imagine-discovering-that-your-teaching-assistant-really-is-a-robot.html>.

2. Порабощение человека. Как роботы стали музыкантами, учителями, актерами и даже руководителями.  
<https://lenta.ru/articles/2014/09/05/socialrobots/>

3. Джандигулов А.Р. Сборник задач по дискретной математике. Учебное пособие. Алматы: «Эверо», 2017, 96 с.

## УДК 512

### **Метод сопряженных градиентов для решения систем линейных алгебраических уравнений**

*А.Р. Джандигулов, Л. Назик*

*Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева,  
Астана, Казахстан*

Одной из задач обучения бакалавров специальности «математика» является привить им навыков исследовательской работы. В настоящей работе мы ставим цель разработать методические рекомендации для обучающихся университетов к изыскательской деятельности на примере темы «Метод сопряженных градиентов для решения систем линейных алгебраических уравнений». Выбор данной темы обусловлен следующими причинами:

1. Тема является естественным развитием курсов высшей алгебры и математического анализа.
2. Задачи указанных курсов рассматриваются с точки зрения численных методов, тем самым расширяя кругозор обучающихся в область вычислительной математики, алгоритмизации и программирования.
3. Указанные методы сопряженных градиентов применяются в различных прикладных задачах и являются в настоящее время развивающимися. Так что обучающихся погружаем в новую исследовательскую область знаний, например, в организацию параллельных вычислений.

Постановка задачи в методе сопряженных градиентов стандартная. Требуется решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Сложность решения таких систем заключается, во-первых, в огромном количестве вычислительных операций, таких, что с ними не справляется даже современный компьютер, во-вторых, при выполнении операции деления неизбежно возникает необходимость округления результатов, что вызывает возникновение ошибок, которые накапливаются и, в конечном счете, приводит не всегда к правильному результату. Поэтому разрабатываются различные итерационные методы,

к которым и относится рассматриваемый метод сопряженных градиентов.

Итак, требуется решить СЛАУ

$$\begin{aligned} a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 + \dots + a_{0,n-1}x_{n-1} &= b_0 \\ a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} &= b_1 \\ &\dots \\ a_{n-1,0}x_0 + a_{n-1,1}x_1 + \dots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} &= b_{n-1} \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$Ax = b$$

*Метод сопряженных градиентов* – один из наиболее известных итерационных методов решения систем линейных уравнений. Он может быть применен для решения системы линейных уравнений с симметричной, то есть если она совпадает со своей транспонированной матрицей  $A=A^T$  и положительно определенной матрицей, то есть если выполняется неравенство  $x^T Ax > 0$  для любых  $x$ . К таким матрицам приводятся, например, различные численные аппроксимации краевых задач дифференциальных уравнений. Метод сопряженных градиентов достаточно быстро сходящийся метод, другими словами после выполнения  $n$  итераций метода сопряженных градиентов ( $n$  есть порядок решаемой системы линейных уравнений), очередное приближение  $X_n$  совпадает с точным решением.

Если матрица  $A$  симметричная и положительно определена, то функция:

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T \cdot A \cdot x - x^T b + c$$

имеет единственный минимум, который достигается в точке  $X^*$ , совпадающий с решением системы линейных уравнений.

Итерация метода сопряженных градиентов состоит в вычислении очередного приближения к точному решению

$$x^k = x^{k-1} + s^k d^k,$$

где

$x^k$  – очередное приближение;

$x^{k-1}$  – приближение, построенное на предыдущем шаге;

$s^k$  – скалярный шаг;

$d^k$  – вектор направления.

Перед выполнением первой итерации  $X_0$  и  $d_0$  полагаются равными нулю, а для вектора  $g_0$  устанавливается значение  $-b$ .

Алгоритм применения метода состоит из следующих итерационных шагов:

1. Вычисление градиента  $g^k = A \cdot x^{k-1} - b$
2. Вычисление вектора направления

$$d^k = -g^k + \frac{\left( (g^k)^T, g^k \right)}{\left( (g^{k-1})^T, g^{k-1} \right)} d^{k-1}$$

3. Вычисление величины смещения по заданному направлению

$$s^k = \frac{\left( d^k, g^k \right)}{\left( d^k \right)^T \cdot A \cdot d^k}$$

4. Вычисление нового приближения

$$x^k = x^{k-1} + s^k d^k$$

Вычислительная сложность алгоритма

Для освоения данной темы обучающимся предлагается изучить следующие работы по направлениям:

1. Применение метода сопряженных методов в различных областях [1, 2, 3].
2. Использование различных пакетов прикладных программ для решения задач методом сопряженных градиентов [4, 5, 6].

### Библиографический список

1. Васильев В.И., Кардашевский А.М., Попов В.В. Решение задачи Дирихле для уравнения колебаний струны методом сопряженных градиентов // Вестник СВФУ. 2015.
2. Осипов А.И., Скиба М. В. Применение метода сопряженных градиентов для эффективного управления промышленным предприятием // Известия Самарского научного центра РАН. 2006. №4.
3. Земскова Ю. Н. Метод сопряженных градиентов при решении краевых задач в трехмерном пространстве на нейронных сетях с радиальными базисными функциями активации // Известия ПГУ им. В.Г. Белинского. 2011.
4. Монаков А.В., Платонов В. А. Оптимизация метода решения линейных систем уравнений в OpenFOAM для платформы MPI + CUDA // Труды ИСП РАН. 2014. №3.
5. The conjugate gradient method for solving systems of linear algebraic equations. A thesis submitted to the University of Manchester for the degree

of Master of Philosophy in the Faculty of Engineering and Physical Sciences in 2014.

6. Mike Rambo. The Conjugate Gradient Method for Solving Linear Systems of Equations. May 2016, Department of Mathematics, Saint Mary's College of California.

## **УДК 37.016:51**

### **Самоучитель решения математической задачи как средство обучения элементарной математике студентов бакалавриата педагогического вуза**

***И.В. Кисельников***  
*АлтГПУ, г. Барнаул*

В современных условиях внедрения в практику высшего педагогического образования обновленных ФГОС ВО (3++) и предстоящего введения в действие профессионального стандарта педагога, возрастают требования к подготовке будущих учителей, в частности учителей математики. В формировании универсальных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций существенная роль отводится самостоятельной работе студентов, учебно-методическое обеспечение которой при изучении профильных предметных математических дисциплин претерпевает изменения.

Одними из средств обучения, обеспечивающим реализацию системно-деятельностного подхода к обучению и положительно зарекомендовавших себя на практике организации самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины «Элементарная математика» в педагогическом вузе, являются самоучители математических задач (далее – самоучители).

При разработке самоучителей целесообразным представляется учет следующих положений (1–9), основанных на изучении опыта, полученного студентами на предыдущем уровне образования, анализа предметных результатов ЕГЭ по математике профильного уровня у абитуриентов педагогического вуза [1], изучения результативных практик и идей развития познавательной самостоятельности учащихся [2, 3] и обеспечения понимания учебного материала [4].

1. Использование самоучителя может создавать условия для развития у обучающихся мыслительных действий анализа, сравнения, обобщения, конкретизации. Схематизация решения задачи, достигаемая, в частности составлением интеллект-карт (ментальных карт) способствует пониманию учебного материала обучающимися.

2. Более востребованными являются комбинированные по своему функциональному назначению средства самообучения, обеспечивающие коммуникативную, управленческую и кумулятивную функции в процессе обучения.

3. Опыт показывает результативность разработки и применение самоучителей решения задач алгоритмического характера, решение которых обеспечивается отработкой определенных схем действий, применяемых в различных ситуациях.

4. Несмотря на отсутствие ограничений по оформлению решений, нацеленность в процессе обучения на поиск полного математически грамотного, логически последовательного решения поддерживается выработкой некоторой структуры, формы, представления решения определенной задачи, в первую очередь, стандартной.

6. Диалогичность самоучителя является его существенной характеристикой, необходимым условием обеспечения понимания как «формирования смысла знания в процессе действия с ним» [5, с. 26].

7. Самоучитель обладает преимуществами перед другими средствами обучения в использовании учащимися, обладающими так называемым «клиповым мышлением». Поэтапная отработка действий при решении задачи в условиях дозированного предъявления информации самоучителем способствует целостному овладению знаниями и становлению умений.

8. Средство самообучения должно обладать потенциальной возможностью удобной ИКТ реализации с возможностью использования мультимедиа, включения дополнительного справочного материала, удобной навигации, поиска и др. В самоучителе целесообразно использование различных форм представления учебного математического материала. Интерес представляют, в частности, разработки, в которых формулы сопровождается текстовым аналогом для правильного ее озвучивания и применения.

9. Средство самообучения должно обеспечивать предупреждение потенциальных погрешностей участников экзамена, в первую очередь типичных.

Основной функцией самоучителя как средства обучения в процессе в процессе изучения элементарной математики является в обеспечение условий для анализа задачи и содержательного усвоения свойств изучаемых математических объектов в форме учебного диалога.

### **Библиографический список**

1. Кисельников И.В. Диагностика типичных ошибок при решении задач с кратким ответом ЕГЭ по математике профильного уровня в

регионе (на примере Алтайского края) // Дидактика математики: проблемы и исследования: международный сборник научных работ. – Донецк. – 2017. – Вып. 46. – С. 72–76.

2. Тарбокова Т.В., Шахматов В. М. Самоучитель решения задач по теме: Предел и непрерывность функции одного аргумента: учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. политехнического ун-та, 2007. – 82 с.

3. Формирование познавательной самостоятельности школьников в процессе усвоения системы ведущих знаний и способов деятельности : сб. науч. ст. / под ред. Т. И. Шамовой. Москва : Наука, 1975. – 180 с.

4. Брейтигам Э.К. Педагогические условия обеспечения понимания учебного материала // Психодидактика высшего и среднего образования : материалы одиннадцатой международной научно-практической конференции / Научные редакторы А.Н. Крутский, О.С. Гибельгауз. – Барнаул. – 2016. – С. 151–153.

5. Знаков В.В. Психология понимания: Проблемы и перспективы. – М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2005. – 448 с.

## УДК 378.14

### **Применение системы Moodle для организации дистанционной поддержки образовательного процесса в вузе**

***Г.В. Кравченко, А.В. Устюжанова***

*АлтГУ, г. Барнаул*

В соответствии с концепцией модернизации образования основная задача высшей школы заключается в формировании творческой личности выпускника, обладающего набором компетенций, проявляющихся в способности решать проблемы и задачи в различных сферах человеческой деятельности, способного к саморазвитию, самообразованию, профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности, инновационной деятельности [1]. В формировании названных качеств особая роль отводится самостоятельной работе студентов, представляющей не просто форму образовательного процесса, а основу становления конкурентноспособного выпускника.

Согласно требованиям ФГОС ВПО 3-го поколения к организации учебного процесса в вузе до 60% от общего количества учебной нагрузки отводится на самостоятельную работу студентов. При этом степень активности учебно-познавательной и творческой деятельности студентов, а также эффективность самого учебного процесса определяются грамотной, целенаправленной организацией всех видов самостоятельной работы. Эффективность ее работы достигается, если она

является одним из основных элементов учебного процесса, если она проводится планомерно и систематически. Широкие возможности в этом плане открывает появление новых образовательных технологий. При этом особая роль отводится введению в учебный процесс элементов дистанционного обучения.

Информатизация образовательного процесса вуза приводит к необходимости создания электронных поддерживающих сред обучения. Этот путь признан всеми ведущими вузами мира. Особое место среди систем дистанционного обучения занимает Moodle, поскольку она является современной, прогрессивной, постоянно развивающейся средой с открытым кодом.

В настоящее время наиболее распространенными являются следующие схемы построения образовательного процесса с использованием электронных учебных сред:

1. Дистанционное обучение: образовательный процесс происходит преимущественно в среде дистанционного обучения, возможны очные консультации, очная аттестация.

2. Дистанционная поддержка очного обучения: в среде дистанционного обучения студенты могут найти дополнительные материалы, выполнить задания, пройти тесты и т.д. Это происходит, как правило, за рамками аудиторного времени. Внедрение дистанционных технологий в процесс различных форм обучения обусловлено особенностями организации профильного обучения, которые предполагают отведение большого количества времени на самостоятельную работу. Использование в процессе такой подготовки дистанционных технологий позволяет сосредоточиться на контрольных заданиях, развивающих не только предметную, но и коммуникативную, и культурологическую компетенции студентов. Эту схему принято называть смешанной моделью обучения [2].

В Алтайском государственном университете дистанционные образовательные технологии используются, чаще всего, для поддержки очного и заочного обучения по отдельным курсам, поскольку Moodle предлагает широкий спектр возможностей для полноценной поддержки процесса обучения, предоставляет преподавателю использовать в учебном процессе все необходимые элементы и ресурсы, а также разнообразные способы представления учебного материала, проверки знаний и контроля успеваемости.

Технологии дистанционного обучения позволяют на новом уровне организовать самостоятельную работу студентов: изучение лекций с элементами деятельности, получение и выполнение заданий, отправка преподавателю контрольных и индивидуальных работ, тестирование и многое другое. Коммуникативные возможности системы Moodle поз-

воляют студентам своевременно связаться с преподавателем в процессе обучения, задать вопрос, получить необходимую консультацию (через форум курса, через «Обмен сообщениями», по электронной почте).

Среди других преимуществ обучающей платформы Moodle можно выделить возможность создания банка тестовых заданий, использование гиперссылок на интернет-ресурсы, возможность преподавателем просмотра статистики работы студентов в электронном курсе (время, потраченное на выполнение тестов, число попыток). Причем, разработанные тесты можно применять для различных целей: для самоконтроля обучаемых, входного, промежуточного и итогового тестирования, а также для самостоятельной работы студентов.

Заметим, что разработка электронного курса в системе Moodle является достаточно трудоемкой. При этом можно выделить несколько этапов:

1. Разработка учебно-методического комплекса по учебной дисциплине.
2. Структурирование материала дистанционного курса на основе учебно-методического комплекса в виде учебных модулей и их размещение в Moodle.
3. Наполнение электронного курса ресурсами и элементами, позволяющими организовать обучение.
4. Апробация курса.

Но единожды разработав электронный курс, его уже можно будет только редактировать, дополнять, обновлять, а не создавать заново.

Придерживаясь всех перечисленных выше этапов, в среде Moodle был разработан электронный курс «История и методология математики и информатики» для поддержки очного обучения магистрантов I курса факультета математики и информатики Алтайского государственного университета. В этом курсе успешно реализован деятельностный подход.

Структура курса спроектирована с позиции модульности и завершенности – весь контент размещается в 8 модулях, посвященных отдельным темам изучаемой дисциплины. Причем упор сделан не на объем информации, а на форму, в которой она подается и ее практическую значимость. Каждый модуль содержит лекции с элементами деятельности: текстовый и графический материал, активные ссылки на глоссарий и смежные разделы изучаемого курса, контрольные вопросы внутри каждой лекции, позволяющие оценить степень освоения материала. Помимо этого, в курсе реализован рубежный контроль в виде заданий и промежуточного тестирования по каждой теме. С учетом результатов работы в дистанционном курсе сдача зачетов и экзаменов

проводится очно. Курс используется на практике уже более 4 лет и имеет положительные отзывы.

Таким образом, использование дистанционных технологий в очном обучении (модель смешанного обучения) позволяет повысить эффективность процесса обучения и способствует развитию коммуникативных способностей студентов.

### **Библиографический список**

1. Концепция развития образования РФ до 2020 г. – Режим доступа: [http://www.irorb.ru/files/kafedri/pedagogi/konc\\_razv\\_obr\\_RF\\_do\\_2020.pdf](http://www.irorb.ru/files/kafedri/pedagogi/konc_razv_obr_RF_do_2020.pdf).

2. Кравченко Г.В. Использование модели смешанного обучения в системе высшего образования // Известия Алтайского государственного университета. – 2014. – № 2/1(82). – С. 22–25.

**УДК 378.146**

## **Использование балльно-рейтинговой системы для оценивания компетенций студентов вуза по математическим дисциплинам в среде Moodle**

*Л.А. Линевиц, Г.В. Кравченко*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Проблема объективной оценки знаний студентов отнюдь не новая. При этом не вызывает никаких сомнений тот факт, что система, позволяющая оценить качество усвоения знаний, является одним из самых важных элементов процесса обучения. Используемые при этом технологии оказывают значительное влияние на качество образовательного процесса. Любая система оценивания преследует следующие цели: диагностирование и корректировка полученных знаний; учет результативности каждого отдельного этапа обучения; определение уровня сформированности общих и профессиональных компетенций на разных уровнях [1].

В настоящее время в мире используется много разных систем оценивания знаний. В российском образовании традиционно используется пятибалльная система, которая, на наш взгляд, не совсем соответствует современным требованиям. Ни для преподавателя, ни для студента не секрет, что уровни усвоения знаний, оцененные одинаковой отметкой, могут значительно отличаться друг от друга. При этом, тот объем информации, который необходимо усвоить студенту, невозможно проверить в рамках одного экзамена, да и проведение текущего контроля тоже становится проблематичным.

Современный ФГОС ориентирован на усиление практического характера как в системе среднего, так и высшего профессионального образования. Компетентностный подход предполагает не только передачу студенту совокупности знаний, умений и навыков в определённой сфере, но и развитие кругозора, междисциплинарного чутья, способности к индивидуальным креативным решениям, к самообучению, а также формирование гуманистических ценностей.

Компетентностный подход более соответствует современным условиям хозяйствования, поскольку он ориентирован на формирование наряду с профессиональными знаниями, умениями и навыками, еще и на развитие у обучающихся таких универсальных способностей и готовности (ключевых компетенций), которые востребованы современным рынком труда. Наряду с этим, компетентностный подход, направленный на качественно новое видение целей и оценку результатов профессионального образования, предъявляет свои требования и к таким компонентам образовательного процесса как: содержание, технологии обучения, средства контроля и оценки [2].

Исходя из вышеизложенного, следует, что организация современного образовательного процесса в системе образования должна обеспечить функционирование системы управления качеством образования, внедрение новых методов обучения и оценки знаний студентов. Во многом развитию компетентностей студентов может способствовать балльно-рейтинговая система оценивания знаний, которая является перспективной альтернативой традиционной системе. Она позволяет реализовывать механизмы обеспечения качества и оценку результатов обучения, активизировать учебную и внеучебную работу студентов. Успешность изучения отдельных дисциплин и активность студента оценивается суммой набранных баллов, которые в совокупности и определяют его рейтинг.

Балльно-рейтинговая система – это система постоянной накопительной количественной оценки качества освоения студентами основной образовательной программы [3]. Использование только балльной системы, у которой отсутствует надежный инструментарий оценивания достижений, не позволяет оценить достижения по всем параметрам, не отражает результативность процесса обучения в целом, не может обеспечить необходимую эффективность процесса контроля и оценивания достижений студентов [4].

Рассмотрим основные этапы обучения студентов с использованием балльно-рейтинговой системы и среды дистанционного обучения Moodle.

На первом этапе студент получает определенный набор теоретических знаний, например, в виде лекций (элемент Moodle «Лекция»), отрабатывает их на практических занятиях, проверяет прочность усвоения знаний с помощью самостоятельных работ (элементы «Задание», «Опрос») по каждой отдельно взятой теме.

Второй этап включает в себя контроль знаний и умений обучающихся. Это достаточно трудоемкий процесс, который требует применения разнообразных форм, учитывающих уровень сформированности компетенций. Базовым элементом, позволяющим провести контроль знаний в системе Moodle, выступает элемент «Тест». Разнообразие типов вопросов позволяет сделать тест вариативным, а продуманная преподавателем система составления тестов и большое количество вариантов почти исключает выбор правильного ответа простым подбором.

Наиболее интересными и полезными при изучении математических дисциплин являются, на наш взгляд, «вычисляемые» и «вложенные вопросы». В первом случае система каждый раз сама генерирует новые численные данные тестового задания из заданного интервала. В качестве правильного ответа закладывается формула, по которой система производит вычисления. Это гарантированно обеспечивает то, что каждый испытуемый получит свой оригинальный вариант задания. Во втором случае тестовое задание может содержать неограниченное число «вложенных вопросов» разного типа. Это позволяет проконтролировать целую систему знаний, умений и навыков студента при помощи одного тестового задания. Конкретный тест формируется преподавателем из созданного им банка заданий.

Тестирование может использоваться не только для контроля, но и на этапе закрепления знаний и умений. Тесты, проведенные перед практическим занятием, могут быть повторно проведены после него, что позволяет обучающемуся видеть прогресс в своем развитии, выраженный в числовом эквиваленте.

Неотъемлемой частью успешного усвоения математических дисциплин является умение решать конкретные задачи, которое предполагает систематизацию и закрепление знаний, полученных при изучении теоретического материала, умение пользоваться дополнительной и справочной литературой. Поэтому каждая тема в системе Moodle содержит описание методики и примеры решения задач. Для осуществления контроля овладения соответствующими умениями и навыками выполняется индивидуальная самостоятельная работа при помощи заданий с ответами в виде файла, который отсылается преподавателю.

Результаты выполнения работы определяют степень практического овладения теоретическим курсом предмета.

На третьем этапе (зачет/экзамен) проверяется комплексная демонстрация полученных практических умений.

Итоговая оценка в рамках балльно-рейтинговой системы контроля успеваемости студентов складывается из двух составляющих – семестровой и экзаменационной.

Семестровая составляющая балльной оценки по дисциплине формируется при наборе заданной в программе дисциплины суммы баллов, получаемых студентом при текущем контроле в процессе освоения модулей учебной дисциплины в течение семестра.

Экзаменационную составляющую балльной оценки студент может набрать по итогам промежуточной аттестации в форме экзамена или дифференцированного зачета по дисциплине во время экзаменационной сессии.

В качестве примера приведем балльно-рейтинговую систему курса «Математика: алгебра, начала математического анализа и геометрия» для студентов 1 курса Колледжа АлтГУ отделения экономики и информационных технологий.

В курсе предусмотрено выполнение аудиторных и домашних заданий, самостоятельных, индивидуальных и контрольных работ, коллоквиумов. За все виды заданий установлен максимальный балл 100. В формуле расчета семестрового рейтинга на все виды заданий вводятся весовые коэффициенты, в сумме дающие единицу. Весовой коэффициент определяется исходя из сложности задания и совокупности тем, которые оно охватывает. Выполняя все задания, студент получает семестровую оценку по стобалльной шкале. Эта оценка может быть учтена преподавателем как оценка на дифференцированном зачете. Однако, если студент желает повысить свой рейтинг, он может сдать дифференцированный зачет в конце семестра в классической форме (по билетам).

Итоговая оценка выставляется как взвешенное среднее семестровой оценки (весовой коэффициент 0,7) и оценки, полученной на дифференцированном зачете (весовой коэффициент 0,3).

По сумме всех баллов выставляется итоговая оценка: от 85 до 100 баллов – «отлично», от 74 до 84 – «хорошо», от 50 до 74 – «удовлетворительно», менее 50 – «неудовлетворительно».

Заметим, что распределение весовых коэффициентов между семестровой оценкой и оценкой, полученной на дифференцированном зачете, не позволяет студенту при сдаче зачета повысить оценку более чем на 1 балл по пятибалльной шкале.

В рамках применения балльно-рейтинговой системы нами было отмечено повышение познавательной активности студентов, как на аудиторных занятиях, так и при выполнении домашних заданий. Также при сравнении результатов обучения студентов с результатами предыдущего года оказалось, что средний балл (по пятибалльной шкале) вырос в среднем на 0,7 балла.

Таким образом, балльно-рейтинговая система направлена, прежде всего, на повышение уровня организации образовательного процесса, повышение качества подготовки обучающихся, побуждение студентов к самостоятельной мыслительной работе с учебным материалом, стимулирование систематической работы студентов; повышение объективности итоговой экзаменационной оценки, усилив ее зависимость от результатов ежедневной работы студентов в течение семестра.

### **Библиографический список**

1. Прахова М.Ю. Концепция балльно-рейтинговой системы оценивания результатов обучения студентов // Высшее образование в России. – 2016. – № 3. – С. 17–25.

2. Глухова Т.В. Балльно-рейтинговая система контроля и оценки знаний студентов: проблемы внедрения и перспективы развития // Мир науки и образования. – 2015. – № 1.

3. Корякина А.В. Балльно-рейтинговая система как средство оценки сформированности компетенций [Электронный ресурс] // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – Т. 25. – С. 216–219. – Режим доступа: <http://e-koncept.ru/2017/770560.htm>.

4. Кравченко Г.В., Устюжанова А.В. Возможности оценивания в системе Moodle // МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. – С. 236–239.

## **УДК 378.14**

### **Разработка электронного учебного пособия по курсу «История и методология математики и информатики»**

*И.А. Лях, Г.В. Кравченко*

*АлтГУ, г. Барнаул*

История и методология математики и информатики как учебная дисциплина выступает, с одной стороны, как часть истории науки, тесно связанная с философией, а с другой – как дисциплина, изучаю-

щая математику и информатику, рассматриваемые в историческом измерении.

В связи с требованиями ФГОС ВПО 3-го поколения к организации учебного процесса в вузе до 60% от общего количества учебной нагрузки отводится на самостоятельную работу студентов. Поэтому было принято решение о создании электронного учебного пособия по курсу «История и методология математики и информатики» для магистрантов 1 курса факультета математики и информационных технологий АлтГУ. Согласно учебному плану на изучение курса отводится 36 часов аудиторной работы и 72 часа самостоятельной работы. Все аудиторские часы – лекционные.

Поскольку учебный план предусматривает ограниченное количество аудиторных занятий, поэтому в лекциях акцент делается на конкретности и особенности развития математики и информатики в конкретные исторические периоды, а также на ключевые моменты формирования различных областей математики, механики и информатики.

Как наука, история математики сформировалась в конце XIX века, при этом до сих пор существуют два основных метода исследований – антикваристский, когда материал исследуется исключительно в современном изучаемому памятнику историческом контексте (в соответствии с идеями Мориса Кантора), и презентистский, когда изучение ведется с позиций современной исследователю науки (основоположник – Иероним Георг Цейтен). При изложении материала учитываются оба подхода.

Естественно, что, наряду с общими вопросами (хронология, периодизация и т.д.) особое внимание уделяется истории основных разделов математики, включенных в учебные планы (математический анализ, алгебра, геометрия, дифференциальные уравнения, теория вероятностей, функциональный анализ, комплексный анализ) и информатики.

Электронное пособие написано на языке разметки гипертекста html [1] с использованием таблицы каскадных стилей css. Все страницы оформлены в едином академическом стиле. Главная страница сайта представлена на рисунке 1.

Электронное пособие по курсу «История и методология математики и информатики» состоит из следующих разделов:

– «Содержание» представляет собой полный список разделов и тем курса, оформленных с помощью гиперссылок. Переход по гиперссылкам позволяет быстро получить необходимый теоретический материал по выбранной теме.

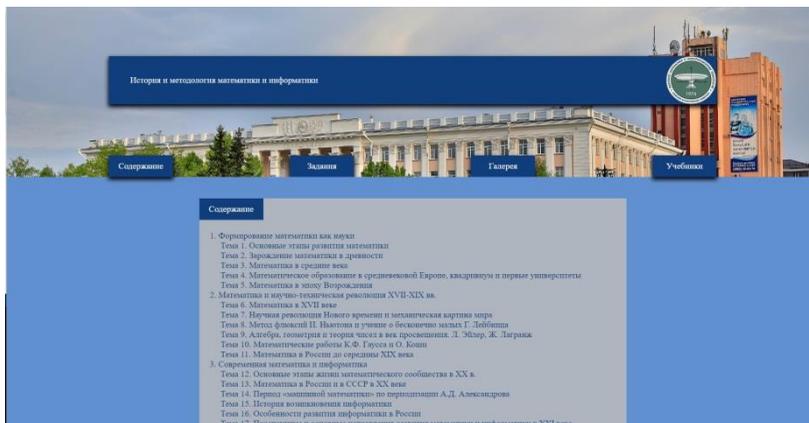


Рисунок 1 – Главная страница электронного учебного пособия по курсу «История и методология математики и информатики»

– «Задания» – содержит перечень заданий для самостоятельной работы и для самоконтроля по каждой теме курса, а также вопросы и задания к зачету/экзамену.

– «Галерея» состоит из трех подразделов. Первый подраздел посвящен биографиям выдающихся ученых, внесших вклад в развитие и становление математики, механики и информатики в различные исторические периоды времени. Второй – их величайшим открытиям в области математики и/или информатики. Третий – содержит высказывания, посвященные математике и информатике.

– «Учебники» – содержит ссылки как на электронные учебники, учебные пособия, научные журналы, так и на печатные издания, посвященные тематике курса.

Так как особое внимание при изучении курса уделяется формированию математического мировоззрения студентов, то задания в электронном пособии разноплановые.

Некоторые задания к самостоятельной работе предполагают их выполнение с использованием информационно-коммуникационных технологий. Например:

1. Создайте ленту времени по выбранному периоду развития математики или информатики.

2. Создайте ментальную карту (mind map) по любой теме курса.

3. С помощью программы HotPotatoes создайте кроссворд по курсу.

Другие задания, наоборот, рекомендуется выполнять «вручную». Например:

1. Составьте краткий конспект по развитию математики, механики или информатики в различные исторические периоды времени.

2. Проведите сравнительный анализ развития математической науки в разных странах.

Кроме того, в курс включены вопросы творческого характера. Например:

1. Сравните периодизацию А.Н.Колмогорова и А.Д.Александрова.

2. Выявите суть теории отношений и значение открытия несоизмеримости.

3. Задача о брахистохроне и развитие вариационного исчисления.

4. «Лузитания» и «дело» академика Лузина.

Кроме традиционных вопросов и заданий на зачете/экзамене магистранту предлагается решить историческую задачу. Например:

1. Докажите формулу древних египтян для вычисления объёма правильной усечённой пирамиды с квадратными основаниями.

2. Используя совершенное число пифагорейцев 28, представьте единицу в виде суммы основных дробей египтян с разными знаменателями.

3. С помощью циркуля и линейки изобразите на числовой оси число  $4\sqrt{2}$ .

4. На сторонах прямоугольного треугольника ABC, как на диаметрах, построены окружности. Докажите, что сумма площадей луночек, опирающихся на катеты, равна площади треугольника ABC (задача Гиппократова).

5. Методом Аполлония постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей.

6. Разделите на 3 равные части произвольный угол  $\alpha$  методом Никомеда.

7. Геометрическим методом ал-Хорезми решите уравнение  $x^2+4x=3$ .

8. Докажите, что корни уравнения Леонардо Пизанского (Фибоначчи)  $x^3+2x^2+10x=20$ , не будучи рациональными, не выражаются в квадратных радикалах и не могут быть построены с помощью циркуля и линейки.

9. Методом неделимых Кеплера-Кавальери вычислите объем шара радиуса R.

10. Найдите точку, сумма квадратов расстояний которой до вершин данного треугольника минимальна. Покажите, что эта точка в остроугольном треугольнике может отличаться от точки Ферма [2].

В структуре курса имеются также задания для реализации элементов биографического метода. Это заполнение баз данных «Выдающие-

ся ученые», «Гениальные открытия и изобретения», «Афоризмы о математике и информатике». Студенты, выполняя данное задание, изучают биографии ученых, внесших значительный вклад в развитие математики и/или информатики, историю развития научной мысли, знакомятся с гениальными открытиями в области математики и информатики, с высказываниями ученых о математике, механике и информатике. Это приводит к более глубокому пониманию математики и информатики, позволяет гуманитаризировать процесс обучения, «очеловечивая» изучаемый курс, шире раскрыть контекст того или иного открытия, закона или явления.

Изучение курса позволяет магистрантам получить представление о пути, пройденном математикой и информатикой, а также применить к анализу исторических моментов знания философии и методологии науки. Тестовый рубежный и итоговый контроль не предусматривается (впрочем, для самоконтроля предлагаются вопросы, ответы на которые предполагают самостоятельный поиск информации и отработку навыков работы с литературой).

Итоговой формой контроля является подготовка реферата по одной из предложенных тем, связанных с историей и методологией математики и информатики. При этом требуется, чтобы закончивший изучение курса магистрант владел информацией о генезисе и структуре основных математических понятий, ориентировался в исторических эпохах, в особенностях развития математики и информатики в различных странах, умел грамотно вести библиографический поиск, творчески (в том числе с философских позиций) осмысливать собранную информацию.

Опыт показывает, что использование элементов биографического метода в самостоятельной работе студентов способствует развитию интереса к предмету, повышению качества подготовки магистрантов.

Разработанное электронное пособие по курсу «История и методология математики и информатики» не является альтернативой курсу, созданному в системе дистанционного обучения Moodle, а призвано популяризировать математику и информатику, повысить профессиональную компетентность математика, получить необходимую информацию без привязки к Moodle (в связи с высокой загруженностью системы и частых ее сбоев).

### **Библиографический список**

1. Савельев А.О., Алексеев А.А. HTML5. Основы клиентской разработки. – М.: Национальный открытый университет «Интуит», 2016. – 272 с. – Режим доступа: <https://biblioclub.ru/index.php?page=>

book\_red&id=429150&sr=1.

2. Максимова О.Д., Смирнов Д.М. История математики : учебное пособие для вузов. – М.: Юрайт, 2018. – 319 с.

**УДК 372.851**

**Об одной методике изложения темы «Построение решения линейного уравнения с постоянными коэффициентами произвольного порядка»**

*Г.Х. Мухамедиев<sup>1</sup>, П.Б. Бейсебай<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*ВКГУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан;*

<sup>2</sup>*КАТУ им. С. Сейфуллина, Астана, Казахстан*

При традиционном изложении темы о построении решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда характеристическое уравнение имеет комплексные корни или правая часть уравнения задана в виде комбинации экспоненциальной и тригонометрических функций, решение уравнения строится с применением элементов комплексного анализа. Но в типовых программах некоторых нематематических специальностей в содержании предмета математики не предусмотрены элементы комплексного анализа, хотя в него включена теория линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В следствии чего вид решения уравнения выдается без обоснования, как известный факт или, только ради этого случая, предварительно выдаются элементы комплексного анализа.

В работах 1 и 2 была приведена одна методика построения решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами не применяя элементов комплексного анализа. Данная работе является продолжением этой методики до уравнений произвольного порядка, в которой предлагается одна методика построения фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = 0 \quad (1)$$

и частного решения неоднородного уравнения вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = e^{\alpha x} \left( P_m(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x \right), \quad (2)$$

не прибегая к теории комплексного анализа.

Левой части уравнения (1) соответствуют дифференциальная форма  $n$ -го порядка

$$L_n(y) = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_0 \quad (3)$$

и характеристический многочлен

$$P_{L_n}(k) = k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \dots + p_1k + p_0, \quad (4)$$

В дальнейшем, дифференциальную форму, соответствующую многочлену  $P(k)$ , обозначим в виде  $L_{P(k)}y$ .

Характеристический многочлен  $P_{L_n}(k)$  представим в виде

$$P_{L_n}(k) = (k-k_1)^{m_1} (k-k_2)^{m_2} \dots (k-k_\nu)^{m_\nu} (k^2 + \rho_1k + q_1)^{l_1} (k^2 + \rho_2k + q_2)^{l_2} \dots (k^2 + \rho_\mu k + q_\mu)^{l_\mu} \quad (5)$$

где  $m_i$  и  $l_j$  – неотрицательные целые числа,  $i=1, 2, \dots, \nu$ ,  $m_1 + m_2 + \dots + m_\nu + 2(l_1 + l_2 + \dots + l_\mu) = n$ ,  $k_i \neq k_j$  и  $p_i \neq p_j$  или  $q_i \neq q_j$  при  $i \neq j$ ,  $D = p_j^2 - 4q_j < 0$  при любом  $j = 1, 2, \dots, \mu$ .

Фундаментальная система частных решений линейно-однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения строятся на основе разложения (5) характеристического многочлена  $P_{L_n}(k)$  и следующих свойств дифференциальной формы  $L_n y$ .

**Свойство 1.** Если для характеристического многочлена (4) дифференциального уравнения (1) имеет место разложение

$$P_{L_n}(k) = Q_s(k) \cdot G_{n-s}(k),$$

где  $Q_s(k)$  и  $G_{n-s}(k)$  – многочлены вида (4) со степенями  $s$  и  $n-s$  соответственно, то дифференциальная форма (3) представима в виде  $L_n y = L_{Q_s(k)} L_{G_{n-s}(k)} y$ .

**Свойство 2.** Если  $L_n y = 0$ , то  $L_n^m(x^{s-1}y) = 0$  для любого  $m = 1, 2, \dots$  и  $s = 1, 2, \dots, m$ , где  $L_n^m y = \underbrace{L_n L_n \dots L_n}_{m \text{ раз}} y$ .

Переходим к построению фундаментальной системы частных решений однородного уравнения (1).

Если в разложении (5) содержится множитель вида то его можно преобразовать к виду  $P_{L_n}(k) = P_{n-m_i}(k)(k-k_i)^{m_i}$ , где  $P_{n-m_i}(k)$  – много-

член степени  $n - m_i$  вида (4), которому соответствует, по свойству 1, представление

$$L_n y = L_{n-m_i} L_{1,i}^{m_i} y \quad (6)$$

дифференциальной формы  $L_n y$ , где  $L_{n-m_i} y = L_{p_{n-m_i}(k)} y$ ,  $L_{1,i} y = y' - k_i y$ . Из равенства (6) и свойства 2 дифференциальной формы следует, что решению  $y = e^{k_i x}$  уравнения  $y' - k_i y = 0$  соответствуют  $m_i$  линейно независимые решения

$$e^{k_i x}, x e^{k_i x}, \dots, x^{m_i-1} e^{k_i x} \quad (7)$$

уравнения (1).

Аналогично, множителю вида разложения (5) соответствует  $l_j$  линейно независимых частных решений

$$y, xy, \dots, x^{l_j-1} y \quad (8)$$

уравнения (1), где  $y$  ненулевое решение уравнения  $y'' + p_i y' + q_i y = 0$ .

Введя подстановку  $y = u(x)v(x)$  находим два линейно независимые

решения  $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x} \sin \frac{\sqrt{-D}}{2} x$ ,  $y_2 = e^{-\frac{p}{2}x} \cos \frac{\sqrt{-D}}{2} x$  уравнения

$y'' + p_i y' + q_i y = 0$  и полагая в (8) с начала  $y = y_1$ , затем  $y = y_2$  получим следующие  $2l_j$  линейно независимые частные решения

$$e^{-\frac{p_j}{2}x} \sin \frac{\sqrt{-D}}{2} x, x e^{-\frac{p_j}{2}x} \sin \frac{\sqrt{-D}}{2} x, \dots, x^{l_j-1} e^{-\frac{p_j}{2}x} \sin \frac{\sqrt{-D}}{2} x, \\ e^{-\frac{p_j}{2}x} \cos \frac{\sqrt{-D}}{2} x, x e^{-\frac{p_j}{2}x} \cos \frac{\sqrt{-D}}{2} x, \dots, x^{l_j-1} e^{-\frac{p_j}{2}x} \cos \frac{\sqrt{-D}}{2} x$$

уравнения (1).

Переходим к построению частного решения неоднородного уравнения (2)

$$y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_1 y' + p_0 y = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x),$$

где  $\alpha, \beta$  – заданные постоянные,  $P_m(x), Q_l(x)$  – заданные многочлены со степенями  $m$  и  $l$ , соответственно,  $m, l = 0, 1, 2, \dots$ .

Ограничимся рассмотрением случая  $\alpha \neq 0$  и  $\beta \neq 0$ . В случаях  $\alpha = \beta = 0$  и  $\alpha \neq 0, \beta = 0$  вид частного решения неоднородного уравнения определяется аналогично.

Частное решение  $\bar{y}$  уравнения (2) будем искать в виде

$$\bar{y} = e^{\alpha x} (M_{\theta}(x) \cos \beta x + N_{\eta}(x) \sin \beta x), \quad (9)$$

где  $M_{\theta}(x)$  и  $N_{\eta}(x)$  – многочлены степени  $\theta$  и  $\eta$ , соответственно.

Дифференциальная форма  $L_n(\bar{y})$  представляется в виде

$$L_n(\bar{y}) = e^{\alpha x} (F_i(x) \cos \beta x + G_i(x) \sin \beta x) \quad (10)$$

Многочлены  $M_{\omega}(x) = A_0 x^{\omega} + A_1 x^{\omega-1} + \dots + A_{\omega-1} x + A_{\omega}$  и  $N_{\omega}(x) = B_0 x^{\omega} + B_1 x^{\omega-1} + \dots + B_{\omega-1} x + B_{\omega}$  – степени с неизвестными коэффициентами  $A_0, A_1, \dots, A_{\omega}, B_0, B_1, \dots, B_{\omega}$ .

Неизвестные коэффициенты находятся методом неопределенных коэффициентов.

### **Библиографический список**

1. Бейсебай П.Б., Мухамедиев Г.Х. Об одной методике изложения темы «Построение частных решений линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // Вестник Казахского национального технического университета имени К.И. Сатпаева. Серия «Физико-математические науки». – 2012. – №2 (38). – С. 47–53.

2. Бейсебай П.Б., Мухамедиев Г.Х. О построении решений линейно дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка и их систем // Вестник Казахского национального технического университета имени К.И. Сатпаева. Серия «Физико-математические науки». – 2015. – №1(107). – С. 379–385.

### **УДК 681.2(07)**

#### **Из опыта конструирования инновационных технологий изучения физических эффектов в системе профессионального образования**

***К.А. Нурумжанова, К.Р. Досумбеков***

*Павлодарский государственный университет  
им. С. Торайгырова, г. Павлодар, Казахстан*

В настоящее время на постсоветском пространстве модернизация системы высшего профессионального образования происходит в условиях новой парадигмы предпринимательского образования. На системе подготовки и технологиях обучения будущих специалистов

отражаются тенденции развития современных рынков труда, которые, в свою очередь, обуславливают необходимость повышения конкурентоспособности будущего специалиста, именно в уровне квалификации и профессионализма на определенном рабочем месте. Для предпринимательского образования характерно стремление к практическому эффекту на основе рационализации обучения. Повышение качества подготовки специалистов возможно через технологизацию учебного процесса на основе разработки и внедрения инновационных интерактивных технологий, в которых предусматривается, прежде всего, самостоятельная учебная деятельность студентов в коллаборативной среде и выбор ими индивидуальной траектории образования.

В данной статье описан опыт разработки и апробации на практике интерактивных занятий по дисциплине «Избранные главы общей физики». Для эффективной подготовки студентов инженерных специальностей необходимо формирование системы фундаментальных физических знаний в совокупности с компетенциями применять их в конкретной производственно-технической деятельности, как на фундаментальном, так и на профильно-ориентированном уровне. Вариативный компонент курса физики на технических факультетах должен способствовать формированию умений проецировать фундаментальные физические знания на объекты профессиональной деятельности. Компетенции специалистов всегда связаны с требованиями рабочих мест.

Главная предпосылка технологий: физика как естественнонаучная дисциплина представляет собой систему иерархически взаимосвязанных элементов или научных категорий: основных понятий, теоретических или экспериментальных фактов, физических явлений и процессов, физических величин, законов и закономерностей, теорий, принципов и большого количества прикладных материалов и приложений, используемых в технике.

Технологии обучения при этом должны быть специализированы по всем направлениям подготовки: и технологической, и управленческой, и логистической, и методологической, а также должны быть сориентированы на мобильную корректировку модели специалиста; обеспечивать фундаментализацию, индивидуализацию образовательных программ и путей их усвоения в зависимости от степени профессиональной обучаемости и интересов студентов. Общеизвестно, что профессиональная компетентность специалиста состоит из двух составляющих: первая составляющая – профессиональные знания и опыт. Она включает в себя обученность по дисциплинам общеобразовательного и базового профессионального блоков; вторая составляющая – это адаптивность. Формирование адаптивного поведения выпускника является

одной из основных задач любого вуза. В качестве показателей адаптивности обычно используются «гибкость» мышления и методов, а также готовность к принятию решений на рабочем месте.

При изучении фундаментальных дисциплин наиболее эффективным является формирование понятийной грамотности будущих специалистов. Понятийная грамотность тесно связана с терминологической грамотностью и формируется в процессе усвоения фундаментальных знаний. Именно понятийная грамотность позволяет выпускнику быстро адаптироваться на рабочем месте и получать дальнейшее развитие и передвижение по профессиональной лестнице. Понятийная и терминологическая грамотность принадлежат к единой логико-понятийной системе определенной отрасли научного знания. Именно понятия – термины помогают в вербальной форме фиксировать результаты процесса познания рода, видов и сущности предметов и явлений.

В связи с этим мы полагаем, что современный специалист должен свободно ориентироваться в логико-понятийной системе определенной отрасли научного знания. Это как раз соответствует такому качеству знаний, как мобильность и фундаментальность, о которых мы упоминали выше. Здесь отметим, что мобильность знания, подразумевает способность к постоянному его обновлению, углублению и ясному и точному употреблению терминов и информации в профессиональной деятельности.

Конструирование учебного процесса в современной педагогической практике осуществляется либо на основе обучения через информацию, либо на основе обучения через деятельность. Единицей работы преподавателя и студента в вузе становится практическая ситуация, выраженная в учебном задании (мини-проект) для самостоятельной работы, характер и содержание которого зависят от целей обучения (классической, прагматической или практической), а также от предметной и социальной составляющей. Именно в ходе выполнения заданий на основе анализа практической ситуации, учебных игр (игры-коммуникации, игры-презентации) студент формируется как специалист и член будущего коллектива.

Таким образом, в современном контекстном обучении изменяются содержание и формы обучения. Эта технология состоит из трех базовых форм деятельности: 1) учебная деятельность с ведущей ролью интерактивных или перцепционных лекций и семинаров; 2) квазипрофессиональная, воплощающаяся в выполнении конкретных практических заданий, 3) учебно-профессиональная (НИРС, написание научных статей, участие в разработке учебных пособий, курсовое проектирова-

ние). Этим трем формам деятельности можно сопоставить три обучающие модели: семиотические, имитационные, социальные [1].

Для студента не столько важно содержание образования, ему важен результат, т.е. какие новые возможности, знания, компетенции он получит для своей будущей деятельности и, на сколько, они ему будут полезны.

«Камнем преткновения», главной трудностью в подготовке специалиста является необходимость использования методов и средств учебно-познавательной деятельности, а не профессионального труда.

В данной статье описан опыт изучения курса «Специальные главы физики», который предназначен для студентов технической специальности «Приборостроение». Поэтому в структуре физической науки была выбрана категория «физические явления» и «физические эффекты», применяемые в технических устройствах и приборостроении.

Почему физические эффекты? Физические явления и процессы являются основными объектами изучения физической науки. Законы и теории построены для объективного изучения и обоснования физических явлений и процессов. Именно явления выполняют функцию объектов изучения физики.

Физическое явление, как одна из основных категорий физической науки, представляет собой *процесс изменения чего – либо (физического объекта) или какого-либо параметра физического или технического объекта во времени*. Этот процесс может проходить при определенных условиях или постоянно, непрерывно или дискретно. Например, явление конденсации – это изменение агрегатного состояния вещества, преломление – это процесс, в котором изменяется скорость света в среде, электрический ток – это изменение положения свободных заряженных частиц в проводнике, излучение это переход на другой энергетический уровень электрона или какой-либо частицы, и т.д.

Физические эффекты являются объектами применения физических знаний в технике и технических устройствах. В технических устройствах применяют именно результаты физических процессов и явлений. Как правило, физический эффект – это результат физического явления или процесса, который приводит к возникновению или поля или действия при преобразовании видов энергии или фазового состояния вещества.

Для инженерно-технических приложений физический эффект можно определить как реальное явление, происходящее в физической системе и характеризующееся причинно-следственной связью (моделью физического эффекта) между двумя или несколькими физическими

величинами, которая может быть выражена аналитически, графически или таблично.

Именно физические, физико-химические и другие эффекты являются наиболее эффективными путями преодоления противоречий при решении тех или иных технических, технико-конструкторских задач. Объем фундаментальных и прикладных знаний по физике, в частности знания по физическим эффектам и явлениям, определяют потенциальную творческую мощь изобретателя. Физические эффекты являются частью физических процессов и закономерностей, как результат действия закономерности или изменения параметров. Физические эффекты тесно связаны категориально с физическими явлениями и процессами, как результат этих изменений. В технических устройствах используются именно физические эффекты.

Например, в техническом устройстве необходима передача какой-либо энергии, например, механической, тогда в технике, основанной на этом явлении учитывается и используется эффект Александра; при изготовлении прецизионной измерительной аппаратуры и экспериментальном определении упругих постоянных материалов учитывается и используется влияние эффекта Пойнтинга. Для изменения электропроводящих свойств проводников используют эффект Мейснера, который представляет собой полное вытеснение магнитного поля из объёма проводника (это результат) при его переходе в сверхпроводящее состояние (это явление изменения проводящих свойств проводников).

Следует отметить, что физический эффект является понятием, официально используемым для обозначения структурной единицы физической информации в информационных базах данных по физико-техническим знаниям. Известно, что в настоящее время разработаны различные каталоги физических эффектов, используемых в технике. Эти каталоги являются объектами профессиональной деятельности многих технических специальностей. Фактически попытки создать достаточно подробную спецификацию структуры физических явлений и эффектов предпринимаются. Например, онтология научно-технических характеристик фиксирует общее терминологическое пространство для экспертов, готовящих описания эффектов, и пользователей каталога. Она используется как при построении формализованных описаний эффектов, так и составлении запросов на поиск по ним. В настоящее время онтология включает более 1200 свойств и характеристик.

В данной статье приведен ход рассуждений преподавателя при конструировании интерактивного занятия средствами интеракционно-

го конструктивизма? Ответ: следует отметить, что конструктивизм отличается от принципов бихевиоризма и когнитивизма в обучении своей «социальностью», то есть вовлеченностью всех членов коллектива в общий процесс на основе исполнения своей персональной индивидуальной (функции) роли.

Во-вторых, как происходит передача знаний и формирование компетенций у студентов? Ответ: через социализацию личности студента посредством целенаправленного обновления содержания учебного предмета и самостоятельной коллективной деятельности путем выполнения учащимися вариативной системы дидактических заданий в зависимости от исполняемой ими социальной роли в когнитивном процессе на конкретном уроке.

В-третьих, какие роли возможны в когнитивном процессе? Ответ:

- 1) актуализация опыта и компетенций учащихся по изучаемой теме;
- 2) представление (создание условий) возможности учащимся для осознания содержания темы;
- 3) создание условий для воспроизведения и запоминания учебного материала;
- 4) организация этапа обеспечения мобильности и понимания сущности знаний (систематизация, сравнение, обобщение);
- 5) организация применения знаний;
- 6) рефлексия, проверка и оценка участия и уровня усвоения знаний учащимися.

Для изучения физических эффектов был предложен следующий алгоритм:

- 1) краткая история открытия эффекта;
- 2) формулировать определение эффекта;
- 3) объяснить, результатом, какого физического явления или процесса, является данный эффект;
- 4) сущность и механизм эффекта, исследование математической задачи, выражающей смысл физического эффекта;
- 5) технические данные и области применения эффекта в технике, технических устройствах.

Опишем технологию на примере изучения физического эффекта Зеебека, а именно, методику изучения только на понятийном уровне. Конечно, понятийный уровень знаний по физике для технического специалиста необходим, но недостаточен.

Любое понятие, как элемент науки или знания состоит из родовой основы (что, кто?) и видового различия (какой, какое?). Поэтому для грамотного определения понятия необходимо указать его родовую

основу (что это?) и видовое отличие или признаки (какие?). Например, эффект Зеебека – *что это?* Это результат физического контактного термоэлектрического явления или термоэлектрический эффект, – *какое? какой?* – в котором в замкнутой электрической цепи из разнородных металлов возникает термо-ЭДС, если места контактов поддерживаются при разных температурах.

Таким образом, эффект Зеебека – это результат контактного термоэлектрического явления при котором при разной температуре контактирующих металлов возникает термо-ЭДС.

Эффект возникновения термо-ЭДС используется в технических устройствах. При этом под техническим устройством понимаем свод качеств, позволяющих решить вполне определенную техническую или технико-конструкторскую задачу.

Здесь важно указать или дать информацию о количественных характеристиках и величинах термо-ЭДС, термопар, датчиков температур, термоэлементов, полученных на основе данного эффекта.

Такое оптимальное сочетание принципа фундаментального физического образования с более углубленным освещением вопросов, связанных с будущей практической деятельностью, способствует повышению академической активности, усиливает интерес к изучаемому предмету, стимулирует улучшение качества знаний и развивает интерес к профессиональному образованию.

На практических занятиях студентами, по заданию преподавателя, отрабатываются умения, необходимые для адекватного восприятия и переработки учебной информации, такие как: восприятие и переработка информации, заданной в письменной форме; составление плана письменного текста; выделение в тексте исходных суждений и логических умозаключений. Такая обзорная и аналитическая работа над текстом учебника или других текстов завершается подготовкой реферата по заданной теме.

Когнитивный аспект в обучении предполагает развитие речемыслительной деятельности студента. В связи с этим развиваются навыки восприятия и переработки информации, заданной в устной форме.

Наибольшее распространение получила концепция, представляющая психику в виде устройства с фиксированной способностью к преобразованию сигналов. Главная роль в этой концепции отводится внутренним когнитивным схемам и активности организма в процессе познания.

Когнитивная система человека рассматривается как система, имеющая устройства ввода, хранения, вывода информации с учетом её пропускной способности. В условиях когнитивного мастерства техно-

логия образовательного процесса направлена не на поглощение информации, а на постижение внутренних отношений исследуемых предметов, побуждает студентов к диалоговому, исследовательскому размышлению, повышает концентрацию ментальной активности. При таком подходе к обучению осознанное и обоснованное рассуждение сопряжено с серьезной и трудной когнитивной работой, способствует высокоэффективному росту мыслительной деятельности.

Приведем пример такого задания, полученного студентами при изучении физического эффекта Александрова.

Описание этого эффекта в учебнике: «Коэффициент передачи энергии от ударяющего тела к ударяемому телу зависит от соотношения их масс – чем больше это соотношение, тем больше передаваемая энергия. Поэтому в машинах ударного действия всегда старались учесть это соотношение, по крайней мере, до 1954 года, когда Е. Александровым было установлено, что с ростом соотношения масс коэффициент передачи растет лишь до определенного критического значения, определяемого свойствами и конфигурацией соударяющихся тел (удар упругий).

При увеличении отношения масс соударяющихся тел сверх критического коэффициента передачи энергии определяется не реальным соотношением масс, а критическим значением этого отношения. Соответственно, коэффициент восстановления определяется формой и массой соударяющихся тел и степенью рассеяния энергии. Очевидно, этот эффект обязательно должен учитываться при проектировании машин ударного действия. Наглядная иллюстрация к тому:

Механизм для воздействия на твердое тело ударной нагрузкой, содержит два или более соударяющихся элемента, причем один из них является рабочим, непосредственно воздействующим на твердое тело. Он отличается тем, что в нем предусмотрено средство для создания перед каждым соударением элементов наличие дополнительного зазора в системе «соударяющиеся элементы – твердое тело». Один или несколько из соударяющихся элементов, за исключением рабочего элемента, выполнены из материала с меньшим модулем упругости, чем материал элемента.

На основе открытия Александрова создан так называемый механический полупроводник, в котором передача энергии практически осуществляется только в одном направлении, независимо от жесткости опоры. На этой основе уже создан новый отбойный молоток, который в два раза легче серийного и обладает большой производительностью. Теоретически доказана возможность и целесообразность бурения на глубинах до 100 м без погружения бурильной машины в скважину».

После чтения текста студент получает задание решить задачу расчета удара и объяснить внутренний механизм этого эффекта. Предварительно на занятии проводится следующий диалог: Итак, почему это явление эффект? Всякое изменение, происходящее в природе, технике и окружающей жизни, можно назвать явлением или процессом. В этом процессе происходит изменение коэффициента энергии, выделяющейся при ударе, а результат изменения определяется эффектом Александра.

Выводы: На всех уровнях профессионального образования справедлива формула профессиональной компетентности: «мобильные знания + гибкие компетенции, методы, средства и навыки + креативное творческое профессиональное мышление.

### **Библиографический список**

1. Вербицкий А.А., Ильязова М.Д. Инварианты профессионализма: проблемы формирования: монография. – М. : Логос, 2011. – 288 с.
2. Шаповалов А.А. Конструктивно-проектировочная деятельность в структуре профессиональной подготовки учителя физики. – Барнаул, 1999. – 145 с.
3. Bruner J.S. & Minium A.L. Perceptual identification and perceptual organization. «J. gen. Psychol», 1955. – P. 21–28.
4. Гамильтон У. («Perzeption und Modalismus», 1911; «Erkennen und SchlieЯen», 1912). Философский энциклопедический словарь. 2010. – 500 с.
5. Горин Ю.В. Указатель физических эффектов и явлений для изобретателей. – Баку, 1973. – 300 с.
6. Глотова Ю.Н., Ефремов Д.А., Романов А.В. Физические явления и эффекты в технических системах : учебное пособие. – Воронеж, 2007. – 247 с.
7. Нурумжанова К.А., Вишенкова Ю.А., Шухаев М.Е., Нургожина М.М. Физические эффекты в технических устройствах и приборостроении : учебно-методическое пособие. – Павлодар: Кереку, 2016. – 122 с.
6. Эльконин Д.Б., Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения : учебное пособие для студентов высших учебных заведений. – М. : Издательский центр «Академия», 2004. – 288 с.
7. Гальперин П.Я., Талызина Н.Ф. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий // Исследования мышления в современной психологии. – М.: Наука, 1966. – С. 123–137.

УДК 51-77

**О методологии преподавания математических дисциплин на технических и экономических направлениях подготовки***Е.А. Плотникова<sup>1</sup>, Е.В. Саженкова<sup>2</sup>**<sup>1</sup>НГТУ, <sup>2</sup>НГУЭУ, г. Новосибирск*

Математические дисциплины в техническом или экономическом вузе занимают важнейшее положение. Студент такого вуза должен понимать, что в основе всех его специальных технических и экономических предметов лежит серьёзная математическая база. При этом студент не может с длительным и полным напряжением изучать предмет как одну лишь цепь теорем, не понимая их внутреннего смысла и не зная, пригодится ли ему этот материал в последующем. Ценность математического курса определяется не только изложением его математического содержания, но и тем, что из него поймёт и запомнит студент. Изучение дисциплины должно повышать и математическую и общую культуру обучаемого, развивать его мышление, расширять его мировоззрение [1–3]. Лекционное изложение курса, с одной стороны, должно содержать лишь важнейший материал, представляя собой единое целое. С другой стороны, изложение должно выполняться обстоятельно, убедительно и доступно, не скупясь на объясняющие идеи. Профессор А.Я. Хинчин сказал по этому поводу, что «не будучи математиком по специальности, студент сам, без руководства, не может выделить в изучаемом принципиальных моментов, вынужден уделять, поэтому, полную долю внимания не имеющим существенного значения мелочам и кончает тем, что теряется в этих мелочах, переставая, так сказать, видеть лес за деревьями». В связи с вышесказанным, остановимся на нескольких методологических моментах выстраивания математического курса.

1. Для осознанного изучения математической дисциплины важную роль играет вводная часть курса (раздела), цель которой разъяснить, когда, при каких обстоятельствах, для решения каких практических задач возникает необходимость в понятиях излагаемой математической дисциплины и использовании их свойств. В начале курса необходимо привести постановки некоторых задач и осуществить мотивировку дальнейших действий, наметить план и перспективы курса. Конечно, в вводной части курса далеко не всегда возможно осветить сразу все его основные разделы, но этого и не требуется. Достаточно, чтобы студент видел общие задачи курса и хотя бы ближайшие цели своей работы. Например, во введении в курс математического анализа

важно отметить, что изучение бесконечно малых не случайно, а связано с тем, что все явления природы, в конечном счёте, объясняются движением материи. С движущейся частицей связаны понятия траектории, скорости, ускорения, а с измерением величины массы связаны понятия плотности, длины кривой, площади и объёма. Таким образом, почти во всех основных расчётах в науке и технике подсчитываются либо пределы отношений бесконечно малых (скорость, ускорение, плотность), либо пределы сумм бесконечно малых (длина дуги, площадь, объём, масса). Не трудно привести и примеры из практики, решение которых нуждается в понятиях и методах дифференциальной геометрии: изучение прогибов конструкций; технические расчёты, связанные с поверхностями (своды купола, поверхности котлов и т.д.) и др.

2. Востребованность прочных математических знаний нарастает в современной жизни общества и в связи с нарастающей тенденцией компьютеризации и проникновения информационных технологий во все сферы человеческой жизнедеятельности. Специалистам практически во всех областях человеческой деятельности необходимы знания, которые в последующем позволят осуществлять математическое моделирование реальных объектов и процессов, численное исследование полученных модулей, вероятностно-статистическую обработку данных и т.п. При обучении высшей математике студентов разнообразных направлений неизбежно приходится учитывать специфику последующего использования ими математических знаний в профессиональной деятельности. Это часто заставляет делать основной акцент не на доказательную базу математических утверждений, а на большую иллюстративность и доходчивость материала, на наиболее быстрое введение практических приложений. И, тем не менее, при этом следует обращать внимание аудитории на то, что для построения математических моделей необходимы математические понятия, объекты и инструменты: числа, функции, матрицы, логические переменные, графические методы и т.д.

3. В 90-х годах XX века появились универсальные пакеты символьных вычислений. Они позволяют решать на компьютере сложнейшие численные и аналитические задачи: вычислять пределы, производные и интегралы, строить графики функций, решать системы уравнений и многое другое [4]. В связи с этим появилась возможность оказать студентам техническую помощь в осуществлении математических вычислений. К таким пакетам относится, на пример, Maple. Этот пакет включает в себя широкий спектр символьных вычислений, мощную графику и удобную систему помощи. Есть также MathOfficeforWord, объединяющий возможности пакета Maple и популярного редактора

Word, и другие пакеты. После изучения какого-либо математического раздела (предела, производной, интеграла и т.д.) и аналитического решения соответствующих задач полезно продемонстрировать возможности информационных технологий в этом направлении. При этом нужно воспитывать в студентах понимание, что пакеты символьных вычислений являются лишь инструментами, которые помогают в вычислениях тем, кто владеет математическими знаниями, а значит, может грамотно применить эти инструменты. Математические знания гарантируют защиту от возможных ошибок технического характера при использовании означенных вычислительных пакетов. Это могут быть знания о постоянстве или переменности искомой величины, о порядке многочлена или о типе функций, возникающих в ответе, и т.п. Таким образом, изучение математики ни в коей мере не умалается появлением этих инструментов и продолжает оставаться важной составляющей подготовки специалиста в любой научной области. С другой стороны, применение пакетов символьных вычислений освобождает от выполнения большого количества однотипных вычислений, что опять-таки позволяет избежать механических и арифметических ошибок и опусок [5].

Ректору Принстонского университета, профессору Джону Гиббену принадлежит афоризм: «Образование – это умение встречать жизненные ситуации». В этом смысле математическое образование носит фундаментально-прикладной характер. Человек, усвоивший его основы, может сам изобретать новые методы решения в ситуациях, которые невозможно заранее ни предвидеть, ни втиснуть в какие-либо ведомственные науки.

### **Библиографический список**

1. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и её преподавание. – М.: Наука, 1980.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука, 2000.
3. Гильдерман Ю.И. Вооружившись интегралом. – Новосибирск: Наука, 1980.
4. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов: учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
5. Плотникова Е.А., Саженкова Е.В. О синтезе аналитических и информационно-технологических методов в обучении математике на гуманитарных специальностях // Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК-2016. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2016. С. 173–174.

## УДК 378

**Студенческие математические олимпиады – средство развития у студентов математического творческого потенциала***А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова**АлтГУ, г. Барнаул*

Математические соревнования среди студентов (олимпиады и конкурсы) имеют довольно длительную историю, как у нас в стране, так и за рубежом. В России конкурсы по решению задач возникли ещё в конце XIX века: в 1884 г. профессор Киевского университета В.П. Ермаков начал издавать «Журнал элементарной математики», в котором ежегодно публиковали «задачи на премию». Этот конкурс явился прообразом современных заочных олимпиад. С 30-тых годов XX века регулярными стали математические олимпиады Ленинградского и Московского университетов, у истоков которых стояли великие математики – наши соотечественники: Б.Н. Делоне, П.С. Александров, А.Н. Колмогоров, С.Л. Соболев и др.

Студенческие олимпиады и конкурсы – это мощная форма активизации творчества студентов. Предлагаемые на них задачи носят нестандартный характер и требуют от студента не только прочных знаний по программе, но и изобретательного, творческого подхода; как правило, они иллюстрируют в упрощенной форме ту или иную глубокую математическую идею.

В этих соревнованиях особенно успешно выступают студенты, способные осуществлять поиск идеи решения задачи. Без такого качества даже знание университетского курса в полном объёме не гарантирует успеха.

Хотя тематика задач студенческих математических олимпиад и конкурсов определяется стандартными математическими курсами, их сложность довольно сильно варьируется. И для успешного участия в таких соревнованиях, конечно же, требуется определённая предварительная подготовка.

Основой такой подготовки является работа над решением и обсуждением задач, в процессе которой происходит обращение к важным математическим идеям и теориям, то есть происходит фундаментальная подготовка участников семинара. Для этой работы необходимо осуществить подбор задач, объединённых некоторой общей идеей или методом (например, соображениями непрерывности, топологическими

или графическими соображениями и так далее). Такой подход к созданию циклов занятий позволяет одновременно, и осуществлять подготовку к олимпиадам, и в целом развивать математическое мышление. Конечно, на таких занятиях речь идет о задачах олимпиадной тематики и высокого уровня сложности, но, тем не менее, и в такой работе можно выстраивать продвижение от более простого к сложному.

Обратимся к одной из возможных тем подготовительного семинара для студентов-младшекурсников – «соображения непрерывности». Здесь, базируясь фактически на идеях теорем Коши о промежуточном значении и Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции, можно осуществить решение следующего цикла задач, расположенных в порядке нарастания сложности:

1. Докажите, что многочлен нечётной степени имеет корень.

2. Непрерывная функция  $f$  переводит отрезок в себя. Докажите, что уравнение  $f(x) = x$  имеет решение.

3. Непрерывная на всей числовой прямой функция такова, что уравнение  $f(x) = x$  не имеет решений. Докажите, что уравнение  $f(f(x)) = x$  тоже не имеет решений.

4. Пусть  $f$  и  $g$  – непрерывные функции, отображающие отрезок  $[0; 1]$  на себя. Докажите, что уравнение  $f(g(x)) = g(f(x))$  имеет решение.

5. Функция  $f: R \rightarrow R$  непрерывна и такова, что  $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$  для любых  $x$  и  $f(1000) = 999$ . Найдите  $f(500)$ .

6. Пусть  $f: R \rightarrow R$  – непрерывная функция, принимающая значения разных знаков. Докажите, что найдётся арифметическая прогрессия  $a < b < c$ , для которой  $f(a) + f(b) + f(c) = 0$ .

7. Функция  $f: R \rightarrow R$  является периодической, непрерывной и обладает свойством:  $\frac{|f(1)|}{1} + \frac{|f(2)|}{2} + \dots + \frac{|f(n)|}{n} \leq 1$  для любых  $n$ . Докажите, что существует  $c$ , такое что  $f(c) = f(c+1) = 0$ .

8. Пусть  $f$  – непрерывная периодическая функция на числовой прямой имеет период  $T$ . Докажите, что её график имеет горизонтальные хорды любой длины  $l$ .

9. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции является разрывной функцией?

10. Найдите все непрерывные на числовой прямой функции  $f$ , удовлетворяющие тождеству  $f(x) = f(\sin x)$ .

В плане развития творческого потенциала студентов помимо работы над тематикой стандартных университетских математических курсов необходимо осуществлять работу по расширению их математических горизонтов.

Существует целый пласт классической математической культуры, к которому не прикасаются в школьном курсе математики из-за «неэлементарности» или «ненужности», а в университетском курсе – из-за «элементарности». Многие из этих результатов принадлежат величайшим мировым мыслителям: Л. Эйлеру, И. Ньютону, К. Гауссу, О. Коши, П. Дирихле, Б. Паскалю.

В связи с их «не элементарностью» эти классические результаты элементарной математики называют «олимпиадными», хотя они получены задолго до появления олимпиад. Студентам, проявляющим особый интерес к математике, необходимо дать шанс познакомиться с этой классикой, которая, несомненно, послужит развитию их творческого потенциала.

### **Библиографический список**

1. Саженов А.Н., Саженова Т.В. Математический анализ в задачах студенческих олимпиад. Практикум. Часть 1. – Барнаул: Изд. АлтГУ, 2011.
2. Саженов А.Н., Саженова Т.В., Плотникова Е.А. Математическое творчество: классические олимпиадные темы и задачи высокого уровня сложности. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013.
3. Саженов А.Н., Саженова Т.В., Плотникова Е.А. Математический анализ в задачах студенческих олимпиад // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. – Вып. 2. / гл. ред. Е.Д. Родионов. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2016. – С. 50-54.

**УДК 378.1**

### **Методика преподавания курса «Основы программирования»**

*Л.Л. Смолякова  
АлтГУ, Барнаул*

Изучение курса основ программирования является одним из основных при подготовке студентов бакалавриата специальностей, связан-

ных с математикой и информационными технологиями. И это обоснованно. Обучение программированию – дело непростое. Многолетний опыт автора в обучении студентов и школьников позволяет выделить основные причины встречающихся трудностей на этом пути. Студенты приходят в вуз, имея низкий уровень начальной подготовки в этой области. Отсутствует навык самостоятельной работы с учебным материалом. Несмотря на то, что изучение основ структурного программирования входит в государственный образовательный стандарт общего и среднего образования по информатике, значительная часть первокурсников имеет весьма слабое представление о программировании вообще. И то, что единый государственный экзамен по информатике в настоящее время сдается письменно, а не за компьютером говорит об уровне информационных технологий в стране. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по дисциплине «Основы программирования» предусматривает изучение объектно-ориентированного подхода к программированию, что оказывается практически невозможным без предварительной базовой подготовки обучаемых. Поэтому, как правило, обучение программированию, приходится начинать с азов.

По окончании данного курса, большинство студентов считают курс «Основы программирования» одним из наиболее сложных и испытывают затруднения при его освоении. Все вышеперечисленное объясняется тем, что программирование является специфическим видом человеческой деятельности, для успешной реализации которой необходимо не только применение приобретенных в процессе обучения знаний и умений, но требуется и наличие определенного стиля мышления, прежде всего, абстрактного, но связанного с решением конкретной задачи. Программирование следует рассматривать как средство развития мышления. Задача преподавателя – не только научить студента записывать алгоритм на языке программирования, а обучить его самостоятельно конструировать сам процесс решения задачи. При правильном подборе учебных задач от более простых к сложным, появится понимание единства принципов написания и функционирования информационных систем.

Следует отметить, что методика обучения на данном курсе представляет собой итерационный процесс. Рассматривая итерацию как пошаговое приближение к определенной цели, можно применить метод итерации, как при изложении лекционного материала, прохождения тестов, так и в процессе выполнения лабораторных работ по данной дисциплине. Тем более что специфика заданий, предназначенных для выполнения на лабораторном практикуме, вполне соответствует

поступательному итерационному процессу, который выражается в построении ряда алгоритмов и программ решения задачи, причем каждый следующий алгоритм является уточнением или расширением предыдущего. Таким образом, построение итоговой программы с применением одной из парадигм программирования представляет собой итерационный процесс, на каждом шаге которого происходят некоторые изменения, что и позволяет нам применить итерационный метод обучения. Согласно отмеченным положениям, последовательность изложения лекционного материала зависит от порядка практических и лабораторных работ. Учитывая их итерационный характер, изложение лекционного курса также имеет смысл строить на основе итерационного метода.

Все эти аспекты отражены в электронном учебно-методическом комплексе дисциплины (ЭУМКД). На странице курса «Основы программирования» можно обнаружить материалы разного рода. Однако следует помнить, что возможность их использования упрощает, но ни в коем случае не заменяет живого общения с преподавателем. Курс содержит:

#### 1. Слайды к лекциям

Слайды к лекциям могут служить кратким конспектом лекций. Используют их как план освоения прочих материалов: видеолекций, текстов и пр. В начале каждой презентации содержатся задания для самопроверки, которые могут дать представление о наиболее сложных вопросах в тестах.

#### 2. Видеолекции

Видеолекции смонтированы на основе звукозаписей «живых» лекций и до некоторой степени способны их заменить. Пока они не покрывают полный курс, но их коллекция неуклонно пополняется. Используются для восстановления в памяти рассмотренного материала. К сожалению, при просмотре видеолекций нет возможности задать вопрос лектору, однако его можно задать а) в личном сообщении преподавателю, б) в группе ВКонтакте [vk.com](https://vk.com), в) на очной консультации.

#### 3. Лабораторные работы

Выполнение лабораторных работ – основа практических занятий. Основные навыки программирования вырабатываются именно в эти моменты.

Как правило, на выполнение лабораторной работы отводится 3 недели, при этом сложность работ возрастает с увеличением номера лабораторной работы.

#### 4. Тесты

Тесты предназначены для контроля усвоения теоретического материала, а также умения читать и понимать код программ. Количество попыток на каждый тест ограничено тремя. Зачётные попытки выполнения теста осуществляются только в присутствии преподавателя (на практическом занятии или консультации). Оценка за тест определяется как максимальная из оценок, полученных в зачетных попытках.

#### 5. Рекомендации «Что почитать?»

Элемент «Что почитать?» имеется в большинстве разделов курса и содержит ссылки на фрагменты текстов учебников, вдумчивое прочтение которых является залогом успешного выполнения как тестовых заданий, так и лабораторных работ.

#### 6. Рекомендации «Что посмотреть?»

На страницах с названием «Что посмотреть?» содержатся ссылки на видео-материалы, служащие либо полезными иллюстрациями к материалу соответствующего раздела курса, либо излагающие дополнительные сведения, необходимые для понимания раздела, но выходящие за рамки курса.

#### 7. Примеры программ

В папках с таким названием содержатся исходные коды программ, которые рассматривались во время лекций и фрагментарно представлены на слайдах к лекциям соответствующих разделов. Используются эти исходные коды для самостоятельной компиляции и [пошагового] выполнения программ, чтобы детально разобраться в их устройстве и принципах работы. Кроме того, исходные коды полезны в роли заготовки программ, решающих задачи, поставленные в лабораторных работах.

Каждый следующий учебный материал содержит вопросы из предыдущих тем, и на основе этих вопросов созданы материалы экзамена по дисциплине. Результат экзамена зависит от трех составляющих: среднего балла за лабораторные работы, среднего балла за тест и баллов за экзаменационную работу.

Таким образом, преподавание данного курса с использованием электронного ресурса дает студентам доступ к материалам курса в любое время, а самое главное возможность задать вопросы преподавателю вне занятий, по мере их возникновения, что стимулирует успешное обучение по данной дисциплине.

### **Библиографический список**

1. Смолякова Л.Л., Флорю О.Н. Некоторые аспекты преемственности преподавания информатики // Сборник трудов Всероссийской

конференции по математике «МАК-2017»; Материалы молодежной прикладной IT школы «Математические методы и модели в экологии», Барнаул, 29 июня – 1 июля 2017 г. : [тексты докладов] / АлтГУ [и др.] ; [гл. ред. Н. М. Оскорбин]. – Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2017. – С. 279–281.

**УДК 372.851**

**Повышение мотивации учащихся  
на занятиях по математике  
через наработку техники некоторых вычислений**

***В.Н. Токарев, Е.В. Токарева***  
*АлтГТУ г. Барнаул; АлтГУ г. Барнаул*

Обучение математике теряет свою яркость каждый раз, когда учащиеся и студенты сталкиваются с простыми на вид операциями и выполняют их с ошибками. Типичные ошибки учащихся на выпускных экзаменах – неправильное извлечение квадратных корней, элементарные ошибки в вычислениях. Допущение таких ошибок не способствует развитию мотивации и повышению познавательного интереса на занятиях по математике.

Хотя каждый учитель математики сможет объяснить и показать примеры вычисления квадратных корней, лучшим учебником будет «Арифметика» Л. Эйлера [1] с ясным изложением правил, упрощенной техникой вычислений. Эйлер в обращении к читателю делает акцент на необходимости поиска наиболее эффективных способов вычислений: он подчеркивает, что большинство учебников не заботится «о тех способах, чрез которые счисление легче и короче учинить можно, но тем только удовольствуются, чтоб о всем основании в коротких словах показано было». О необходимости обращения к «несовременным» учебникам классиков математической науки и упоминание эйлеровского метода извлечения корней из «составных количеств» было сделано в работе авторов [2].

Данная заметка призвана открыть для читателей метод Эйлера (см. примеры на рисунке 1). Метод прост и универсален, и действительно изящен, не требуется никаких подборов, определения границ корней.

Во-первых, число делится справа на группы по два разряда (можно получать значения и иррациональных корней, на рисунке примеры для чисел 2 и 20). Далее, слева направо: извлекаем корень из самой левой части – двузначного или однозначного числа, записываем результат

справа после фигурной скобки (такая форма записи предлагается авторами статьи). Вычисляем квадрат получившейся цифры и вычитаем из первого двузначного числа ( $\sqrt{20} > 4$ ,  $4^2 = 16$ ,  $20 - 16 = 4$ ). Далее опускаем третью цифру числа и записываем деление столбиком на удвоенный первый результат (опускаем «0», записываем деление столбиком 40 на  $2 \cdot 4 = 8$ ), и частное пишем не снизу как обычно при делении столбиком, а дважды: рядом с делителем, получая новый делитель, и также приписывая его к результату за фигурной скобкой (т.е. получаем 85 и 45 (4,5)). Новый делитель умножаем на просто делитель (т.е. 85 умножаем на 5) и произведение вычитаем, опустив ещё одну цифру (т.к.  $85 \cdot 5 > 400$ , при вычитании получилось бы отрицательное число, то 5 зачёркиваем и выполняем всё с 4:  $84 \cdot 4 = 336$ ,  $400 - 336 = 64$ ). Далее действия повторяются: опускаем 0, 640 делим на удвоенный предварительный ответ 44 ( $\frac{640}{88} > 7$ ), приписываем 7 дважды, следующий 0 опускаем вниз,  $887 \cdot 7 = 6209 < 6400$ , вычитаем. Очевидно, для иррациональных чисел процесс бесконечный. В общем случае, если остаток равен 0, число рациональное, корень извлечён, результат получен.

$\begin{array}{r} 5/29\{23 \\ 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 13/69\{37 \\ 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1/04/04\{102 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \{a + b \\ a^2 \end{array}$
$\begin{array}{r} 12/9\{43 \\ 129 \end{array}$	$\begin{array}{r} 46/9\{67 \\ 469 \end{array}$	$\begin{array}{r} 040/4\{202 \\ 404 \end{array}$	$\begin{array}{l} 2ab + b^2 = \\ (2a + b)b \{ 2a(+b) \\ 2ab + b^2 \end{array}$
0	0	0	
$\begin{array}{r} 14/97/69\{387 \\ 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2/00/00\{141 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 20/00/00\{47 \\ 16 \end{array}$	
$\begin{array}{r} 59/7\{68 \\ 544 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10/0\{24 \\ 96 \end{array}$	$\begin{array}{r} 40/0\{84 \\ 336 \end{array}$	
$\begin{array}{r} 536/9\{767 \\ 5369 \end{array}$	$\begin{array}{r} 40/0\{281 \\ 281 \end{array}$	$\begin{array}{r} 640/0\{887 \\ 6209 \end{array}$	
0		191	

Рисунок 1 – Извлечение корней из составных количеств (по Эйлеру)

Проверить результат можно умножением «просто счисляя»: по правилу «вертикально и крест-накрест», при достаточной тренировке практически устно.

$\begin{array}{r} \times 23 \\ 429 \\ + 1 \\ \hline 529 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 37 \\ 929 \\ + 44 \\ \hline 1369 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 387 \\ 98629 \\ + 4014 \\ + 11 \\ \hline 149769 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 473 \\ 4444 \\ + 2772 \\ \hline 32164 \end{array}$	$\begin{array}{r} a b c d \\ \times \quad e f g \\ \hline \end{array}$
--	--	---	---	--

Рисунок 2 – Вычисление произведения двух чисел по правилу «вертикально и крест-накрест»

Поясним алгоритм для примеров на рисунке 2. Порядок действий для умножения  $387 \cdot 387$ :  $7 \cdot 7 = 49$ ,  $8 \cdot 7 + 8 \cdot 7 = 112$ ,  $3 \cdot 7 + 3 \cdot 7 + 8 \cdot 8 = 106$ ,  $3 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 48$ ,  $3 \cdot 3 = 9$ , для умножения  $473 \cdot 68$ :  $3 \cdot 8 = 24$ ,  $7 \cdot 8 + 6 \cdot 3 = 74$ ,  $4 \cdot 8 + 0 \cdot 3 + 7 \cdot 6 = 74$ ,  $4 \cdot 6 + 0 \cdot 7 = 24$ ,  $0 \cdot 4 = 0$ .

Такое общее правило умножения можно применять не только для десятичных чисел, но и для умножения многочленов и даже бесконечных рядов, для нахождения коэффициентов в разложении бинома.

Приведём ещё один полезный для студентов алгоритм: разложения на простейшие дроби «сложных» дробей с «большими» степенями множителей знаменателя (по мотивам статьи [3] с усовершенствованием через применение схемы Горнера). Такие примеры часто обходят на практических занятиях, и студенты не имеют возможности научиться «спокойно» решать эти и связанные с ними задачи (интегрирование дробно-рациональных функций). Метод универсален и подходит даже для дробей с квадратичным множителем в знаменателе [4].

Пример. Разложить на простейшие дробь  $\frac{3x^2-5x+2}{(x-1)^5(x+1)^4x^3}$

Разложим по степеням выбранного множителя  $(x-1)$  из знаменателя числитель  $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$  и часть знаменателя, не содержащую выбранный множитель:  $Q(x) = (x+1)^4x^3 = x^7 + 4x^6 + 6x^5 + 4x^4 + x^3$ .

Таблица 1 – Схема Горнера для разложения числителя дроби по степеням  $(x-1)$

	3	-5	2
1	3	-2	0
1	3	1	
1	3		

Таблица 2 – Схема Горнера для разложения знаменателя дроби по степеням  $(x-1)$

	1	4	6	4	1	0	0	0
1	1	5	11	15	16	16	16	16
1	1	6	17	32	48	64	80	
1	1	7	24	56	104	168		
1	1	8	32	88	192			
1	1	9	41	129				

$$P(y) = y + 3y^2, Q(y) = 16 + 80y + 168y^2 + 192y^3 + 129y^4$$

Находим  $\frac{P(y)}{Q(y)}$ , деление начинаем с младших степеней, вычисляем только первые 5 коэффициентов частного (как и слагаемых, которых было 5). Получившееся частное  $\frac{1}{16}y - \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{32}y^3 + \frac{23}{32}y^4$  делим на  $y^5$

(в знаменателе исходной дроби  $(x - 1)^5$ ). Получаем часть разложения на простейшие, связанную с множителем  $(x - 1)^5$ :

$$\frac{1}{16(x-1)^4} - \frac{1}{8(x-1)^3} - \frac{1}{32(x-1)^2} + \frac{23}{32(x-1)} \quad (1)$$

Таким образом, можно получить разложение независимо по всем группам корней знаменателя.

Заметим, что для множителя  $x^3$  ответ получается почти устно:

$$-\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x} \quad (2)$$

Для множителя знаменателя  $(x + 1)^4$  будет соответственно:

$$\frac{5}{16(x+1)^4} + \frac{11}{8(x+1)^3} + \frac{115}{32(x+1)^2} + \frac{233}{32(x+1)} \quad (3)$$

Сумма выражений (1), (2), (3) даст полный ответ.

Таким образом, даже объёмные по количеству вычислений примеры могут быть упрощены.

### Библиографический список

1. Эйлер Л. Универсальная арифметика. Том 1. – Санкт-Петербург, 1768. – 376 с.

2. Богарова Е.В., Кравченко Г.В., Токарев В.Н. Методы развития мышления студентов на занятиях по математике: технологии и переводы // МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. – С. 220–224.

3. Лопшиц А.М. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие и интерполяционная задача Эрмита // Математика, ее преподавание, приложения и история, Матем. просв., сер. 2, 1, 1957. – С. 169–176.

4. Пизо Ш., Заманский М. Курс математики. Алгебра и анализ / перевод с французского Е.И. Стечкиной. – М.: Наука, 1971. – 656 с.

## УДК 37.013

### Интеграция содержания образования как средство развития профессионального интереса студентов

*Г.Н. Файзиева*

*РИ (филиал) АлтГУ, г. Рубцовск*

Особое место в системе интересов человека занимает профессиональный интерес, выражающий отношение человека к конкретной профессии, являясь единственным «внутренним» регулятором профессиональной деятельности. Профессиональный интерес включает по-

ложительное эмоциональное отношение субъекта к конкретной профессии; мотивационную основу выбора профессии, характеризующую процессуально-целевой направленностью; интеллектуальную активность субъекта, направленную на познание профессии и самосовершенствование; волевую активность субъекта, направленную на поддержание положительного эмоционального отношения к выбранной профессии [1, 20]. В связи с чем, структурными компонентами профессионального интереса являются: эмоциональный, мотивационный, интеллектуальный, волевой аспекты.

Одним из важных стимулов профессионального и познавательного интереса, по нашему мнению, выступает интеграция содержания образования. Рассмотрим, на материале преподавания математики, как активизация основных междисциплинарных связей содержания образования оказывает влияние на формирование структурных компонентов профессионального интереса. Различают междисциплинарные связи:

- учебно-междисциплинарные прямые связи;
- исследовательски-междисциплинарные прямые связи;
- ментально-опосредованные связи;
- опосредованно-прикладные связи [2, 39].

Учебно-междисциплинарные прямые связи возникают в том случае, когда усвоение одной дисциплины базируется на знаниях другой, предшествующей дисциплины. Такие связи характерны для дисциплин, входящих в один блок. При их изучении, прежде всего, необходимо определить структуру системных связей всего блока и базисные знания каждой дисциплины.

В нашем случае активизация таких связей инициируется с начала изучения математики (1 курс). Математическое образование студента – экономиста начинается с изучения элементов трех основных математических дисциплин, а именно, математического анализа, аналитической геометрии и высшей алгебры. Эти дисциплины имеют ряд точек соприкосновения, а местами и перекрытий и составляют фундамент, на котором строится все здание современной математической науки. При активизации связей данного типа следует обратить особое внимание на логическую сторону осуществления взаимосвязи между разделами математики и общематематическими и частными математическими методами познания. Так, например, существенным для изучения высшей алгебры и аналитической геометрии является проникновение алгебраических методов в геометрию и наоборот. Геометрические и алгебраические методы рассматриваются неразрывно друг от друга. Даже простое использование буквенных обозначений часто превращает геометриче-

ское доказательство в выполнении соответствующих алгебраических операций.

Алгебраический подход часто делает возможным намного облегчить решение определенных геометрических задач. Несомненно, что самым важным в отношении взаимосвязи между геометрией и алгеброй является то, что посредством алгебраической функциональной зависимости можно получить функцию, задающую некоторую геометрическую фигуру. Доказано, что каждый геометрический результат имеет алгебраический эквивалент. Эта одна из самых мощных и удивительных математических способностей «проникновения», а, следовательно, и формирования познавательного интереса. Неоспоримые возможности в возникновении и развитии познавательного интереса несет интеграция математических знаний и знаний из истории математики. Так при изучении теорем Коши, Ферма, Ролля и др., при решении систем методом Крамера, Гаусса, важно коротко знакомить студентов с биографией этих ученых.

Творцы математики – это люди с удивительными судьбами, с сильными характерами, преодолевающие трудности и невзгоды поистине героически. Этот аспект истории математики, т.е. жизнеописание замечательных ученых, играет особую роль, как в развитии познавательного интереса, так и в становлении личности, в формировании нравственной позиции, в выборе жизненного пути молодыми людьми. Изучая такие глобальные темы как дифференциальное и интегральное исчисления важно показать исторический путь становления этих разделов, демонстрируя тем самым возможности человеческого разума, показывая, что математика один из важных элементов общей культуры.

Уже в первых разделах курса математики есть немало возможностей для знакомства с задачами, которые реализуются в дальнейших ее разделах. Так, например, система линейных уравнений и матричный анализ – один из важнейших инструментов исследования операций в экономике, а предел, определенный интеграл – теории вероятностей и т.д.

Показ связей между разделами, темами, понятиями, так называемая детерминация будущим, вызывает удивление у студентов, радость пусть не значительного, но значимого для него открытия, что, несомненно, влияет на развитие мотивационно-эмоционального компонента познавательного интереса. На развитие эмоционального компонента оказывает большое влияние обращение к школьной математике. Содержание курса высшей математики рассматривается нами как органическое продолжение школьного курса. И это не лишено оснований. Так курс высшей алгебры представляет собой далеко идущее, но

вполне естественное обобщение основного содержания школьного курса элементарной алгебры.

Центральным в школьном курсе алгебры является, бесспорно, вопрос о решении уравнений. Как вы помните, изучение уравнений начинается с очень простого случая решения уравнения первой степени с одним неизвестным, а затем развивается в двух направлениях. С одной стороны, рассматриваются системы двух и трех уравнений первой степени с двумя и, соответственно, тремя неизвестными; с другой стороны, изучается одно квадратное уравнение с одним неизвестным, а также некоторые частные типы уравнений более высокой степени, легко сводящиеся к квадратным. Эти оба направления получают дальнейшее развитие в курсе высшей алгебры, определяя ее разбиение на два больших раздела: линейная алгебра и алгебра многочленов. Или возьмем математический анализ. Так как элементы математического анализа стали основной составной частью школьного курса математики, то при изучении математического анализа в университете происходит процесс расширения и углубления знаний на базе имеющихся, по сути дела, возникает стимул обновления уже усвоенных знаний, что и оказывает влияние, мы считаем, на развитие познавательного интереса. А как же профессиональный интерес, спросите вы? Так как профессиональный интерес тесно связан с познавательным интересом, то развивая его, у студентов создается ситуация успеха, ситуация творчества, а это - уверенность в правильном выборе профессии. С психологической точки зрения, успех – переживание состояния радости, удовлетворения оттого, что результат, к которому личность стремится в своей деятельности, либо совпадает с ее ожиданиями, надеждами, либо превосходит их.

С помощью экспериментов на материале различных российских вузов было установлено, что больше всего довольны избранной профессией студенты 1 курса. Студенты-первокурсники опираются, как правило, на свои идеальные представления о будущей профессии, которые при столкновении с реалиями, к сожалению, подвергаются болезненным изменениям. Ответы на вопрос «Почему профессия нравится?» свидетельствуют, что ведущей причиной здесь выступает представление о творческом содержании будущей профессиональной деятельности. Например, студенты упоминают «возможность самосовершенствования», «возможность заниматься творчеством» «престижность профессии» и т.п. Эмоциональная сфера личности превалирует. Поэтому у студентов первого курса следует больше уделять внимания на развитие мотивационно-эмоциональных компонентов, вызывая тем самым положительные эмоции к обучению в данном вузе и к выбран-

ной профессии. Положительные эмоции по отношению к профессии вызывают возникновение мотивов, связанных с самосознанием личностью своего соответствия с выбранной профессией, стремление лучше подготовиться к работе, осознание необходимости изучаемой дисциплины.

В силу логики развития самой науки математика превратилась в метод научного исследования. Подходя к математике, как в большей мере инструменту анализа, организации, управления, так необходимо специалисту по экономике, важно активизировать исследовательские междисциплинарные прямые связи.

Исследовательски-междисциплинарные прямые связи существуют в том случае, когда две и более дисциплины, имеют общие проблемы или объект исследования, но рассматривают их в различных аспектах или на основе разных дисциплинарных подходов. В этом случае встает задача определить поле общих проблем и на основе сравнительного анализа синтезировать многомерное видение проблемы и комплексный подход к ее решению.

При активизации этих связей мы руководствуемся принципом совершенствования фундаментальной математической подготовки студентов с усилением ее прикладной экономической направленности. При введении основных понятий, где это возможно, создаем условия для постижения студентами экономического смысла математических понятий (например, производной, интеграла и т.д.), приводим математические формулировки для экономических законов (закона убывающей доходности, принципа убывающей предельной полезности, условия оптимальности выпуска продукции), рассматриваем простейшие приложения высшей математики в экономике (балансовые модели, эластичность функции, производственные функции и т.п.). При таком подходе к содержанию образования, мы считаем, развивается мотивационный, волевой и интеллектуальный компоненты профессионального интереса. Источником интеллектуальной активности личности являются, как известно, мотивы. В свою очередь, познание профессии при изучении математики, принятие ее и нахождение своего места в ней укрепляет мотивы овладения профессией, затрагивая интеллектуальный компонент. Интеллектуальный компонент проявляется в овладении профессией, в стремлении к самообразованию, в отношении к приобретению профессиональных знаний и умений, затрагивая волевой компонент, в функции которого входит преодоление неблагоприятных состояний на различных этапах формирования профессионального интереса. Ментально-опосредованные связи возникают, когда средствами разных учебных дисциплин формируются одни и те же

компоненты и интеллектуальные умения, необходимые специалисту в его профессиональной деятельности.

Математика, являясь универсальным, общенаучным методом познания, служит языком и инструментом других наук, в том числе и экономики, менеджмента, маркетинга и т. д. Математика с одной стороны, позволяет расширить горизонты мышления экономиста, а с другой – четче, формальнее представлять экономическую действительность в каждом масштабе ее рассмотрения.

Учитывая тот факт, что методы анализа экономических процессов и методы, используемые при обучении математике, имеют много общего в качестве общих приемов учебной деятельности, которыми должны овладеть студенты при изучении математики и дисциплин финансово-экономического цикла, можно выделить следующие интеллектуальные умения и их составляющие:

- умение решать задачи (постановка вопроса, нахождение нужной информации для решения задачи, анализ проблемной ситуации, выдвижение гипотезы);

- способность к математическому моделированию (определение данных, условий и границ поиска решений, перевод проблемы на язык математики, применение адекватного математического аппарата, интерпретация решения);

- умение логически мыслить (дедуктивные и индуктивные умозаключения, комбинация логики и интуиции, аргументация выводов и заключений);

- коммуникативные умения (чтение, письмо, речь на языке математики, использование математических символов и формул, построение графиков, схем, диаграмм);

- умение применять новые информационные технологии.

Математика, таким образом, является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком наук, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки специалиста.

Опосредованно-прикладные связи формируются в случае, когда понятия одной науки используются при изучении другой. Они возникают в процессе гуманизации, фундаментализации, экологизации образования. Интегрированные курсы – «финансовая математика», «математические исследования в экономике», «имитационное моделирование», «информационные технологии в экономике» и др. успешно функционируют в нашем вузе, как нельзя лучше демонстрируют наличие таких связей. Внедрение математических методов в экономиче-

скую науку и в управление экономическими процессами – одно из наиболее значительных научных достижений.

Главная задача интегрированных курсов – формирование междисциплинарных профессиональных знаний и умений, системно-интегративных знаний о природе, обществе, мышлении, потребностей в самообразовании.

Так в интегрированном курсе «финансовая математика» рассматриваются математические модели финансовых операций, а также финансовые схемы этих моделей. Предметом изучения финансовой математики являются деньги, ценные бумаги, различные операции с ними на финансовом рынке, а методы расчета заимствованы из различных разделов математики (элементарная математика, алгебра, математический анализ, теория вероятностей и др.).

Интегрированный курс «финансовая математика» – активная проба сил будущего финансиста по профилю выбранной профессии, так как рассматриваются математические модели реальных финансовых операций – составление плана погашения различных видов кредитов по реальным ставкам, существующим в банках нашего города, анализ эффективности конкретной финансовой операции в условиях неопределенности и риска, анализ рынка ценных бумаг и др. Это приводит к более заинтересованному, лично значимому и осмысленному восприятию профессиональных и фундаментальных (математических) знаний. Усиление связей данного вида способствует расширению познавательных явлений и формируемых убеждений, углублению теоретической подготовки специалиста. В данном случае студент убеждается не только в истинности и логичности математических знаний, но и их практической полезности. Развитие профессионального интереса при активизации междисциплинарных связей данного вида происходит во взаимодействии с конкретной профессией. В работе «Диалектика природы» Ф. Энгельс писал: «Взаимодействие – вот первое, что выступает перед нами, когда мы рассматриваем движущуюся материю» [3, с. 26]. Понимая профессиональный интерес как динамическое образование, следует рассматривать его во взаимодействии с профессией, и с социальной средой. В связи с этим уместно вспомнить слова А.Н. Леонтьева: «...всякое свойство раскрывает себя в определенной форме взаимодействия. Изучение какого – ни будь свойства и есть изучение соответствующего взаимодействия» [4, с. 35].

Таким образом, профессиональный интерес возникает вследствие воздействия на субъекта окружающей среды и профессии. Первым из структурных компонентов возникает эмоциональный, включающий эмоции, определяющие отношение к выбранной профессии на основе

ее привлекательности. Затем происходит ее обоснование профессионального выбора (чем привлекает профессия, почему именно ее выбрал субъект), принимаются определенные профессиональные ценности и формируются мотивы выбора профессии. Сформировавшиеся мотивы и закрепившиеся эмоции способствуют проявлению интеллектуальной и волевой активности, направленной на познание профессии, а интеграция содержания образования, как мы видим, способствует этому.

### **Библиографический список**

1. Бабушкин Г.Д.. Психологические основы формирования профессионального интереса к педагогической деятельности. Омск: ОГИФК, 1990. – 186 с.
2. Педагогика и психология высшей школы. Ростов-на-Дону, Феликс, 2002. – 544 с.
3. Энгельс Ф. Диалектика природы. – Маркс К., Энгельс Ф., Соч. 2-е изд., т. 4. – 820 с.
4. Леонтьев А.Н. Проблемы развития психики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 584 с.

### **УДК 004**

#### **Использование системы компьютерной алгебры Maple для решения вариационных задач**

*А.С. Шевченко*

*РИ (филиал) АлтГУ, г. Рубцовск*

Одним из важнейших направлений развития информационных технологий на сегодняшний день является появление современных систем компьютерной алгебры (СКА), которые позволяют максимально упростить процесс решения задачи и анализ ее результатов. Такие СКА, как Maple, Mathcad, Mathematica или Matlab, позволяют осуществлять вычисление пределов, численное и аналитическое дифференцирование и интегрирование функций, решение дифференциальных или трансцендентных уравнений с помощью одной встроенной команды, которую нужно уметь правильно применять. Поэтому СКА не избавляют нас от необходимости думать при решении различных задач. СКА только позволяет ускорить и упростить выполнение рутинных действий, различных выкладок и избавить нас от появления досадных ошибок.

В настоящее время компьютеризация коснулась и сферы образования. Внедрение современных информационных технологий в образо-

вательный процесс поставило на повестку дня задачу создания учебников по математическим дисциплинам, которые должны быть ориентированы на использование систем компьютерной алгебры.

Большинство известных учебников по вариационному исчислению были написаны в 70-е годы прошлого столетия. Несомненно, они остаются прекрасными книгами в научном и методическом плане, и поэтому необходимо адаптировать курс по вариационному исчислению к использованию современных информационных технологий.

При изучении студентами различных задач вариационного исчисления возникают трудности связанные именно с решением дифференциальных уравнений. Поэтому было решено в образовательный процесс внедрить СКА Maple, который хорошо приспособлен к решению различных математических задач. Более того, Maple является первым пакетом символьной математики и лидером среди универсальных систем символьных вычислений.

В связи с этим, написана монография [1] и разработаны mws-файлы, которые содержат подробные комментарии для каждого типа задач:

- вариационные задачи с фиксированными границами [2];
- вариационные задачи с подвижными границами [3];
- задачи на условный экстремум (задача Лагранжа, изопериметрическая задача, задача Больца и Майера) [4-5];
- прямые методы в вариационных задачах (конечно-разностный метод Эйлера, метод Рунге) [6].

Рассмотрим пример. Используя конечно-разностный метод Эйлера, найдите приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + 2y] dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Решение задачи в Maple:

```
> restart:
```

```
Конечно-разностный метод Эйлера
```

```
> method_Euler:=proc(n,F) local i, hx, y, dy, S, sis, dS, rez, k, J;
```

```
Рассчитываем hx:
```

```
hx:=(b-a)/n;
```

```
Задаем ординаты y[i]:
```

```
y[0]:= ya; for i to n-1 do y[i] end do; y[n]:= yb;
```

```
Вычисляем приближенные значения производных:
```

```
for i from 0 to n-1 do dy[i]:= (y[i+1]-y[i])/hx end do;
```

Вычисляем приближенно, используя формулу прямоугольников, исходный интеграл:

```
S:=0; for i from 0 to n-1 do S:=S+F(x,y[i], dy[i]) end do; S:=S*hx;
```

Составляем систему уравнений для определения ординат искомой ломаной:

```
for i to n-1 do dS[i]:={diff(S, y[i])=0} end do;
Решаем полученную систему уравнений:
sis:= dS[1];
for i from 2 to n-1 do sis:= sis union(sis, dS[i]) end do; sis;
rez:= solve(sis); evalf(rez);
Вычисляем функционал:
k:=subs(rez,S); J:=k=evalf(k);
return J;
end proc;
```

1. Задание подынтегральной функции и краевых условий:

```
> F:=(x,Y,DY)->DY^2+2*Y; a:=0; b:=1; ya:=0; yb:=0;
```

$$F := (x, Y, DY) \rightarrow DY^2 + 2 Y$$

$$a := 0$$

$$b := 1$$

$$ya := 0$$

$$yb := 0$$

2. Задание n-прямоугольных звеньев:

```
> n:=5;
```

$$n := 5$$

3. Вычисление функционала, используя конечно-разностный метод Эйлера

```
> J := method_Euler(n, F);
```

$$J := \frac{-2}{25} = -0.08000000000$$

Участие в процессе обучения одновременно педагога и современных информационных технологий улучшает качество образования и повышает эффективность образовательного процесса [7–8]. Использование СКА Maple позволяет активизировать процесс преподавания, повысить интерес студентов к изучению математических дисциплин, достичь большей глубины понимания учебного материала.

### Библиографический список

1. Шевченко А.С. Решение вариационных задач в пакете Maple: монография [Электронный ресурс]. – Рубцовск: Рубцовский институт (филиал) АлтГУ, 2017. – 175 с.

2. Лелянов Б.Н., Хмара В.Н. Автоматизированное решение задач вариационного исчисления // Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ», 2013. – Том 4. – № 4. – С. 919 – 925 [Электронный

ресурс]. – URL: [http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles-2013/TGU\\_4\\_181.pdf](http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles-2013/TGU_4_181.pdf).

3. Шевченко А.С. Применение математического пакета Maple к решению вариационных задач с подвижными границами. Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ», 2016. – Том 7. – № 1. – С. 313–323 [Электронный ресурс]. – URL: [http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles-2016/TGU\\_7\\_52.pdf](http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles-2016/TGU_7_52.pdf).

4. Шевченко А.С. Применение математического пакета Maple к решению вариационных задач на условный экстремум. Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ», 2016. – Том 7. – № 2. – С. 246–260 [Электронный ресурс]. – URL: [http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles-2016/TGU\\_7\\_91.pdf](http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles-2016/TGU_7_91.pdf) (дата обращения: 8.12.2017).

5. Шевченко А.С. Автоматизированное решение вариационных задач на условный экстремум. // Современная наука: проблемы и пути их решения: Сборник материалов Международной научно-практической конференции. Том II. – Кемерово: КузГТУ, 2015. – С. 325–328.

6. Шевченко А.С. Применение математического пакета Maple к решению вариационных задач методом Ритца // Системы компьютерной математики и их приложения, 2017. – № 18. – С. 50–52.

7. Шевченко А.С. Использование систем компьютерной алгебры для повышения эффективности образовательного процесса при изучении математических дисциплин // МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. – С. 287–291.

8. Шевченко А.С. Совместное использование систем компьютерной алгебры с технологиями дистанционного обучения в учебном процессе при изучении математических дисциплин // Фундаментальные проблемы науки и образования: сборник научных статей международной конференции Ломоносовские чтения на Алтае. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2017. –С. 1945–1953.

## **Часть II**

# **Материалы молодежной прикладной IT школы**

**Материалы молодежной прикладной IT школы.  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
И МОДЕЛИ В ЭКОЛОГИИ**

**УДК 579.64**

**Исследование аналитического решения математической модели производства биогаза из растительного сырья**

*А.А. Баюк*

*АлтГУ, г. Барнаул*

В последнее время всё более актуальной становится проблема поиска альтернативных возобновляемых источников энергии. Одним из таких источников является биогаз – смесь газов: метана и углекислого газа. Его получают путём анаэробного сбраживания органического сырья в установке, называемой биореактором. В процессе получения биогаза выделяют четыре стадии: первая – гидролиз высокомолекулярных органических соединений (углеводов, белков и жиров) – их разложение до составляющих их полимеров (соответственно сахаров, аминокислот и жирных кислот); вторая стадия – ацидогенез, в процессе которой под действием анаэробных бактерий происходит образование сложных спиртов и карбоновых кислот; на третьей стадии ацетогенеза сложные спирты и карбоновые кислоты разлагаются до уксусной и муравьиной кислот, а также метанола с выделением водорода; в ходе четвертой стадии метаногенеза происходит образование биогаза. Работы, посвященные исследованию и оптимизации процесса производства биогаза, можно найти в [1–4].

Автором исследуется аналитическое решение следующей нелинейной динамической системы [5]:

$$\dot{W} = -kWf_H(S) + K_{flom}(W_0 - W), \lim_{x \rightarrow \infty} \quad (1)$$

$$\dot{S} = \gamma kWf_H(S) - \rho_m f_M(S) \frac{SB}{K_S + S} - K_{flom} S, \quad (2)$$

$$\dot{B} = Y \rho_m f_M(S) \frac{SB}{K_S + S} - (K_D + K_{flom})B, \quad (3)$$

$$\dot{P} = \theta \cdot (1-Y) f_M(S) \rho_m \frac{SB}{K_S + S}, \quad (4)$$

где  $W$  и  $S$  – концентрация исходного субстрата и продуктов гидролиза соответственно (г/л);  $B$  – концентрация биомассы метаногенных микроорганизмов (г/л);  $P$  – суммарный выход биогаза (г/л);  $k$  – константа скорости гидролиза (1/сут);  $\gamma$  – коэффициент конверсии субстрата в жирные кислоты;  $\rho_m$  – максимальная удельная скорость метаногенеза в терминах утилизации биомассы летучих жирных кислот (1/сут);  $K_S$  – константа полунасыщения в уравнении Моно для интенсивности метаногенеза (г/л);  $Y$  – доля субстрата, идущая на рост микробной биомассы;  $(1-Y)$  – доля субстрата, идущая на образование биогаза,  $K_D$  – коэффициент распада микробной биомассы (1/сут),  $\theta$  – переводной коэффициент потока утилизации жирных кислот в биогаз (мл/г);  $K_{flow}$  – интенсивность притока свежего субстрата неизменного структурного состава, равная интенсивности оттока общего интермедиата из рабочей области реактора (1/сут);  $\dot{W}$ ,  $\dot{S}$ ,  $\dot{P}$ ,  $\dot{B}$  – производные по времени  $t$ .

Функции  $f_H(S)$  и  $f_M(S)$  описывают ингибирование реакций гидролиза и микробной ферментации жирными кислотами. Для упрощения исследования полагаем  $f_H(S) = f_M(S) = f(S)$ .

Для замыкания системы (1)–(4) запишем начальные условия:

$$W(0) = W_0; \quad S(0) = 0; \quad B(0) = B_0; \quad P(0) = 0. \quad (5)$$

Для исследования устойчивости стационарного решения линеаризуем систему (1)–(4).

При  $\gamma = 1$ ,  $K_{flow} = 0$ ,  $K_D = 0$  для системы (1)–(4) выполнен закон сохранения:  $(W + S + B + P)_i = 0$ . Это означает, что

$W + S + B + P = W_0 + S_0 + B_0 + P_0$ . Воспользовавшись начальными условиями (5), получим:  $W + S + B + P = W_0 + B_0$ . В этом случае неподвижными точками системы являются:

$$W = 0, \quad S = 0, \quad B + P = W_0 + B_0 \quad (6)$$

или

$$W = 0, \quad B = 0, \quad S + P = W_0 + B_0. \quad (7)$$

Соотношения (6) означают, что органическое вещество полностью переработано, и конечный продукт содержит только метаногенную биомассу и газ. В случае (7) – органическое вещество полностью пере-

работано, и конечный продукт содержит только жирные кислоты и газ. При исследовании точек первого типа (6) и второго типа (7) было выявлено, что при заданных условиях об устойчивости системы (1)–(4) ничего сказать нельзя.

Найдем неподвижную точку системы (1)–(3):

$$W^* > 0, \quad S^* > 0, \quad B = 0, \quad (8)$$

где  $w^*$ ,  $s^*$  определяются из уравнений (1), (2). Данная система имеет единственное положительное решение. Тогда по критерию Гурвица неподвижная точка (8) устойчива при условии:

$$Y\rho_m f(S^*) \frac{S^*}{K_S + S^*} < K_D + K_{flow}.$$

Рассмотрим неподвижные точки, для которых  $B \neq 0$ . Существование таких точек возможно, если уравнение, полученное из (3)

$$f(S) \frac{S}{K_S + S} = \frac{(K_D + K_{flow})}{Y\rho_m}, \quad (9)$$

имеет положительное решение  $S^*$  и при этом

$$B^* = \gamma k \frac{K_{flow} W_0}{K_{flow} + kf(S^*)} f(S^*) - K_{flow} S^* > 0$$

или

$$f(S^*) > \frac{K_{flow} S^*}{k(\gamma W_0 - S^*)}, \quad \text{где } S^* < \gamma W_0. \quad (10)$$

Очевидно, что при достаточно малых значениях  $(K_D + K_{flow})/Y\rho_m$  уравнение (9) имеет два положительных корня. Выбором  $W_0$  можно добиться выполнения неравенства (10) для одного или даже двух корней (9).

При исследовании нового положения равновесия на устойчивость, получаем кубический полином, все коэффициенты которого положительны в случае

$$f(S^*) \frac{S^* B^*}{K_S + S^*} + f(S^*) \frac{B^* K_S}{(K_S + S^*)^2} > 0.$$

Следовательно, положение равновесия системы (1)–(3), для которого

$$W^* = \frac{K_{flow} W_0}{K_{flow} + kf(S^*)}, \quad B^* = \gamma k \frac{K_{flow} W_0}{K_{flow} + kf(S^*)} f(S^*) - K_{flow} S^*$$

и  $s^*$  – меньший корень уравнения (9), по критерию Гурвица является устойчивым. Положение равновесия, в котором  $s^*$  – больший корень уравнения (9), по критерию Гурвица является неустойчивым.

В дальнейшем предполагается рассмотреть задачу максимизации скорости выхода биогаза [6]:

$$(1-Y)f(S^*) \frac{S^* B^*}{K_S + S^*} \rightarrow \max$$

или

$$\left( \gamma k \frac{K_{flow} W_0}{K_{flow} + kf(S^*)} f(S^*) - K_{flow} S^* \right) (1-Y) \frac{K_D + K_{flow}}{Y} \rightarrow \max.$$

В качестве управляющих параметров логично выбрать начальное значение  $W_0$  и  $K_{flow}$ .

*Работа выполнена при поддержке Благотворительного Фонда В. Потанина*

### Библиографический список

1. Nicoletta Kythreotou, Georgios Florides, Savvas A. Tassou. A review of simple to scientific models for anaerobic digestion // *Renewable Energy*. – 2014. – №71. – P. 701–714.

2. Хворова Л.А., Брыксин В.М., Гавриловская Н.В., Топаж А.Г. Математическое моделирование и информационные технологии в экологии и природопользовании. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013. – 277 с.

3. Баяк А.А., Топаж А.Г., Хворова Л.А. Имитационное моделирование процесса производства биогаза из растительного сырья // Сб. науч. статей межд. конф. «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования». – Барнаул, 2017. – С. 400–403.

4. Khvorova L.A. Information technologies, systems and models in the agricultural science and the practice of their using in the plant protection // *Mathematical modeling in plant protection*. Saint-Petersburg: All-Russian Research Institute of Plant Protection (VIZR), 2014. P. 23-30.

5. Топаж А.Г., Хворова Л.А., Жариков А.В., Баяк А.А. Исследование математической модели производства биогаза из растительного сырья // *Известия Алтайского гос. ун-та*. – 2018. – №1 (99). – С. 127–131.

6. Топаж А.Г., Вигонт В.А., Хворова Л.А. Имитационная модель процесса производства биогаза из многокомпонентного растительного сырья. Анализ и параметрическая оптимизация // Химия растительного сырья. – 2018. – № 1. – С. 171–184.

**УДК 51-77**

## **Пространственный анализ факторов миграции сельской молодежи в Алтайском крае**

***М.А. Биттер, Е.В.Понькина***

*АлтГУ, г. Барнаул*

Одним из важных феноменов современного общества, подлежащих изучению и анализу, является миграция населения. Миграция населения в России из сельских территорий характеризуется преобладанием миграционного оттока населения над притоком. Отток населения, особенно молодежи (возраста 15–29 лет) влечет негативные последствия для территории в виде снижения обеспеченности экономики квалифицированными кадрами, изменения демографической структуры населения, экстенсивности социально-экономического развития территории. В последние годы наблюдается рост площадей урбанизированных территорий и численности их жителей, что является последствием миграционных процессов. Актуальным является изучение паттернов факторного пространства, характеризующих сложившиеся за последние 5 лет миграционные тенденции в регионе.

В качестве региона исследования рассматривается Алтайский край, сельские поселения. По данным РОССТАТ, численность сельского населения сократилась на 36 485 тыс. чел. за период 2012–2016 гг., что в среднем в год составляет 7 297 тыс. чел. Статистические данные по сельским поселениям показывают устойчивое преобладание оттока молодежи в возрасте 15–29 лет и работающего населения в возрасте 30–34 лет. В исследованиях Быкова Н.И. и Еремина А.А. [1] показано, что перемещение сельского населения в основном ориентировано из малых (мало населенных поселений) в направлении крупных населенных пунктов и городов. Сергиенко А.М. и Иванова О.А. [2] исследовали мотивационные факторы сельской молодежи, ограничивающие или стимулирующие к въезду или выезду из села. В работе Беднарикова З. и др. [3] выполнен анализ факторов миграции молодежи аграрных профессий по данным опроса 500 студентов аграрного университета.

Целью данного исследования является анализ пространственных паттернов («картин»), описывающих действие различных простран-

ственных факторов на возвратную миграцию сельской молодежи (возраста 15–29 лет) в Алтайском крае.

Результаты исследования основаны на статистических данных по сельским поселениям Алтайского края за период 2012–2016 гг. с использованием базы данных регионального отделения Росстат по муниципальным образованиям. Всего собрано данных по 607 сельским поселениям и 36 показателей. Статистические показатели группированы по следующим блокам:

**Группа А.** Пространственная удаленность (*Spatial Factors*): расстояние до г. Барнаула (км); расстояние до районного центра (км); расстояние до ближайшего города (км); расположение объекта на границе района (0/1).

**Группа В.** Население, данные за 2012–2016 гг. (*Population*): численность населения (чел.); плотность населения (чел./ кв. км); изменение численности населения (чел.); приток / отток населения (чел.); процентное изменение численности населения за 2012–2016 гг. (чел.).

**Группа С.** Миграция, данные за 2012–2016 гг. (*Migration*): выбывшие в возрасте 15–29 лет (чел.); прибывшие в возрасте 15–29 лет (чел.); выбывшие в возрасте 30–34 года (чел.); прибывшие в возрасте 30–34 года (чел.).

**Группа D.** Социальная среда, данные за 2012–2016 гг. (*Social Infrastructure*): наличие (1) / отсутствие (0) / сокращение (2) школы (ед.) (School); сокращение общеобразовательных учреждений (ед.); наличие (1) / отсутствие (0) поликлиники и больницы (ед.) (Hospital); количество койко-мест (ед. /1000 чел.).

Главным индикатором, характеризующим позитивность или негативность миграционной ситуации в сельском поселении, выступает коэффициент миграционного оттока молодежи возраста 15-29 лет, вычисленный как:

$$\text{Outflow}_{15\_29} = \left( \frac{\text{Out}_{15\_29} - \text{In}_{15\_29}}{\text{Population}} \right) \cdot 1000,$$

где  $\text{Out}_{15\_29}$  – общее количество выехавших в возрасте 15–29 лет за период 2012–2016 гг., чел.;  $\text{In}_{15\_29}$  – общее количество въехавших в возрасте 15-29 лет за период 2012-2016 гг., чел.;  $\text{Population}$  – средняя численность населения в сельском поселении за 2012-2016 гг., чел.

Значение  $\text{Outflow}_{15\_29} > 0$ , если в сельском населении преобладает отток жителей данной возрастной категории;  $< 0$  – приток. Анализ данных по сельским поселениям показал, что во многих районных центрах, в частности в таких сельских поселениях как Алтайское, Ребриха, Павловск, Шипуново, Новичиха, Ельцовка, Крутиха, Тальменка, Мамонтово, Залесово, Новая Чемровка и других, преобладает положи-

тельный прирост населения данной категории. Также приток наблюдается и в городах: Барнаул, Новоалтайск, Бийск, Белокуриха, Алейск.

В качестве методологии пространственного анализа миграционной ситуации в работе используются ГИС технологии [4–5] и метод пространственной регрессии [6].

В качестве пространственных факторов (*Spatial\_Factors*) рассматриваются следующие: удаленность от сельского поселения до г. Барнаула (км) (*Dist\_Barnaul*); до ближайшего города (км) (*Dist\_Nearest\_City*); до районного центра (км) (*Dist\_District\_Center*); расположение поселения на границе района (Да/Нет) (*Border\_District*); расположение вблизи границы региона (Да/Нет) (*Border\_Region*).

В качестве инструментария анализа влияния пространственных факторов рассматриваются модели линейной регрессии вида:

$$Outflow_{15\_29}_i = a_j Spatial\_Factors_{ij} + b_j + \varepsilon_i; \quad i = 1, \dots, 607; \quad (1)$$

где  $j$  – номер пространственного фактора ( $j = 1, \dots, 5$ ).

Идентификация параметров модели (1) выполняется методом наименьших квадратов для каждого  $j$ –ого фактора. Для факторов, характеризующих удаленность сельского поселения от районного центра или города используется «табулирование» по возрастанию на группы (км). Таким образом, изменение коэффициента  $a_j$  в модели (1) для сельских поселений различного расположения в пространстве может быть отображено в виде тематических карт.

На рисунках 1–3 приведены результаты оценки коэффициента  $a_j$  модели (1) для факторов удаленности от г. Барнаула, от ближайшего города и районного центра.

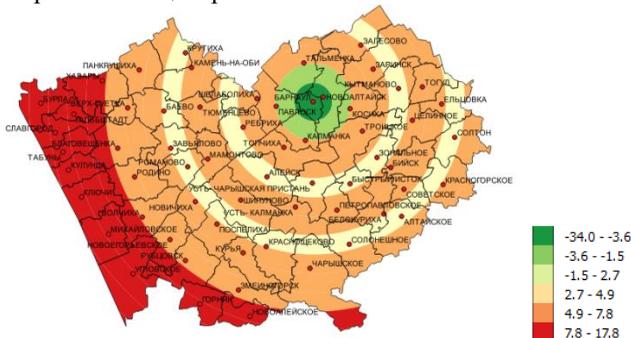


Рисунок 1 – Изменение коэффициента регрессии (1) в зависимости от удаленности сельского поселения от г. Барнаула

Отрицательное значение коэффициента характеризует положительный эффект «закрепления» сельской молодежи в указанном радиусе

населенных пунктов. Видно, что г. Барнаул, как и другие урбанизированные территории края (рисунок 2), являются «центрами притяжения» молодежи. Анализ данных показал, что и для населения возраста 30–34 лет эти территории также являются привлекательными.

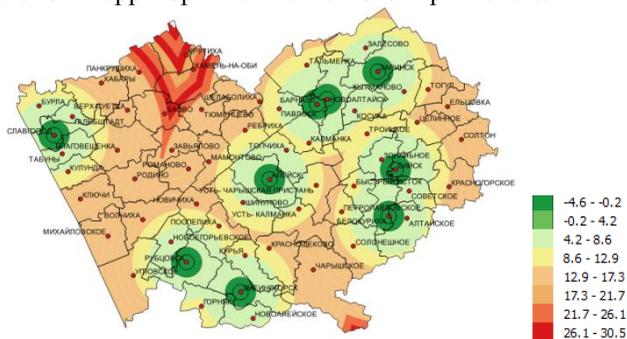


Рисунок 2 – Изменение коэффициента регрессии (1) в зависимости от удаленности сельского поселения от ближайшего города

Пространственная удаленность сельского поселения, наряду с близостью к границе района играют негативную роль. Помимо того, что такие населенные пункты характеризуются малочисленностью населения, интенсивным оттоком жителей трудоспособного возраста, они характеризуются, как правило, и отсутствием необходимой социальной инфраструктуры (школа, больница, дошкольные учреждения), а в некоторых населенных пунктах отсутствуют и возможности трудоустройства (не зарегистрированы какие либо предприятия и организации).



Рисунок 3 – Изменение коэффициента регрессии (1) в зависимости от удаленности сельского поселения от центра района

Разработка математической модели миграции сельского населения выполнено с учетом множества социальных факторов (*Social\_Factors*), из числа которых выбраны статистически значимые. Анализ данных показал, что наличие объектов социальной инфраструктуры в сельских поселениях, играют значимую роль в закреплении молодежи на селе. Также свою значимость подтверждают плотность автомобильных дорог (*Density\_Auto\_Road*) и сельские территории с большей численностью населения.

Итоговая модель миграции сельской молодежи в виде модели пространственной регрессии вида:

$$Outflow_{15\_29}_i = a Spatial_i + b Population_i + c Migration_i + d Social_i + const + \varepsilon_i, \quad (3)$$

где *Outflow\_15\_29<sub>i</sub>* – моделируемая переменная: коэффициент миграционного оттока населения в возрасте 15 – 29 лет в расчете на 1000 чел.; *Spatial<sub>i</sub>* – вектор пространственных переменных; *Population<sub>i</sub>*, *Migration<sub>i</sub>*, *Social<sub>i</sub>* – вектора переменных размера сельского поселения по численности населения (*Village\_Population*), текущих тенденций «закрепления» трудоспособного населения *Outflow\_30\_34*, наличия необходимых объектов социальной инфраструктуры (*Hospital*; *School*); *a*, *b*, *c*, *d*, *const* – параметры.

Результат вычисления коэффициентов с моделируемыми показателями регрессионной модели по сельским поселениям приведен в таблице.

Таблица – Результаты оценки параметров модели (3)

Переменная	Коэффициент	СКО	Доверительный интервал (0.95)
<i>Пространственные факторы:</i>			
<i>Dist_Barnaul</i>	0.13***	0.048	( 0.05; 0.21 )
<i>Dist_Nearest_City</i>	0.08***	0.003	( 0.02; 0.10 )
<i>Dist_District_Center</i>	0.21**	0.011	( 0.01; 0.40 )
<i>Border_District</i>	-0.43	1.77	( -3.90; 3.05 )
<i>Border_Region</i>	6.32	5.63	( -4.75; 17.39 )
<i>Факторы социальной инфраструктуры:</i>			
<i>Hospital</i>	5.28*	3.02	( -0.66; 11.21 )
<i>School</i>	-15.25***	3.51	( -22.13; -8.36 )
<i>Density_Auto_Road</i>	0.026	0.16	( -0.28; 0.33 )
<i>Фактор масштабов поселения:</i>			
<i>Village_Population</i>	-0.0015***	0.0003	( -0.002; -0.001 )
<i>Фактор текущего тренда миграции трудоспособного населения:</i>			
<i>Outflow_30_34</i>	0.96**	0.09	( 0.79; 1.14 )
<i>Const</i>	14.61**	6.60	( 1.65; 27.57 )

Примечание: \*, \*\*, \*\*\* – статистическая значимость параметра по критерию Стьюдента при 0.1, 0.05 и 0.01 при доверительной вероятности, соответственно.

Найденная модель является статистически значимой ( $F(10; 407)=33.5$ ) и содержит 7 статистически значимых переменных, значения которых имеют стабильный знак в пределах доверительного интервала.

Анализ коэффициентов модели в целом подтверждает выводы сделанные ранее. В целом результаты регрессионного анализа показали, что факторы пространственной удаленности от центров развитой социальной инфраструктуры играют большую роль. Малочисленные сельские поселения теряют молодежь, усиливающим фактором этого процесса является миграционный отток трудоспособного населения возраста 30–34 года. Несмотря на различие плотности дорог с твердым покрытием среди сельских поселений и выявлении в данных слабой связи, этот фактор не является статистически значимым в совокупности рассмотренных переменных.

Дальнейшее развитие работы заключается в расширении базы статистических данных по сельским поселениям, учет экономических факторов миграции (безработица, уровень заработной платы, наличие рабочих мест, специализация предприятий и т.д.) и факторов «якорного» типа, способствующих закреплению молодежи на селе.

#### **Библиографический список:**

1. Еремин А.А., Быков Н.И. Демографическая ситуация в Алтайском крае на современном этапе (1990–2010 гг.). – Барнаул, Азбука, 2011.
2. Сергиенко А.М., Иванова О.А. Миграция сельской молодежи как индикатор благополучия села // Социология в современном мире: наука, образование, творчество – Барнаул, Изд-во Алт. ун-та, 2016. – С. 21–26.
3. Bednářiková Z., Vavřorová M., Ponkina E.V. Migration Motivation of Agriculturally Educated rural Youth: the Case of Russian Siberia. *Journal of Rural Studies*. – 2016. – Vol. 45. – Pp. 99–111.
4. Майкл де Мерс. Географические информационные системы / Майкл де Мерс. – М.: Дата+, 2000.
5. Понькина Е.В. Геоинформационные технологии в сельскохозяйственном производстве. Монография. Барнаул, Изд-во Алтайского государственного университета, 2005.
6. Ратникова Т.А. Введение в эконометрический анализ панельных данных // *Экономический журнал ВШЭ*. – Москва, 2006. – С. 267–315.

УДК 51-76

## **Анализ агентных моделей динамики популяции методом рекуррентных диаграмм**

*А.К. Букасова, А.В. Абрамова*  
*АлтГУ, г. Барнаул*

Рекуррентные диаграммы – это метод анализа временных рядов, который состоит как из визуальных возможностей (непосредственно самих диаграмм), так и мощного численного аппарата (всевозможных мер). Сам по себе метод является обширным полем для исследования, в том числе возможности и специфики применения метода в практике построения математических моделей. Изучение и разработка алгоритмов применения рекуррентных диаграмм в математическом моделировании, в том числе разработка гибкого инструментария для реализации метода, являются важными проблемами.

Рекуррентная диаграмма – это двумерное представление, которое отображает корреляцию расстояния в динамических рядах. Рекуррентные диаграммы являются эффективным способом визуализации геометрии поведения динамической системы.

Цель исследования – определить с помощью количественных методов анализа рекуррентных диаграмм границы применимости дискретных моделей динамики популяции. В работе [1] рассматриваются наиболее распространённые обоснования использования дискретных моделей для описания популяционной динамики, такие как непосредственный переход от непрерывного уравнения к рекуррентному с помощью прямой дискретизации, моделирование популяций с перекрывающимися поколениями и др. Визуальный анализ модельных данных методом рекуррентных диаграмм показал отсутствие периодических и хаотических режимов, наблюдаемых при использовании дискретных аналогов моделей популяционной динамики. Поэтому было принято решение продолжить исследование и проанализировать модельные данные с помощью количественных методов анализа рекуррентных диаграмм [2].

Для достижения цели работы было создано семейство агентно-ориентированных моделей и проведена серия компьютерных экспериментов в среде имитационного моделирования AnyLogic. Идея состояла в том, чтобы попытаться использовать модельные данные в качестве замены полевых наблюдений над численностью реальных природных популяций.

В качестве объекта моделирования выбиралась условная популяция агентов с определёнными законами поведения:

- агенты могут свободно случайным образом передвигаться по области обитания;

- агенты потребляют возобновляемые пищевые ресурсы, распределённые по области обитания;

- в определённый момент времени агенты (самки) дают потомство (один раз за период своей жизни или несколько раз);

- смертность агентов обуславливается ограниченностью ресурсов и случайным их распределением по ареалу обитания: если агент за определённое время не находит пищевой ресурс, он погибает от голода;

- ресурсы возобновляются с определённой скоростью;

- интенсивность размножения зависит от соответствующего параметра модели (рассматривалось количество потомков от 1 до 4).

На рисунке 1 показана визуализация работы разработанной агентной модели.

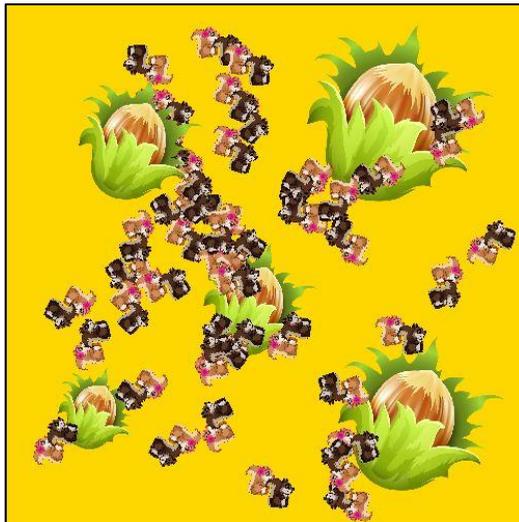


Рисунок 1 – Визуализация работы агентной модели динамики условной популяции

Материал для статистической обработки формируется за счёт происходящей с заданной регулярностью периодической фиксации мгновенных значений общей численности. Затем полученные сколь угодно длинные ряды наблюдений используются в качестве исходных данных

для построения рекуррентных диаграмм с целью выявления режимов динамики, характерных для разностных моделей классического типа.

Количественный анализ рекуррентных диаграмм основан на подсчете элементов рекуррентных диаграмм в некоторых соотношениях. Численный анализ рекуррентных диаграмм позволяет вычислять меры сложности структур рекуррентных диаграмм, такие как мера рекуррентности, мера детерминизма, мера энтропии и др. [3]. Предполагается, что расчёт количественных мер рекуррентных диаграмм позволит убедиться в отсутствии хаотических и периодических режимов в численности моделируемых популяций и сделать вывод о границах применимости дискретных моделей в моделировании популяционной динамики.

В качестве инструмента для решения задачи была выбрана среда имитационного моделирования AnyLogic, позволяющая строить и анализировать модели разного типа, в том числе агентно-ориентированные модели. Построение рекуррентных диаграмм и расчёт количественных мер осуществлён в прикладном пакете Matlab.

### **Библиографический список**

1. Топаж А. Г., Абрамова А. В., Толстопятов С. Е. Дискретные модели популяционной динамики: достоинства, проблемы и обоснование // Компьютерные исследования и моделирование – М., 2016. – Т. 8, №2. – С. 267–284.
2. Киселев В. Б. Рекуррентный анализ – теория и практика // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики – СПб., 2006. – №29. – С. 118–127.
3. Киселев В.Б., Крылов Б.А. Исследование динамики процессов методом вычисления мер количественного рекуррентного анализа в окне, смещаемом вдоль главной диагонали рекуррентной диагонали // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – СПб., 2008. – №11(56). – С. 62–72.

### **УДК 51-76**

## **Моделирование вертикальной структуры фитопланктона с учетом активных перемещений зоопланктона**

***Е.Е. Гиричева***

*ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток*

Пространственная структура планктонного сообщества определяется рядом биотических и абиотических факторов. На нее влияет как температура воды, освещенность, диффузионные процессы, так взаи-

модействия между видами. Вертикальная неоднородность также определяется и активными суточными перемещениями особей зоопланктона [1, 2]. Предлагается модель, описывающая пространственно-временную динамику фитопланктона (P), травоядного зоопланктона ( $Z_1$ ) и хищного зоопланктона ( $Z_2$ ) в вертикальном столбе воды с учетом суточных вертикальных миграций хищного зоопланктона. Изменение плотности популяций описывается системой «реакция-адвекция-диффузия»:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + rP \left(1 + \frac{P}{K_p}\right) - \frac{\mu_1 P}{K_1 + P} Z_1 - \frac{\mu_2 \rho_1 P}{K_2 + \rho_1 P + \rho_2 Z_1} Z_2; \\ \frac{\partial Z_1}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} + \frac{\alpha \mu_1 P}{K_1 + P} Z_1 - \frac{\mu_2 \rho_2 Z_1}{K_2 + \rho_1 P + \rho_2 Z_1} Z_2 - m_1 Z_1; \\ \frac{\partial Z_2}{\partial t} &= D_3 \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x^2} - v(t, x) \frac{\partial Z_2}{\partial x} + \frac{\alpha \mu_2 (\rho_1 P + \rho_2 Z_1)}{K_2 + \rho_1 P + \rho_2 Z_1} Z_2 - \delta Z_2^2 - m_2 Z_2.\end{aligned}$$

Система рассматривается в одномерной области  $x \in [0, X]$ . Это может быть столб воды в поверхностном слое океана. Здесь  $D_1, D_2, D_3$  – коэффициенты турбулентной диффузии,  $v(t, x)$  – скорость суточных миграций хищного зоопланктона;  $r, K_p$  – скорость роста и емкость экологической ниши фитопланктона. Трофические функции Холлинга второго типа описывают потребление фитопланктона обоими видами зоопланктона с максимальными скоростями потребления  $\mu_1, \mu_2$  и константами полунасыщения  $K_1, K_2$ . При этом трофическая функция хищного зоопланктона учитывает избирательность питания, определяемую коэффициентами  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Эффективность питания зоопланктона –  $\alpha$ , а убыль происходит по причине естественной смертности со скоростями  $m_1, m_2$  и выедания хищного зоопланктона либо себе подобными, либо рыбами ( $\delta Z_2^2$ ).

Численный анализ модели показал, что в системе возможно образование стационарных пространственных структур (Тьюрингова неустойчивость). На рисунке 1а представлена пространственно-временная динамика фитопланктона без учета вертикальных миграций зоопланктона и влияния света. Пространственная координата нормирована при  $X=100$  м. Динамику вертикальных профилей фитопланктона с учетом затухания света демонстрирует рисунок 1б, на рис 1в – динамика с учетом влияния света и активных перемещений зоопланктона.

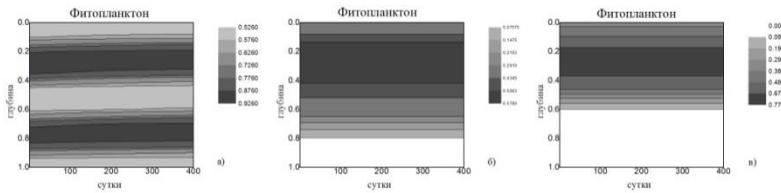


Рисунок 1 – Динамика плотности фитопланктона

В варианте без учета пространственной неоднородности среды и перемещений зоопланктона образуется стационарное пространственное распределение фитопланктона с пиками биомассы на глубинах 30 м и 80 м. При учете влияния света максимум биомассы на глубине 30 метров сохраняется, после чего наблюдается сокращение биомассы, и после 80 метров фитопланктона уже практически нет. Добавление суточных миграций зоопланктона концентрирует весь фитопланктон до глубины 60 метров, однако глубина максимальной плотности не меняется.

### Библиографический список

1. Petzold, T. et al. Effects of zooplankton diel vertical migration on a phytoplankton community: a scenario analysis of the underlying mechanisms // *Ecological Modelling*. – 2009. – Vol.220, I.9-10. – P.1358–1368.
2. Cheriton O.M., McManus M.A., Stacey M.T. and Steinbeck J.V. Physical and biological controls on the maintenance and dissipation of a thin phytoplankton layer // *Marine Ecology Progress Series*. – 2009. – Vol. 378. – P. 55–69.

УДК 662.997

### Имитационное моделирование систем солнечного теплоснабжения в реальных климатических условиях

*О.А. Ефремова*  
АлтГУ, г. Барнаул

Солнечная радиация – практически неисчерпаемый и экологически чистый источник энергии. На Землю поступает огромное количество солнечной энергии и до 1,5% всей этой энергии может быть использовано без ущерба для экологической среды. Статья посвящена одной из важнейших тем в области энергетики на нетрадиционных и возобновляемых источниках энергии – оценке основных параметров систем солнечного теплоснабжения с помощью математического и компьютерного моделирования.

Солнечное теплоснабжение (т.е. использование солнечной энергии для горячего водоснабжения и отопления в жилищно-коммунальной и производственной сферах) получило в мировой практике большое распространение. Существующие методы расчета систем солнечного теплоснабжения позволяют на основе использования климатической информации, с учетом характеристик применяемого оборудования оценить полезную теплопроизводительность установки за любой период времени. Результатом такой оценки является информация о динамическом поведении и долговременных характеристиках системы.

Для многих задач проектирования солнечных установок и оценки их производительности необходимо вычислить энергию излучения, падающего на наклонную поверхность солнечного коллектора, на основе данных о солнечном излучении, поступающем на горизонтальную поверхность. Вычислить отношение потоков прямого солнечного излучения, падающего на наклонную и горизонтальную поверхности можно с помощью выражения:

$$R_b = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_z}, \quad (1)$$

где  $\theta$  – угол падения прямого солнечного излучения (угол между направлением падающего излучения и нормалью к поверхности),  $\theta_z$  – зенитный угол (угол между вертикалью и направлением на Солнце, т.е. угол падения прямого солнечного излучения на горизонтальную поверхность).

Излучение, падающее на поверхность, установленную под углом  $\beta$  к горизонту, вычисляется по формуле:

$$I_T = I_b R_b + I_d \left( \frac{1 + \cos \beta}{2} \right) + I \rho_g \left( \frac{1 - \cos \beta}{2} \right), \quad (2)$$

где  $I_b$  поток прямого излучения,  $I_d$  поток рассеянного и  $I \rho_g$  поток отраженного от земной поверхности излучения,  $\rho_g$  – коэффициент диффузного отражения.

Плотность потока солнечной радиации, поглощаемой пластиной коллектора в некоторый момент времени, равна произведению плотности потока падающей радиации  $I_T$ , пропускательной способности системы прозрачных покрытий коллектора  $\tau$  и поглощательной способности пластины коллектора  $\alpha$ . Обе последние величины зависят от материала и угла падения солнечного излучения. При анализе солнечного коллектора часто используется понятие приведенной поглощательной способности ( $\tau\alpha$ ), которую следует рассматривать как свойство системы «покрытие – поглощающая панель», а не как произведение значений двух свойств.

Существует несколько подходов к определению характеристик коллектора. На одном краю крайне детальные модели, включающие в себя все конструктивные особенности коллектора (толщину панели, расстояние между трубами, количество и материал покрытий, толщину тыльной и боковой теплоизоляции и т.д.) На другом краю располагаются модели, содержащие лишь два параметра: один, показывающий как коллектор поглощает излучение, и второй – как он теряет тепло. Такая модель описывается уравнением (3) – полезная энергия, отводимая от коллектора, является разностью между количеством солнечной энергии, поглощенной пластиной коллектора, и количеством энергии, теряемой в окружающую среду:

$$Q_u = F_R A [I_T (\tau\alpha) - U_L (T_i - T_a)], \quad (3)$$

где  $A$  – площадь коллектора,  $\text{м}^2$ ;  $F_R$  – коэффициент, связанный с эффективностью переноса тепла от пластины коллектора к жидкости, отводящей тепло;  $U_L$  – полный коэффициент тепловых потерь коллектора,  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ ;  $T_i$  – температура жидкости на входе в коллектор,  $^\circ\text{C}$ ;  $T_a$  – температура окружающей среды,  $^\circ\text{C}$ .

При известных параметрах коллектора, объеме и коэффициенте тепловых потерь бака, величине нагрузки и заданных климатических данных температура в баке-аккумуляторе может быть вычислена с помощью уравнения:

$$m C_p \frac{dT_s}{dt} = Q_u - L_s - (UA)_s (T_s - T_a), \quad (4)$$

где  $Q_u$  и  $L_s$  – потоки энергии, поступающей от коллектора и отводимой к потребителю,  $T_s$  и  $T_a$  – температура воды в баке и температура окружающей среды,  $m$  – масса воды в баке,  $C_p$  – удельная теплоемкость воды.

Уравнениями (3) и (4) описываются два ключевых компонента системы солнечного теплоснабжения: солнечный коллектор и аккумулятор тепла. Модели отдельных компонент могут быть объединены в комплексную модель системы, структурная схема которой представлена на рисунке 1 [1–3].



Рисунок 1 – Структурная схема модели солнечного теплоснабжения

На рисунках 2 и 3 приведены графики, построенные по результатам расчетов данной модели. При расчетах температура окружающего воздуха в течение дня изменялась от  $7\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ , бак находился в помещении при температуре окружающего воздуха  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ , плотность потока солнечного излучения вычислялась в условиях ясного неба.

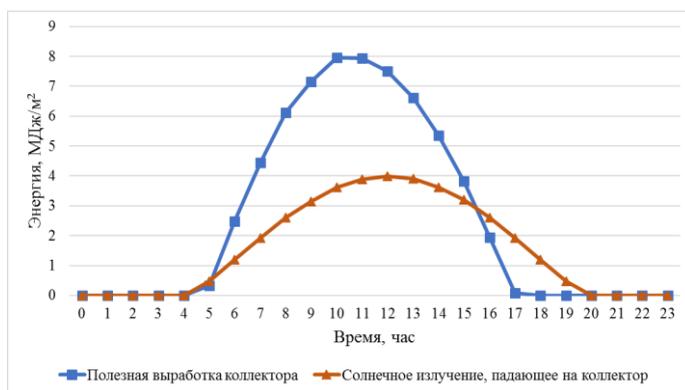


Рисунок 2 – Зависимость полезной выработки коллектора от поглощенного излучения

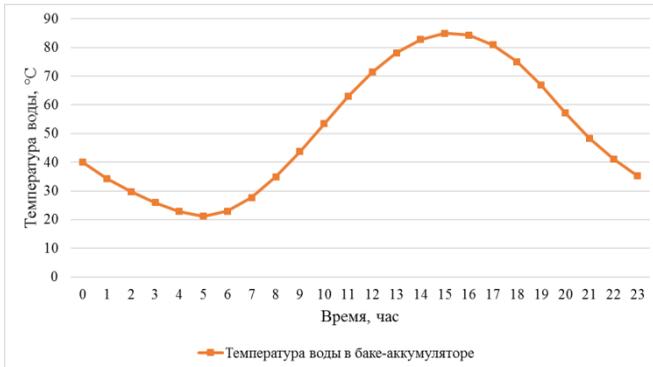


Рисунок 3 – Изменение температуры воды в баке-аккумуляторе в течение дня

### Библиографический список

1. Ефремова О.А. Методы и модели расчета систем солнечного теплоснабжения в реальных климатических условиях // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: материалы III научно-практич. всеросс. конф. молодых ученых. Тольятти, 2017. – С. 177–181.
2. Ефремова, О.А. Моделирование тепловых процессов с использованием солнечной энергии в климатических условиях Алтайского края // Сб. тр. всеросс. конф. по математике «МАК-2017». – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2017. – С. 296–299.
3. Ефремова О.А., Хворова Л.А. Математическое моделирование систем солнечного теплоснабжения // Известия АлтГУ. – 2017. – №4 (96). – С. 98–103

УДК 51-76.57.036

### Моделирование зависимости ширины годовичных колец деревьев от климатических условий

*В.В. Журавлева, Т.В. Барсукова*  
АлтГУ, г. Барнаул

Исследования годовичных колец и их зависимости от климатических и экологических условий активно проводятся российской научной школой Е.А. Ваганова [1], сформировавшейся в Институте леса им. В.Н. Сукачева, а также и другими научными коллективами, в том чис-

ле в Алтайском госуниверситете [2, 3]. Обширная база исследований данной темы позволяет изучить многие ее направления.

Цель данного исследования: изучить влияние климатических условий на прирост ширины годичных колец. Задачи: 1) изучение основных аспектов проблемы; 2) анализ алгоритмов имитационной модели.

Формирование годичных слоев проходит три временных этапа [1]. На первом этапе в стволе дерева формируются годичные слои, отражающие интенсивный рост, и площадь слоев с каждым годом увеличивается. Третий этап характеризуется возрастным замедлением роста, что сказывается на снижении площади прироста. Рост на втором этапе обусловлен существенными изменениями внешних и внутренних воздействий, к которым можно отнести естественные климатические изменения, конкуренцию внутри древесного сообщества, пожары, плодоношение.

При создании любой модели одним из главных вопросов выступает выбор главных факторов. Самые доступные климатические данные – температура, освещение и осадки. Данный набор факторов в большой степени определяет интенсивности роста и развития растений, независимо от их вида [4–6].

В имитационной модели Ваганова-Шашкина (VS-model) [7–8] рост годичного кольца – увеличение численности клеток в одном клеточном ряду в результате делений клеток камбиальной зоны ствола дерева. Скорость роста клеток зависит от расположения клетки в камбиальной зоне, от фазы клеточного цикла и от совокупного действия внешних по отношению к камбию факторов.

VS-model является сложным инструментом, требующим значительного количества параметров модели (25 параметров используются для оценки интегральной скорости роста годичных колец, 17 параметров необходимы для расчета производства и размеров клеток), которые должны быть адекватно оценены для каждого местообитания древесных растений.

На основе VS-model учеными из Национального Центра Экологической Информации (NOAA) штата Аризона разработана модель роста деревьев, называемая Ваганов-Шашкин-Лайт (VS-Lite) [9]. В качестве входных данных требуется только широта тест-полигона и месячные значения температуры и количества осадков. Также в ней отсутствует блок расчета камбиальной активности, а число параметров равно 12. Данная модель была протестирована в среде Matlab 6.0 на реальных данных. На выходе была получена смоделированная ширина годичных колец, а также график, на котором изображены реальные данные по ширине годичных колец и расчетные данные (рисунк 1).

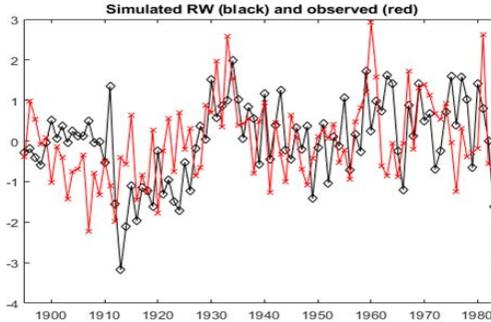


Рисунок 1 – График значений реальных данных по ширине годичных колец (красная линия) и расчетных данных (черная линия)

Таким образом, сделаем вывод, что несмотря на некоторые упрощения по сравнению с полной VS-моделью, модель VS-Lite способна уловить взаимосвязь климата и прироста дерева в ширину.

### Библиографический список

1. Ваганов Е.А., Шашкин А.В. Рост и структура годичных колец хвойных. – Новосибирск: Изд-во «Наука», 2000. – 232 с.
2. Малышева Н.В. Дендроиндикационные исследования ленточных боров Алтайского края: автореф. дис. ... канд. геогр. наук. – Барнаул, 2010. – 21 с.
3. Малышева Н.В., Быков Н.И. Дендроклиматический анализ ленточных боров Западной Сибири. – М.: Известия РАН, 2011. – №6. – С. 68–77.
4. Журавлева В.В. Математические модели процессов регуляции в физиологии растений // Известия АГУ. – Барнаул, 2008. – №1(57). – С. 43–57.
5. Журавлева В.В. Математическое моделирование процессов накопления биомассы С3-растений в процессе вегетации: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Барнаул. – 2008. – 120 с.
6. Журавлева В.В. Моделирование процессов фотосинтеза и фотодыхания С3-растений // Математическая биология и биоинформатика. – 2015. – Том 10. Вып. 2. – С. 482–507. doi: 10.17537/2015.10.482.
7. Тычков И.И., Коюпченко И.Н., Ильин В.А., Шишов В.В. Визуальная параметризация имитационной модели Ваганова-Шашкина и ее применение в дендрохронологических исследованиях. – Журнал СФУ, 2015. – №8. – С. 475–491.

8. Тычков И.И., Попкова М.И., Николаев А.Н., Шишов В.В. Параметры роста деревьев на основе модели Ваганова-Шашкина в Центральной Сибири. – Красноярск: Вестник СВФУ, 2015. – №6. – С. 39–52.

9. Susan E. Tolwinski-Ward, Michael N. Evans, Malcolm K. Hughes, Kevin J. Anchukaitis An efficient forward model of the climate controls on interannual variation in tree-ring width. – *Climate Dynamics*, 2011. Vol. 36, Issue 11–12. – P. 2419–2439.

## УДК 504

### Определение валового выброса вредных веществ от автотранспорта на окружающую среду города Усть-Каменогорска

*Е.А. Кайырбеков, Ф.С. Аменова*

*ВКГУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан*

Оценивается объем энергоэкологического воздействия автотранспортных потоков на регулярном клеточном разбиении территории города Усть-Каменогорска. Предполагается, что в автотранспортных потоках участвует весь автопарк, равномерно распределенный по улично-дорожной сети.

Для начала наложим равномерную сетку на карту города, и используем клеточные функции улично-дорожной сети города Усть-Каменогорска, полученные в каждом квадрате разбиения.

Наложим на область сетку разбиения  $\Delta$  шагом 2 км.

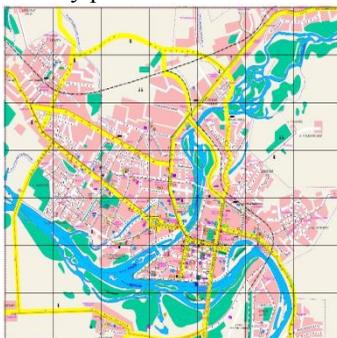


Рисунок 1 – Регулярное разбиение  $\Omega = \text{supr} \Delta_1$  (4 кв.км) территории г. Усть-Каменогорска

Применяя алгоритм построения клеточной функции, получим протяженности улично-дорожной сети в полосах [1].

В городе Усть-Каменогорске существуют три категории дорог: трех полосные в одном направлении (пр. Независимости, пр. Абая и т.д.); двух полосные в одном направлении (ул. Потанина, ул. Бурова и т.д); однополосные в одном направлении.

Таблица 1 – Клеточная функция протяженности дорог по полосам (метр)

8600	15800	8800	12000	8600	21700	13600
30800	23000	0	16000	30700	0	0
21600	30400	22400	26200	21400	1800	3000
15400	31000	38600	34900	26400	12600	1400
14000	24000	29000	39100	31200	25500	17600
8000	0	12400	24700	34900	19800	0
11400	8200	15000	8200	18000	18800	12400

Рассмотрим усредненные характеристики автотранспортных потоков. Общее количество автомобилей в автопарке города  $M_{a.п.}=55938$ ; Общая длина протяженности улично-дорожной сети по полосам  $L_{д}=848,9$  км;

Предполагаем, что состав автопарка является однородным, состоящим из легковых автомобилей с бензиновыми и карбюраторными двигателями (ВМ1), средняя длина одного автомобиля  $L_{базы}=5$  м.



Рисунок 2 – Состав автопарка г. Усть-Каменогорска, %

Для обоснования этого предположения заметим, что легковые автомобили составляют преобладающую часть автопарка Усть-Каменогорска, что видно из диаграммы на рисунке 2.

Тогда максимально возможная плотность на сети при равномерном распределении:

$$\rho = \frac{M_{a,n}}{L_d} = \frac{55938}{848,9} = 65,89469 \left( \frac{АТС}{км} \right)$$

Тогда клеточная функция, соответствующая количеству машин в каждой клетке  $A_{ij}$ , показана в таблице 2 (при условии равномерного распределения количества автомобилей).

Таблица 2 Клеточная функция количества машин

566,6943	1041,136	579,8732	790,7362	566,6943	1429,915	896,1677465
2029,556	1515,578	0	1054,315	2022,967	0	0
1423,325	2003,198	1476,041	1726,441	1410,146	118,6104	197,6840617
1014,778	2042,735	2543,535	2299,725	1739,62	830,2731	92,25256214
922,5256	1581,472	1910,946	2576,482	2055,914	1680,315	1159,746495
527,1575	0	817,0941	1627,599	2299,725	1304,715	0
751,1994	540,3364	988,4203	540,3364	1186,104	1238,82	817,0941218

Характеристики автотранспортных потоков клетки однозначно определяются ее функцией состояния. В свою очередь, функция состояния зависит от следующих параметров:  $m$  – кратность узлов,  $q$  – времени красного сигнала светофора и  $l$  – расстояние между светофорами.

По правилам дорожного движения в населенном пункте максимальную скорость берем 60 км/час. и закон «плотность-скорость» на одной полосе дороги является квадратичным.

Тогда, учитывая, что максимальная плотность автотранспортных потоков на одной полосе  $\rho_{\max}=140$  АТС/км, получим:

$$f(\rho) = g_{\max} \left( \frac{\rho_{\max} - \rho}{\rho_{\max}} \right)$$

доля среднего зеленого сигнала светофора:  $v = \frac{T}{m}$ .

Тогда в качестве функции состояния для дорог со светофорами примем формулу:

$$g(\rho) = (T - v)f(\rho l) + vf(\rho).$$

Здесь  $l$  – длина перегона между светофорами;

$T$  – период регулирования светофора;

$v$  – доля зеленого света;

$\rho = \frac{АТС}{l}$  – плотность свободного движения;

$m$  – количество АТС на перегоне.

$\rho l = \frac{l * \rho}{l - f(\rho) * T * (T - T/n)}$  – плотность перегона со светофорами.

Учитывая, матрицу распределения длин улично-дорожной сети по клеткам и среднюю скорость автотранспортных потоков получаем, плотности потоков в каждой клетке каждого часа суток.

Считая что, все автотранспортные средства с карбюраторными двигателями, оцениваем расход топлива за час на каждой клетке. После по сеточной функции мы можем определить, что по городу средний расход топлива  $Q=53671,05$  л/час.  $\approx 39716,58$  кг/час.

Расход топлива по городу за сутки – 519161,8 кг/сут.

Расход топлива по городу за год - 189494,0713 т/год.

По техническим характеристикам и по расходу топлива можно вычислить на каждый вид транспортных средств выбросы вредных веществ.

Учитывая интенсивности транспортных средств в течении суток можно вычислить общее количество выбросов за сутки и за год.

Таким образом валовый выброс вредных веществ от автомобильного транспорта города Усть-Каменогорска составляет 52,340 тысяч тонн в год.

### **Библиографический список**

1. Мадияров М.Н. Геоинформационная система для моделирования процесса загрязнения воздушного бассейна промышленного города // Вестник инженерной академии Республики Казахстан. – Алматы, 2007. №3(25). – С. 18–23.

## **УДК 004**

### **Моделирование гидротермического режима системы «почва – приземный слой воздуха»**

***Ю.О. Карлова**  
АлтГУ, г. Барнаул*

В современных условиях изменяющегося климата изучение гидротермического состояния почв приобретает особую актуальность. Возрастающая частота аномальных явлений (ливни, засуха) заставляет по-новому взглянуть на проблемы тепло- гидрофизики почв. На территории Алтайского края встречаются различные сочетания природных факторов, которые обусловили формирование многих типов почв, различающихся по своим свойствам. При таком разнообразии почвенных условий необходимо дифференцированно, и, в тоже время, комплексно подходить к разработке и применению агромелиоративных технологий, направленных на рациональное использование, сохранение и по-

вышение плодородия почв. Научное обоснование и эффективное применение этих мероприятий возможно лишь на основе изучения почвенного покрова, и прежде всего, комплекса тепло- и гидрофизических свойств почв и их гидротермических режимов [1–3].

Тепло и влага определяют жизнедеятельность почвенных микроорганизмов, динамику в почве питательных элементов, разложение растительных остатков, миграцию почвенных растворов и газов, интенсивность питательного режима растений и протекания эвапотранспирации, отвечают за рост и развитие корневой системы растений, тем самым, определяя урожайность возделываемых культур.

Уравнение теплопереноса в одномерном случае описывается формулой (1):

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial y} \right), y \in [0, H]. \quad (1)$$

где  $T$  – температура почвы, °C,  $\rho(x)$  – плотность почвы, г/см<sup>3</sup>,  $c(w(x))$  – теплоемкость, Дж/(г · град°С),  $\chi$  – коэффициент теплопроводности, зависящий от влажности почвы  $w$ :  $\chi = \chi(w(x))$ , Дж/(м · с · К).

В уравнении теплопереноса (1) коэффициенты теплоемкости и теплопроводности зависят от влажности почвы, для определения которой была выбрана относительно простая модель, предполагающая: 1) отсутствие электрического поля, 2) изотермию вдоль потока и 3) постоянство концентрации растворенных веществ:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(W) \frac{\partial W}{\partial x} \right]; \quad (2)$$

здесь  $W$  – влажность в долях единиц,  $x$  – глубина почвенного профиля,  $t$  – время,  $D(W)$  – коэффициент диффузивности.

Уравнение (2) получено на основе анализа механизма диффузии в пористом массиве, когда учитывается возникновение потоков влаги под действием градиента капиллярного давления.

Результаты численных расчетов влажности и сравнение ее с фактическими данными приведено на рисунке 1. Как видно из графика модель дает достаточно удовлетворительные результаты.



Рисунок 1 – Влажность почвы, 2002 год

Для расчета температуры на поверхности почвы возникла необходимость разработки блока радиационного режима, а именно моделей КВР и ДВР [4, 5].

Температурный максимум на поверхности почвы наблюдается во время нахождения солнца в зените, температурный минимум – утром. Поэтому для расчета температуры на поверхности почвы в дневное время использовали значения КВР, в ночное – значения ДВР.

Солнечная радиация, приходящая на горизонтальную поверхность земли, рассчитывается по формуле (3):

$$R_c = \left( a_{sn} + b_{sn} \frac{n}{N} \right) R_a, \quad (3)$$

$N$  – длительность светового дня, час;  $n$  – продолжительность солнечного сияния, час;  $R_a$  – солнечная радиация, приходящая к границе атмосферы, Дж/м<sup>2</sup>с;  $a_{sn}$ ,  $b_{sn}$  – эмпирические коэффициенты, определяемые в процессе идентификации модели для каждого региона.

Для расчета максимальной температуры на поверхности почвы было получено универсальное уравнение линейной регрессии (4), независимыми переменными в котором выступали значения  $t_{max}^{возд}$  – температура воздуха и  $R_c$  – величина коротковолновой радиации (КВР):

$$t_{max} = 1,098645 \cdot t_{max}^{возд} + 0,026481 \cdot R_c + 1,974362. \quad (4)$$

Универсальность уравнения заключается в том, что оно было получено по ежедневным данным вегетационных периодов 2000–2006 годов для черноземов с суглинистой и тяжелосуглинистой структурой, восстанавливающее значение максимальных температур на поверхности почвы. Уравнение регрессии (4) построено по 670 исходным данным. Погрешность расчетов составила 9,5%. Апробация уравнения (4) была осуществлена на 2007–2010 годах.

Как видно из результатов (рисунок 2), уравнение (4) дает вполне приемлемую погрешность.

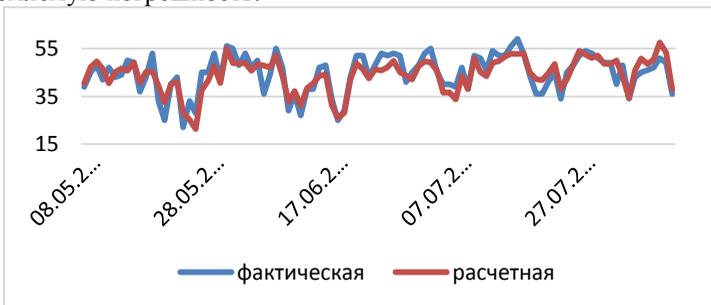


Рисунок 2 – Максимальная температура поверхности почвы, 2008 год

В связи с отсутствием данных для расчета ДВР, которая зависит от температуры водяного пара вблизи от земной поверхности (на высоте 1,5–2 мм) и средней облачности за месяц, а также фактических значений ДВР, было принято решение построить уравнение линейной регрессии (5), независимыми переменными в котором выступали значения  $t_{\text{вод.пара}}$  – температура водяного пара и  $\sigma$  – облачность:

$$t_{\text{min}} = 0.946183 \cdot t_{\text{вод.пара}} - 0.05549 \cdot \sigma + 2.784217 \quad (5)$$

Коэффициент детерминации равен 0.939261. Данная величина указывает на сильную зависимость между независимыми переменными  $t_{\text{вод.пара}}$ ,  $\sigma$  и фактической минимальной температурой поверхности почвы. Как видно из результатов (рисунок 3), уравнение (5) дает вполне приемлемую погрешность.



Рисунок 3 – Минимальная температура на поверхности почвы, 2007 год

### Библиографический список

1. Хворова Л.А., Жариков А.В. Численное моделирование составляющих теплового режима почв Алтайского Приобья // Известия АлтГУ. – 2013. – № 1/2. – С. 126–130.
2. Кирста Ю.Б., Кузиков С.С., Хворова Л.А. Имитационное моделирование влагообмена в почвах Сибирского региона // Обской вестник. – 1997. – №2-3. – С. 79–81.
3. Хворова Л.А. Методы исследования чувствительности моделей продуктивности агроэкосистем // Известия АлтГУ. – 2013. – № 1-1 (77). – С. 128–132.
4. Хворова Л.А., Брыксин В.М., Скобова Т.С. Моделирование теплового режима почвы с учетом приходящей длинноволновой радиации // Известия АлтГУ. – 2005. – № 1 (45). – С. 74–77.

5. Хворова Л.А., Журавлева В.В., Плинокосова Л.Н., Гриценко А.А. Результаты анализа и компьютерного тестирования блоков радиации и фотосинтеза // Известия АлтГУ. – 2001. – № 1. – С. 61–65.

**УДК 574.34:575.174.4**

### **Влияние оптимального промысла на менделевскую лимитированную популяцию**

*Е.А. Колбина<sup>1</sup>, Е.Я. Фрисман<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток;*

*<sup>2</sup>ИКАРП ДВО РАН, г. Биробиджан*

В большой серии современных исследований отмечено почти катастрофическое снижение эффективной численности популяций и потеря генетического разнообразия в результате антропогенного воздействия. Причем эти негативные для биологических видов тенденции наблюдаются не только в промышляемых популяциях (например, изменение генетической структуры порообразующих деревьев при восстановлении лесов после вырубки), промысловых видов рыб, но и в популяциях, которые явно не эксплуатируются, а испытывают на себе влияние антропогенного воздействия за счет фрагментации и сокращения среды обитания (например, генетические изменения в популяции саламандры). Окончательное решение вопроса, что происходит с адаптивной изменчивостью видов на фоне антропогенного воздействия, не является очевидным и тоже привлекает интерес исследователей.

Целью работы является описание и исследование наиболее простой модельной ситуации, в которой проявляются закономерности взаимосвязанных изменений динамики генетической структуры и численности популяций, вызванных взаимодействием эволюционных (в основном селективных) и экологических (ограничивающих популяционный рост) факторов, включая эффекты промыслового воздействия на эксплуатируемые популяции. В качестве такой модельной системы рассматривается диплоидная менделевская панмиктичная популяция, генетическое разнообразие в которой контролируется одним диаллельным локусом, экологическое лимитирование сводится к убывающей зависимости приспособленности от численности, а воздействие промысла - к изъятию части особей.

Введем обозначения:  $x_n$  – численность популяции в  $n$ -ом поколении,  $q_n$  – частота аллеля  $A$  в  $n$ -ом поколении (следовательно,  $(1 - q_n)$  –

частота аллеля а),  $W_{AA}(n)$ ,  $W_{Aa}(n)$ ,  $W_{aa}(n)$  – приспособленности генотипов AA, Aa, aa – соответственно в n-ом поколении. Изменение численности и генетической структуры популяции описывается следующей системой рекуррентных уравнений [1]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \bar{W}_n(x_n)x_n \\ q_{n+1} = q_n(W_{AA}(x_n)q_n + W_{Aa}(x_n)(1-q_n)) / \bar{W}_n(x_n), \end{cases} \quad (1)$$

где  $\bar{W}_n = W_{AA}(x_n)q_n^2 + 2W_{Aa}(x_n)q_n(1-q_n) + W_{aa}(x_n)(1-q_n)^2$  – средняя приспособленность популяции в n-ом поколении. Будем полагать, что приспособленности зависят от численности линейно  $W_{ij} = 1 + R_{ij} - \frac{R_{ij}}{K_{ij}}x$ .

Соответственно каждый генотип характеризует его ресурсный ( $K_{ij}$ ) и мальтузианский ( $R_{ij}$ ) параметры. Для упрощения выкладок, введем дополнительное предположение, что все генотипы имеют одинаковую приспособленность при некотором значении численности популяции (равном  $x^*$ ).

Условия существования и разрушения генетического полиморфизма модели (1), а так же результаты исследования ее динамического поведения приведены в работах [2] и [3].

Введем в модель (1) промысел с долей изъятия  $u$ :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \bar{W}_n (1-u) \\ q_{n+1} = q_n (W_{AA}q_n + W_{Aa}(1-q_n)) / \bar{W}_n, \end{cases} \quad (2)$$

где  $R = Ux_n \bar{W}_n$  – величина изъятия,  
 $\bar{W}_n = W_{AA}q_n^2 + 2W_{Aa}q_n(1-q_n) + W_{aa}(1-q_n)^2$ .

Оптимальный равновесный уровень численности  $\bar{x}_m$ , обеспечивающий максимальный равновесный уровень изъятия, однозначно определяется уравнением  $\bar{W} = 1 - \bar{x}_m \cdot \bar{W}'_x$ .

Найдены равновесные значения численности и частоты аллеля А модели (2), обеспечивающие максимальный объем изъятия [4, 5]. Определены условия их существования и устойчивости при оптимальном промысле (таблица 1). Показано, что в состоянии, обеспечивающем максимальный уровень изъятия, значение генетического состава остается таким же, как и в случае, когда промысел отсутствует, а равновесное значение численности снижается в два раза. Также показано, что при линейном виде функций приспособленностей и при описанных соотношениях параметров модели в равновесии генетический со-

став популяции не зависит от ее численности. Показано, что условия существования равновесных значений в целом при отсутствии промысла и при его воздействии одинаковы.

Таблица 1 – Равновесные точки модели, подверженной промыслу, условия их существования и устойчивости

<p>Ia)  <math>x^* &lt; K_{Aa} &lt; K_{AA}</math>,  <math>x^* &lt; K_{Aa} &lt; K_{aa}</math></p>	<p>Если <math>x^* &lt; \bar{X}_M</math>, то при постоянной доле изъятия мономорфные состояния устойчивы при любых параметрах модели, при переменной доле изъятия</p> $\bar{q} = 0 \text{ устойчиво при: } -1 - \frac{R_{aa}}{2} < \alpha < 3 + \frac{R_{aa}}{2} + \frac{4}{R_{aa}} \quad (3)$ $\bar{q} = 1 \text{ устойчиво при: } -1 - \frac{R_{AA}}{2} < \alpha < 3 + \frac{R_{AA}}{2} + \frac{4}{R_{AA}} \quad (4)$ <p>Полиморфное состояние неустойчиво при любом промысле.</p> <p>Если <math>x^* &gt; \bar{X}_M</math>, то мономорфные состояния неустойчивы при любом промысле; полиморфное состояние при промысле с постоянной долей изъятия устойчиво при любых параметрах системы, при переменной доле изъятия устойчиво при: <math>-\bar{W} &lt; \alpha &lt; \frac{\bar{W} + 1}{\bar{W} - 1}</math> (5)</p>
<p>Ib) <math>K_{Aa} &lt; K_{AA} &lt; x^*</math>  <math>K_{Aa} &lt; K_{aa} &lt; x^*</math></p>	<p>Если <math>x^* &gt; \bar{X}_M</math>, то при постоянной доле изъятия мономорфные состояния устойчивы при постоянной доле изъятия, при переменной доле изъятия - при (3) – (4).          Полиморфное состояние неустойчиво.</p>
<p>II) <math>K_{aa} &lt; K_{Aa} &lt; K_{AA}</math>          или  <math>K_{AA} &lt; K_{aa} &lt; K_{Aa}</math></p>	<p>Полиморфное состояние не существует.</p> <p>Если <math>\bar{X}_M</math> и ресурсные параметры находятся по одну сторону от <math>x^*</math>, то устойчиво то мономорфное состояние, ресурсный параметр которого больше при постоянной доле изъятия, для переменной доли изъятия - при условиях (3) – (4).</p> <p>Если <math>\bar{X}_M &lt; x^*</math>, а ресурсные параметры <math>&gt; x^*</math>, то устойчиво то мономорфное состояние, ресурсный параметр которого минимален при постоянной доле изъятия, для переменной доли изъятия - при условиях (3) – (4).</p>
<p>IIIa)  <math>K_{Aa} &gt; K_{AA} &gt; x^*</math>  <math>K_{Aa} &gt; K_{aa} &gt; x^*</math></p>	<p>Если <math>x^* &lt; \bar{X}_M</math>, то полиморфное состояние устойчиво при постоянной доле изъятия, при условии (5) для переменной доли изъятия. Мономорфные состояния неустойчивы.</p> <p>Если <math>x^* &gt; \bar{X}_M</math>, полиморфное состояние неустойчиво, мономорфные состояния устойчивы при постоянной доле изъятия, при переменной доле изъятия - при (3) – (4).</p>
<p>IIIb)  <math>x^* &gt; K_{Aa} &gt; K_{AA}</math>  <math>x^* &gt; K_{Aa} &gt; K_{aa}</math></p>	<p>Если <math>x^* &gt; \bar{X}_M</math>, то полиморфное состояние устойчиво при постоянной доле изъятия, для переменной доли изъятия при условии (5). Мономорфные состояния неустойчивы.</p>

Численное исследование влияния промысла с постоянной долей изъятия на динамику популяции показало, что промысел при любой оптимальной доле изъятия ведет к стабилизации численности и частоты аллеля А. Промысел с переменной долей изъятия может вызвать колебания численности, а при определенных начальных условиях – даже привести к вымиранию популяции. Кроме того, показано, что оптимальный промысел может привести к изменению генетического разнообразия в случае, если какая-либо из оптимальных долей изъятия переведет равновесную численность через  $x^*$ . Таким образом, промысел может привести к изменениям результатов отбора и вызвать разрушение или способствовать поддержанию полиморфизма.

### **Библиографический список**

1. Ратнер В.А. Математическая популяционная генетика (элементарный курс). – Новосибирск: Наука, 1977.
2. Жданова О.Л., Колбина Е.А., Фрисман Е.Я. Проблемы регулярного поведения и детерминированного хаоса в математической модели эволюции менделевской лимитированной популяции // Дальневосточный математический журнал. – Владивосток: Дальнаука, 2003. – Т. 4, № 2. – С. 289–303.
3. Жданова О.Л., Фрисман Е.Я. Динамические режимы в модели однолокусного плотностно-зависимого отбора // Генетика. 2005. – Т. 41, №11. – С. 1575–1584.
4. Жданова О.Л., Колбина Е.А., Фрисман Е.Я. Влияние промысла на генетическое разнообразие и характер динамического поведения менделевской лимитированной популяции // ДАН. 2007. –Т. 412, №4. – С. 564–567.
5. Фрисман Е.Я., Жданова О.Л., Колбина Е.А. Влияние промысла на генетическое разнообразие и характер динамического поведения менделевской лимитированной популяции // Генетика. – М.: Наука, 2010. – Т. 46, № 2. – С. 272–281.

### **УДК 519.8**

## **Изучение пространственно-временного распределения хлорофилла «а» в Беринговом море на основе спутниковых данных**

*Е.А. Колбина, А.И. Абакумов*  
<sup>1</sup>*ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток*

Одним из параметров, позволяющих оценить состояние экосистем океана, является концентрация хлорофилла «а» – основного пигмента

клеток фитопланктона, обеспечивающего процесс фотосинтеза. От его количества и интенсивности функционирования зависит величина фотосинтетической первичной продукции – скорости продуцирования органического вещества в процессе фотосинтеза, которая определяет общую биопродуктивность океана.

Для наблюдения фитопланктона (точнее «хлорофилла-а») и его пространственного распределения из космоса разработаны специальные датчики – сканеры цвета моря, такие как SeaWiFS (Sea-viewing Wide Field-of-View Sensor) на спутнике Seastar, а также спектрорадиометры MERIS (Medium Resolution Imaging Spectrometer) на ИСЗ Envisat и MODIS (Moderate Resolution Imaging Spectrometer) на ИСЗ Aqua и Terra.

Регулярность сбора данных по всей площади Мирового океана позволяет выделять особенности динамики хлорофилла «а» на различных акваториях, проводить их сравнение, выявлять многолетние тенденции изменения. Результаты спутникового мониторинга не содержат прямой информации о фитопланктоне, но дают возможность судить о его состоянии на основе показателей содержания хлорофилла в верхнем водном слое океана.

Мониторинг распределения концентрации хлорофилла имеет важное практическое значение для рыболовства, поскольку фитопланктон – это кормовая база зоопланктона и рыб.

Для исследования выбран район, ограниченный координатами 45°-75° с.ш., 160° в.д.–155° з.д. В этот район входит Берингово море (рисунок 1). Берингово море богато питательными веществами для фитопланктона, вся пищевая цепочка достаточно биологически разнообразна, отдельные районы моря обильны разными видами рыб. Выбран открытый район, позволяющий проанализировать закономерности формирования нижних трофических уровней морской экосистемы.

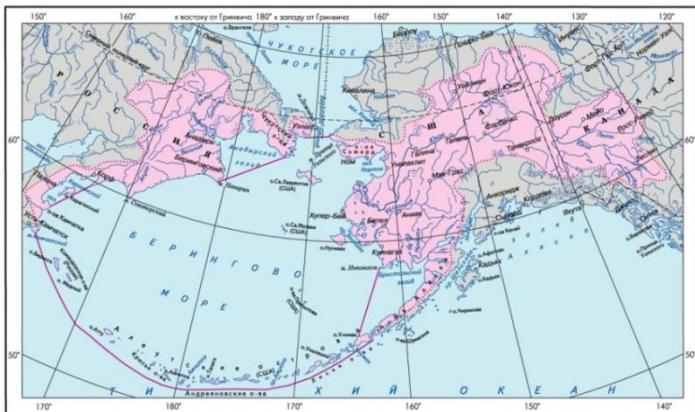


Рисунок 1 – Бассейн Берингова моря

Из спутниковых данных используются концентрация хлорофилла, температура и освещенность на поверхности. Обработаны данные мая 2014 г. Размер пространственной ячейки (точки) – 4 x 4 км, временной интервал – 1 сут.

Построены усреднения спутниковых характеристик по пространству (поверхности моря, рисунок 2) и времени. Если усреднения по пространству обладают малой вариабельностью по времени, то усреднения по времени высокодинамичны в зависимости от пространственных координат.

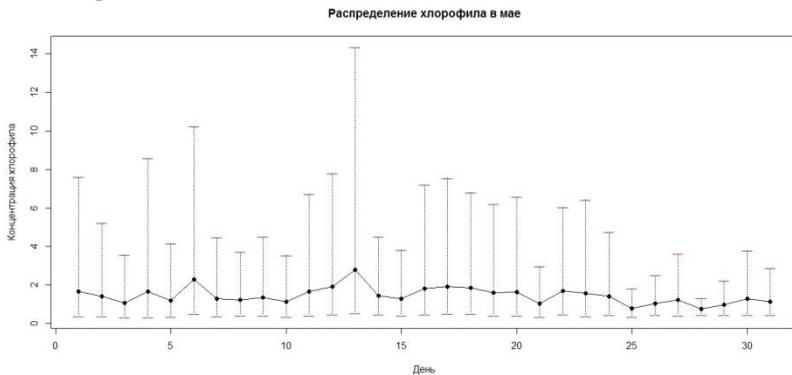


Рисунок 2 – Усреднение спутниковых характеристик по пространству.  
Распределение хлорофилла а, мг/м<sup>3</sup>

Результаты сравниваются с подобными исследованиями в Охотском и Японском морях. Предполагается переход к оценкам бипродук-

тивности Берингова моря по спутниковой информации с применением математических моделей динамики планктона.

**УДК 004**

## **Методы и подходы глубокого обучения в изучении сахарного диабета у детей и подростков**

***О.С. Кротова<sup>1</sup>, Л.А. Хворова<sup>1</sup>, А.И. Пиянзин<sup>1,2</sup>***  
*<sup>1</sup>АлтГУ, г. Барнаул, <sup>2</sup>АГМУ, г. Барнаул*

Сахарный диабет является одним из наиболее распространенных хронических заболеваний, и с каждым годом все чаще встречается у детей и подростков [1]. При неправильном и несвоевременном лечении сахарный диабет приводит к появлению осложнений, поражающих различные органы и системы организма человека.

Актуальность и практическая значимость изучения проблем сахарного диабета у детей и подростков определяется быстрым ростом заболеваемости и высокой степенью инвалидизации.

При лечении сахарного диабета большое внимание уделяется стадиям компенсации сахарного диабета – компенсации и декомпенсации. Определение стадий компенсации для врача является долгим и рутинным процессом, поэтому целью исследования служит построение моделей прогнозирования стадий компенсации и декомпенсации сахарного диабета у детей и подростков методами машинного обучения [2].

Информационная база исследования представлена «обезличенными» данными медицинского обследования детей и подростков Алтайского края, страдающих сахарным диабетом. Для построения моделей использовались такие признаки как рост, вес, температура, артериальное давление, частота сердечных сокращений, частота дыхания, стаж заболевания, показатели биохимического анализа крови. Результирующим параметром является стадия компенсации сахарного диабета, который на выходе модели может принимать значения: 0 – компенсация сахарного диабета, 1 – декомпенсация сахарного диабета [3, 4].

Для проведения исследования использовались метод опорных векторов и многослойный перцептрон [5]. Построение моделей производилось на высокоуровневом языке программирования Python [6].

Сравнение и оценка качества построенных моделей осуществлялись с помощью следующих метрик: точность, полнота, F-мера, чувствительность и специфичность.

Значения точности, полноты и F-меры для построенных моделей представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты оценки качества построенных моделей

Модель	Метка класса	Точность	Полнота	F-мера
Метод опорных векторов	0	0.75	0.33	0.46
	1	0.74	0.94	0.83
	total	0.74	0.74	0.71
Многослойный перцептрон	0	0.50	0.33	0.40
	1	0.71	0.83	0.77
	total	0.64	0.67	0.65

В медицинской статистике для анализа данных применяются такие метрики как чувствительность (Se) и специфичность (Sp). Метод исследования считается оптимальным, если он высоко специфичен и высоко чувствителен. Значения этих параметров для метода опорных векторов: Se = 74%, Sp = 33%, для многослойного перцептрона: Se = 71%, Sp = 33%.

Использование построенных моделей позволит улучшить процесс диагностики и лечения сахарного диабета у детей и подростков, избавит врача от долгой и рутинной работы. В дальнейшем планируется исследовать другие состояния заболевания; разработанные программные модули внедрить в медицинские учреждения соответствующего профиля, и создать мобильное приложение, которое позволит вести диалог «ребенок-родители-врач».

### Библиографический список

1. Дедов И.И., Кураева Т.Л., Петеркова В.А., Щербачёва А.Н. Сахарный диабет у детей и подростков. – М.: Универсум Паблишинг, 2002. – 392 с.
2. Хворова Л.А., Брыксин В.М., Гавриловская Н.В., Топаж А.Г. Математическое моделирование и информационные технологии в экологии и природопользовании. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013. – 277 с.
3. Кротова О.С., Хворова Л.А. Применение нейронных сетей для диагностики заболевания сахарным диабетом детей и подростков на территории Алтайского края // МАК: Математики – Алтайскому краю : сборник трудов всерос. конф. по математике. – 2017. – С. 313–316.
4. Пиянзин А.И., Сидун Д.Ю., Назаркина О.М., Хворова Л.А., Маляхова Т.И., Шарлаева Е.А., Левич К.А., Сапкина М.Р., Назаровская О.В. Информационные технологии в оценке липидного обмена у детей и подростков с сахарным диабетом 1 типа // Медицинский алфавит. – 2017. – Т. 3, № 26. – С. 48–49.

5. Флах П. Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных. – М: ДМК Пресс, 2015. – С. 342–355.

6. Рашка С. Python и машинное обучение. – М.: ДМК Пресс, 2017. – 418 с.

## УДК 519.6

### Математическое моделирование температурного режима на границе атмосфера-почва

*М.Н. Мадияров<sup>1</sup>, Л.А. Хворова<sup>2</sup>, М.М. Жанахметова<sup>3</sup>*  
<sup>1,3</sup>ВКГУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан  
 АлтГУ, г. Барнаул, Россия

В данной работе рассматривается уравнение для определения значений температуры на границе раздела атмосфера-почва. Построен алгоритм численного решения данного уравнения и проведены численные эксперименты решения трехмерной модели микроклимата промышленного города, совместно с рассматриваемым уравнением.

Антропогенное воздействие на окружающую среду в первую очередь сказывается на состоянии воздушного бассейна. Загрязнение приземного слоя атмосферы и на сегодня остается актуальной проблемой. Характер течения и рассеивания вредных веществ и их соединений, локально загрязняющих приземный слой воздуха, заметно отличается от этих явлений в свободной атмосфере [1, 2]. При решении задачи микроклимата городов и регионов возникает необходимость постановки граничных условия на температуру в приземном слое атмосферы.

Для определения температуры на границе раздела атмосфера-почва рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k_s \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (1)$$

со следующими граничными условиями

$$G = \lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s;$$

$$G_s - \rho c_p \left( v_\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_0 - \rho L_\omega \left( v_\theta \frac{\partial q}{\partial z} \right)_0 = I_0 (1 - A_s) - F \quad \text{при } z = 0 \quad (2)$$

$$T = T_r \quad \text{при } z = -H_r \quad (3)$$

Построим разностную схему для аппроксимаций уравнения (1):

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left( k_{j+\frac{1}{2}} (T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}) - k_{j-\frac{1}{2}} (T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}) \right) - a_j T_{j+1}^{n+1} + b_j T_j^{n+1} - c_j T_{j-1}^{n+1} = F_j^n; \quad j=1, 2, \dots, m-1 \quad (4)$$

$$a_j = \frac{\tau \cdot k_{j+\frac{1}{2}}}{h_3^2}, \quad b_j = 1 + \frac{\tau \cdot k_{j+\frac{1}{2}}}{h_3^2} + \frac{\tau \cdot k_{j-\frac{1}{2}}}{h_3^2}, \quad c_j = \frac{\tau \cdot k_{j-\frac{1}{2}}}{h_3^2} \quad F_j = T_j^n$$

Разностное уравнение (4) решается методом прогонки:

$$T_j = \beta_j T_{j-1} + \chi_j;$$

При  $j = m$ ,  $T_m = \beta_m T_{m-1} + \chi_m$ , прогоночные коэффициенты определяются следующим образом

$$\beta_m = 0, \quad \chi_m = T_r$$

$$-a_j (\beta_{j+1} T_j + \chi_{j+1}) + b_j T_j - c_j T_{j-1} = F_j$$

$$(a_j \beta_{j+1} + b_j) T_j - c_j T_{j-1} = F_j + a_j \chi_{j+1}$$

$$(a_j \beta_{j+1} + b_j) (\beta_j T_{j-1} + \chi_j) - c_j T_{j-1} = F_j + a_j \chi_{j+1}$$

Рекуррентные формулы для прогоночных коэффициентов:

$$(-a_j \beta_{j+1} + b_j) \beta_j - c_j = 0, \quad \beta_j = \frac{c_j}{b_j - a_j \beta_{j+1}}; \quad \chi_j = \frac{F_j + a_j \chi_{j+1}}{b_j - a_j \beta_{j+1}};$$

$$j = (m-1), (m-2), \dots, 1$$

Прогоночные коэффициенты для первой компоненты решения

$$\beta_1 = \frac{c_1}{b_1 - a_1 \beta_2}, \quad \chi_1 = \frac{F_1 + a_1 \chi_2}{b_1 - a_1 \beta_2};$$

Определим  $T_0^{n+1}$  из следующей системы

$$\begin{cases} \lambda_s \frac{(T_0^{n+1} - T_1^{n+1})}{\Delta z} - \rho c_p v_\theta \frac{T_0^{n+1} - T_1^{n+1}}{\Delta z} = Q \\ T_1^{n+1} = \beta_1 T_0^{n+1} + \chi_1 \end{cases}$$

где  $Q = \rho L_\omega \left( v_\theta \frac{\partial q}{\partial z} \right)_0 + I_0 (1 - A_s) - F$ .

Далее

$$(\lambda_s - \rho c_p v_\theta) T_0^{n+1} + (-\lambda_s + \rho c_p v_\theta) T_1^{n+1} = \Delta z \cdot Q$$

Отсюда, подставив вместо  $T_1^{n+1}$  значение, имеем

$$\left[ (\lambda_s - \rho c_p v_\theta) + (-\lambda_s + \rho c_p v_\theta) \beta_1 \right] T_0^{n+1} = \chi_1 (-\lambda_s + \rho c_p v_\theta) + \Delta z \cdot Q$$

$$T_0^{n+1} = \frac{-\lambda_s + \rho c_p v_\theta}{\left[ (\lambda_s - \rho c_p v_\theta) + (-\lambda_s + \rho c_p v_\theta) \beta_1 \right]} \cdot \frac{a_1 \chi_2 + T_1^n}{b_1 - a_1 \beta_2} + \frac{\Delta z Q}{(\lambda_s - \rho c_p v_\theta)(1 - \beta_1)} \quad (5)$$

На нижнем временном слое из (2) имеем

$$T_1^n = \frac{\Delta z Q - (\lambda_s - \rho c_p v_\theta) T_0^n}{-\lambda_s + \rho c_p v_\theta} \quad (6)$$

Подставим (6) в (5) окончательно, для определения температуры на границе раздела атмосфера-почва, имеем

$$T_0^{n+1} = \frac{T_0^n}{(1 - \beta_1) \cdot (b_1 - a_1 \beta_2)} - \frac{a_1 \chi_2}{(1 - \beta_1)(b_1 - a_1 \beta_2)} + \left( \frac{1}{b_1 - a_1 \beta_2} + \frac{1}{\lambda_s - \rho c_p v_\theta} \right) \cdot \frac{\Delta z}{1 - \beta_1} \cdot \left( \rho L_w \left( v_{\theta,0} \frac{q_0^n - q_1^n}{\Delta z} \right) + I_0 (1 - A_s) - F \right)$$

Для проведения численных экспериментов, с целью оценки влияния деятельности человека на окружающую среду, основными моделями выступают модели трансформации и переноса примесей на фоне гидрометеорологического режима [2]. Известно, что климат города отличается от климата окружающей местности. Многочисленные измерения температуры воздуха в городе и его окрестностях показывают, что в городе почти всегда теплее, при этом разность температур иногда достигает  $10^0$ . Как правило, города формируют свой собственный климат.

Структуру его определяют свойства подстилающей поверхности, отличающиеся от свойств поверхности в окрестностях, искусственные источники тепла и влаги, газовый состав воздуха и т.д. Под влиянием этих факторов происходит изменение многих метеорологических величин, таких как прозрачность атмосферы, повторяемость туманов, относительная влажность и т.д. В среднем за год над городом скорость ветра на 20-30% меньше и соответственно повторяемость штилей больше, чем над сельской местностью. В штилевых ситуациях поток тепла в атмосферу уменьшается. Кроме того, из-за теплоемкости ряда объектов ночью выделяется дополнительное количество тепла. Интенсивность «острова тепла» зависит также от времени года, физико-географических условий, от численности населения в городе и т.д. Для ряда крупных городов замечено, что температура в отдельных их точках выше на 2-3 по сравнению с остальной территорией города, что обычно связывают с влиянием промышленных предприятий.

Однако даже без учета этого в городе наблюдается повышение температуры подстилающей поверхности одновременно с температурой воздуха. Из многочисленных воздействующих факторов основным является то, что город, по существу, служит потенциалом для поглощения радиации и накопления тепла в нижних слоях атмосферы. И как следствие, городской «остров тепла» (ОТ) обуславливает максимальные значения температуры воздуха в районах, где шероховатость поверхности больше, за счет торможения воздушных потоков и замедления обмена лучистой и тепловой энергией с атмосферой. При хорошо развитом городском ОТ имеет место снижение фронтальной скорости с наветренной части города и увеличение с подветренной стороны. Повышение скорости – результат взаимодействия фонового барического градиента с ОТ, т. е. городской ОТ может влиять на атмосферные процессы, как в локальном, так и в региональном масштабе. Такой характер атмосферных процессов, в свою очередь, существенно воздействует на перенос и диффузию загрязняющих примесей. Для решения численной модели микроклимата промышленного города Усть-Каменогорска используются условия полученные из решения уравнения (1).

#### **Библиографический список**

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 319 с.
2. Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. – Новосибирск: Наука, 1985. – 254 с.
3. Мадияров М.Н. Геоинформационная система для моделирования процесса загрязнения воздушного бассейна промышленного города // Вестник инженерной академии Республики Казахстан. – Алматы, 2007. №3(25). – С. 18–23.

#### **УДК 519.6**

### **Численная реализация модели процесса загрязнения атмосферы**

***М.Н. Мадияров, С.Ж. Сарсекеева***

*ВКГУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан*

Существенное влияние на перенос веществ в атмосфере оказывают метеорологические условия и в первую очередь ветровой режим и температурная стратификация нижнего слоя атмосферы.

Учет результатов исследований загрязнения атмосферы и климатических условий, определяющих рассеивание веществ в атмосфере, необходим также при государственном планировании мероприятий по охране атмосферного воздуха, составлении долгосрочных планов развития экономики, для рационального размещения жилых районов и предприятий, производственные отходы которых могут влиять на состояние атмосферы.

В данной работе уравнения пограничного слоя атмосферы записываются в ортогональных криволинейных координатах. С помощью этих уравнений проведены численные расчеты переноса примесей вредных веществ в атмосфере промышленного города, с целью выявления мелкомасштабных стоячих вихрей воздушного потока, которые возникают при умеренных ветрах. В отличие от ранее рассмотренных работ здесь на боковых границах рассматриваемой области граничные условия ставятся вторым производным по нормали.

Основу рассматриваемой численной модели для города составляют пространственные негидростатические численные модели локальных атмосферных процессов и переноса примесей [1, 2]:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \varphi' = -(1 - \alpha) \frac{\partial \pi}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_u \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) + \Delta \varphi' + F,$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi^i}{\partial q_i} = 0.$$

Здесь  $\Delta = \frac{\partial}{\partial x} \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu_2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \nu_u \frac{\partial}{\partial y}$ ;  $\bar{u}$  – вектор скорости ветра;

$$(\bar{u} \cdot \nabla) u = (u, v, \omega) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z}; \lambda, S – \text{параметры}$$

конвекции и стратификации;  $\mu_1, \mu_2$  – горизонтальные и  $\nu_u$  – вертикальные коэффициенты турбулентности для количества движения;  $\theta_x, \theta_y$  – горизонтальные градиенты фоновой потенциальной температуры;  $l = 2\bar{\omega} \sin \phi$  – параметр Кориолиса, которое обуславливается с вращением земли;  $\bar{\omega}$  – угловая скорость вращения Земли;  $\phi$  – широта;  $z = z_1 - \delta(x, y)$ ,  $z_1$  – высота над уровнем моря, уравнение  $z_1 = \delta(x, y)$  описывает рельеф;  $\delta_x, \delta_y$  – производные по направлениям соответственно.

Система уравнений (1)–(2) для города решается со следующими граничными условиями:

$$u = u^0, v = v^0, \omega = \omega^0, \theta = \theta^0 \text{ при } t = 0$$

$$\begin{aligned}
 u = f_u(t), \quad v = f_v(t), \quad \omega = 0, \quad \theta = f_\theta(t) \text{ на боковых границах при } u_n < 0 \\
 \frac{\partial^2 u_n}{\partial n^2} = 0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \text{ на боковых границах при } u_n > 0, \\
 \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0, \quad \omega = 0 \text{ при } z = H, \\
 h \frac{\partial u}{\partial z} = a_u u, \quad h \frac{\partial v}{\partial z} = a_v v, \quad \omega = 0, \quad h \frac{\partial \theta}{\partial z} = a_\theta (\theta - \theta_0) \text{ при } z = h,
 \end{aligned} \tag{3}$$

здесь  $a_u = \frac{\phi_u(\xi_h)}{f_u(\xi_h, \xi_0)}$ ,  $a_\theta = \frac{\phi_\theta(\xi_h)}{f_\theta(\xi_h, \xi_0)}$ ;  $H$  – условная высота погранично-

го слоя атмосферы;  $u_n$ ,  $u_\tau$  – величины скоростей: нормальной и касательной на боковые границы области. Соотношение  $u_n < 0$  определяет решение той части боковой границы, где воздушные массы вносятся в рассматриваемую область, а  $u_n > 0$  когда выносятся и условия  $u = f_u(t)$ ,  $v = f_v(t)$ ,  $\theta = f_\theta(t)$ , также условия в приземном слое атмосферы моделируют физический смысл происходящих процессов [3]. А остальные граничные условия требуют гладкости возмущений и выполнения уравнения неразрывности в окрестности границы интегрируемой области. Вторые производные нормали обеспечивают неизменности направлении и ускорении ветра на выходных границах.

В качестве физической области была рассмотрена территория города Усть-Каменогорска размером  $22 \cdot 10^3 \times 20 \cdot 10^3$  м<sup>2</sup> и высотой 2500 м, нижняя граница совпадает с рельефом местности. Во всей физической области построена ортогональная криволинейная сетка, которая с высотой выпрямляется и на верхней границе является плоскостью.

Для учета орографии местности перейдем от декартовой системы координат  $(x, y, z)$  в вычислительную область  $(\xi, \eta, \zeta)$ , обозначив через  $\xi = x$ ,  $\eta = y$ ,  $\zeta = z - \delta(x, y)$ , здесь  $\xi, \eta$  взаимно ортогональны и направлены вдоль рельефа, а  $\delta(x, y)$  – функция описывающая рельеф.

Тогда (1), (2) преобразуются в следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi'}{\partial \tau} + \xi_x \hat{u} \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi} + \eta_y \hat{v} \frac{\partial \varphi'}{\partial \eta} + \zeta_z \hat{w} \frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta} + (1 - \alpha) \left( \xi_x \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \xi} + \zeta_x \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \zeta} \right) = \\
 = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \mu_x \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi} \right) \xi_x^2 + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu_y \frac{\partial \varphi'}{\partial \eta} \right) \eta_y^2 + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \nu \frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta} \right) \zeta_z^2 + \Phi_{\varphi'} + F_{\varphi'}
 \end{aligned}$$

$$\xi_x \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} + \zeta_x \frac{\partial \hat{u}}{\partial \zeta} + \eta_y \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial \hat{v}}{\partial \zeta} + \zeta_z \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \zeta} = 0.$$

Здесь

$$\varphi' = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\omega}, \hat{\theta}, \hat{\phi}); \quad \alpha = (0, 0, 0, 1, 1);$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\varphi'} = & -\left(\zeta_x \hat{u} + \zeta_y \hat{v}\right) \frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta} + \mu_x \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi} \xi_{xx} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu_x \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi} \right) \xi_x \zeta_x + \mu_x \frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta} \zeta_{xx} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \mu_x \frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta} \right) \xi_x \zeta_x + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu_x \frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta} \right) \zeta_x^2 + \mu_y \frac{\partial \varphi'}{\partial \eta} \eta_{yy} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu_y \frac{\partial \varphi'}{\partial \eta} \right) \eta_y \zeta_y + \\ & + \mu_y \frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta} \zeta_{yy} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu_y \frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta} \right) \eta_y \zeta_y + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu_y \frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta} \right) \zeta_y^2 + \nu \frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta} \zeta_{zz} \\ F_{\varphi'} = & \left( l \hat{v}, -l \hat{u}, \lambda \hat{\theta}, -\hat{u} \left( S \zeta_x + \xi_x \hat{\theta}_z + \zeta_x \hat{\theta}_z \right) - \hat{v} \left( S \zeta_y + \eta_y \hat{\theta}_z + \zeta_y \hat{\theta}_z \right), f \right). \end{aligned}$$

При численной реализации систем уравнений (4)–(5) используется метод расщепления по физическим процессам.

На рисунке 1 представлены результаты численного расчета уравнений пограничного слоя атмосферы при ветре с юго-восточной стороны со скоростью 5 м/с [3].

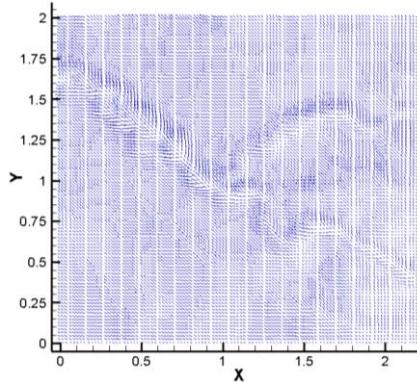


Рисунок 1 – Результаты численного расчета уравнений ПСА при ветре с юго-восточной стороны со скоростью 5 м/с.

Как видно, при умеренных ветрах его направление особо не отклоняется и только притормаживается перед водными поверхностями, так как существует перепад температур воздуха над водой и над сушей. А после водной поверхности ветер усиливается так же за счет градиента давления.

### Библиографический список

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 319 с.
2. Пененко В.В., Алюян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. – Новосибирск: Наука, 1985. – 254 с.
3. Мадияров М.Н. Геоинформационная система для моделирования процесса загрязнения воздушного бассейна промышленного города // Вестник инженерной академии Республики Казахстан. – Алматы, 2007. №3(25). – С. 18–23.

### УДК 519.8

#### Анализ динамики экологической ситуации в районах Алтайского края на основе моделей линейной регрессии

*А.С. Маничева*  
*АлтГУ, г. Барнаул*

Исследование экологической ситуации в районах Алтайского края в динамике позволит, во-первых, оценить эффективность мер природоохранной политики края, во-вторых, определить факторы, ухудшающие экологию в большей степени по сравнению с прочими факторами; в-третьих, определить районы с неблагоприятной экологической ситуацией и требующие по этой причине большего внимания. Изучению этих вопросов посвящено много публикаций, например, [1, 2]. Данная работа продолжает серию исследований, начатых в [3, 4].

Рассмотрим в качестве факторов окружающей среды, характеризующих экологическую ситуацию как результат влияния антропогенного воздействия, следующие показатели по 56 районам Алтайского края за 2014–2017 гг.:

1. Количество объектов, имеющих стационарные источники загрязнения атмосферного воздуха, единиц (П1).
2. Выброшено в атмосферу загрязняющих веществ, отходящих от стационарных источников, всего (тыс. тонн) (П2).
3. Выброшено в атмосферу загрязняющих веществ, отходящих от стационарных источников, – твердые вещества (тыс. тонн) (П3).
4. Выброшено в атмосферу загрязняющих веществ, отходящих от стационарных источников, – газообразные и жидкие вещества (тыс. тонн) (П4).
5. Общее количество загрязняющих веществ, отходящих от всех стационарных источников (тыс. тонн) (П5).

6. Уловлено и обезврежено загрязняющих веществ в процентах от общего количества загрязняющих веществ, отходящих от стационарных источников (%) (П6).

Анализ влияния факторов окружающей среды и оценка экологической ситуации в районах в виде их упорядочения по степени неблагоприятной экологии проводились на основе моделей линейной регрессии.

Показатели П1–П6 выступали в качестве независимых переменных, упорядочение районов по степени неблагоприятной экологической ситуации методом простого ранжирования – в качестве зависимой переменной.

Анализ построенных моделей за каждый год периода 2014-2017 гг. показал, что факторы П4 и П5 не оказывают существенного влияния на результат моделирования и могут быть исключены из рассмотрения. Повторное построение моделей линейной регрессии по меньшему числу факторов (П1, П2, П3, П6) показало значимость оставшихся факторов ( $p$ -значение для П1, П2, П3, П6  $< 0,05$ ) и удовлетворительную адекватность моделей (все коэффициенты детерминации в пределах 0,85–0,9). Параметры построенных моделей представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры моделей линейной регрессии по районам Алтайского края за 2014-2017 гг.

Переменные модели	Год, по которому построена модель							
	2014		2015		2016		2017	
	Коэффициент	$p$ -значение	Коэффициент	$p$ -значение	Коэффициент	$p$ -значение	Коэффициент	$p$ -значение
П1	1,1202	0,00	1,4109	0,00	1,6270	0,00	1,7521	0,75
П2	0,0116	0,00	0,0108	0,00	0,0080	0,00	0,0071	0,00
П3	-0,0130	0,00	-0,0101	0,00	-0,0118	0,00	-0,0105	0,00
П6	0,2165	0,00	0,1844	0,00	0,2708	0,00	0,2785	0,00
Свободный член	4,2115	0,02	3,8150	0,06	-0,0188	0,99	-0,6808	0,75

Наибольший вклад в результат моделирования за все рассматриваемые года внес фактор П1 – количество объектов, имеющих стационарные источники загрязнения атмосферного воздуха. За период 2014–2017 гг. количество источников загрязнения возросло с 514 до 575 ед., что также подтверждает негативное влияние данного фактора на экологическую ситуацию в районах.

Результаты моделирования – упорядочение районов по степени неблагоприятной экологической ситуации – были распределены по трем группам: в 1-ую группу попали районы с благоприятной экологической ситуацией.

ской ситуацией, во 2-ую – со средней ситуацией, в 3-ю – с неблагоприятной. Количество регионов со стабильной ситуацией, то есть не покидавших свою группу по сравнению с предыдущим годом, а также за весь рассматриваемый период, отображено в таблице 2.

Таблица 2 – Количество регионов, имеющих устойчивое положение в группе

Группа	Временной период			
	2014-2015	2015-2016	2016-2017	2014-2017
1	23	20	20	17
2	6	8	12	2
3	16	14	16	12

В среднем в 1-ой группе с благоприятной экологической ситуацией каждый год оставалось 38% от общего числа районов, в 3-ей группе (с неблагоприятной ситуацией) – 27%. За весь период 2014–2017 гг. 30% районов оставались в 1-ой группе, 4% – во 2-ой, 21% – в 3-ей; районы с нестабильной ситуацией составили 45% от общего числа.

В целом по результатам моделирования можно сказать, что половина районов Алтайского края имеют нестабильную экологическую ситуацию, при этом районов с благоприятной ситуацией больше, чем с неблагоприятной.

### Библиографический список

1. Малкова Н.Н. Экологические факторы риска, связанного с окружающей средой, на территории Алтайского края // Вестник Алтайского государственного аграрного университета. – Барнаул, 2012. – № 5(91). – С. 52–56.

2. Вологдин Е.В. Охрана окружающей среды в Алтайском крае в период 2000–2015 гг. Статистический аспект // Экономическая наука сегодня: теория и практика : материалы V Междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 3 дек. 2016 г.). – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2016. – С. 278–284.

3. Черевать Д.В., Маничева А.С., Элементы экологической карты Алтайского края // МАК : «Математики – Алтайскому краю» : сборник трудов всероссийской конференции по математике (Барнаул, 29 июня – 1 июля 2016 г.). – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2016. – С. 234–235.

4. Черевать Д.В., Маничева А.С. Анализ динамики экологической ситуации в районах Алтайского края // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования : сборник научных статей международной конференции (Барнаул, 14–17 ноября 2017 г.). – Барнаул, 2017. – С. 637–638.

## УДК 519.7

**Имитационные модели эволюции популяций****К.Г. Неупокоева, Л.А. Хворова, М.С. Букаев***АлтГУ, г. Барнаул*

Проверка существующих гипотез об эволюции популяций в реальных условиях невозможна. Эволюция – это длительный процесс. Однако, мы можем разработать имитационные модели эволюционных процессов, подвергнуть их анализу и использовать полученные данные для проверки возможных гипотез.

Как известно, основными механизмами эволюции являются:

- естественный отбор;
- наследственность;
- социальная среда.

*Естественный отбор* – основной эволюционный процесс, в результате которого в популяции увеличивается число особей, обладающих максимальной приспособленностью, в то время как количество особей со слабыми признаками приспособленности уменьшается. В свете современной теории эволюции естественный отбор рассматривается как главный механизм адаптации.

*Наследственность* – способность организмов передавать свои признаки и особенности развития потомству.

*Социальная среда* – совокупность материальных, экономических, социальных, политических и духовных условий существования, формирования и деятельности индивидов и социальных групп.

Для построения имитационных моделей биолого-социальной эволюции было сгенерировано несколько подходов.

**Подход I.** В процессе эволюции происходит улучшение «породы» человеческой популяции. А именно, у «хороших» родителей рождается больше детей, поэтому в следующем поколении наследников «хороших» качеств станет больше, чем наследников «плохих» качеств. Значит, среднее качество популяции увеличится. То есть, на самом деле, не дети станут лучше своих родителей, а увеличится доля детей от «хороших» родителей. Именно это является механизмом отбора или главным механизмом эволюции согласно первому подходу.

Цель данного подхода – построение модели динамики распределения среднего значения пассионарности (страстное стремление к цели и готовность к сверхнапряжениям и жертвенности ради достижения этой цели) в популяции по мере смены поколений, так как объективно ценной, по мнению автора модели А.Г. Топажа, является именно пассио-

нарность. Задача исследования – изучение влияния на динамику пассионарности и коэффициента уровня социального лифта, то есть степени традиционализма общества.

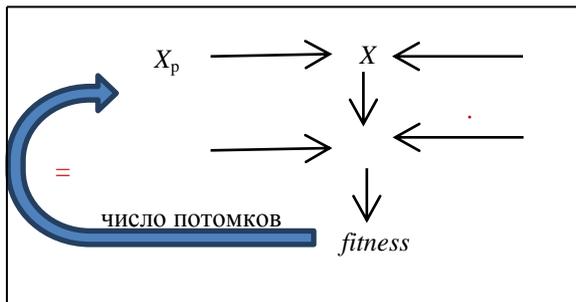


Рисунок 1 – Схема реализации подхода I

На рисунке 1 представлен алгоритм реализации подхода I («Оптимистичная» концепция).  $X_p$  – значение генетического лидерства родителя,  $Y_p$  – значение социального статуса родителя. Значения  $X_p$  и  $Y_p$  в начальный момент времени имеют нормальное распределение, и статус в точности равен лидерству. Генетическое наследование  $X$  – это простое заимствование потомком генетики предка плюс случайная мутация, происходящая с интенсивностью  $\alpha$ .

Наследование социального статуса  $Y$  – средневзвешенное статуса предка и личного лидерства плюс влияние фактора случайности в реализации, который регулируется параметром  $\gamma$ .

Социальный статус определяет приспособленность особи, которая характеризуется числом потомков. Чем выше статус, тем больше приспособленность. Число потомков в модели полагается пропорциональным приспособленности. Результаты моделирования характеризуют улучшение генетики в процессе смены поколений.

**Подход II.** Данный подход изложен в видеолекции д.б.н. В.И. Маркова «Открытия в эволюции. Итоги 2017 г.» и основан на том, что до середины 19 века больше потомков производили богатые и образованные люди, которые были выше в социальной иерархии. После промышленной революции все изменилось: наблюдается генетическое вырождение и деградация популяций. Каждое поколение становится хуже предыдущего.

Исследования исландских генетиков подтвердили опасения о том, что эволюция современного человечества направлена в сторону ухудшения генетического базиса признаков, связанного с интеллектом.

**Подход III.** Рассматривается разбиение человеческой популяции на три класса  $h_1, h_2, h_3$ , различающихся по качественным признакам.

Параметром  $h_{11}$  обозначен «высший» класс (очень успешные, богатые и здоровые особи),  $h_{21}$  – «средний» класс (особи, которые имеют относительно средний доход и неплохое здоровье),  $h_{31}$  – «низший» класс (особи, оказавшиеся за пределами условий и норм жизни, принятых в современном обществе).

Предполагается, что каждая особь  $i$ -го класса производит от 0 до 4 особей, себе подобных. Объем выборки в каждом последующем поколении всегда остается неизменным. Регулируя параметрами: размер классов и величина рождаемости для каждого класса, можно пронаблюдать динамику эволюции общества.

**Подход IV.** Основной движущей силой эволюции в данном подходе является жизненный успех особи. В рамках подхода IV рассматривается не относительное количество потомков, а некий уровень жизненной энергии особи. Причем, при реализации подхода превалирует позиция автора подхода Н.М. Оскорбина, что «Яблоко от яблони недалеко падает» и «От мандаринки не рождаются апельсинки», т.е. у «успешных» родителей в большинстве случаев должны рождаться «успешные» дети. Под «успешностью» в данном подходе полагается наличие высокого социального статуса и пассионарность.

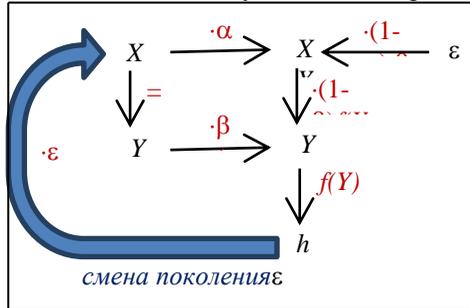


Рисунок 2 – Схема реализации подхода IV

Модель работает в жестких сценарных условиях (рисунок 3):

$X$  – субъективный уровень показателя жизненной силы потомка;  $Y$  – субъективный социальный статус потомка;  $X_p$  – уровень жизненной силы родителя;  $Y_p$  – социальный статус родителя, который зависит от  $X_p$  и от случаев;  $h$  – относительное количество потомков с определенными признаками;  $\epsilon$  – неудача/удача в формировании уровня жизненной силы (социальная среда) – случайная величина;  $\alpha$  – коэффициент «соединения» генетики и социального статуса в формировании лично-

сти потомка,  $\beta$  – коэффициент «соединения» власти родителя и пассионарности потомка при формировании социального статуса.

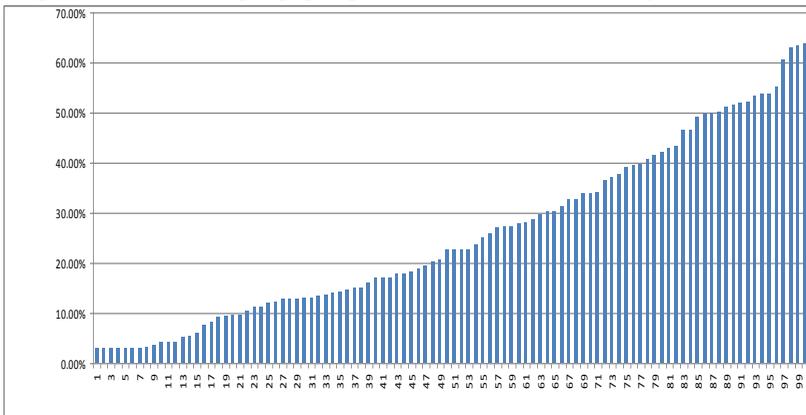


Рисунок 3 – Результаты моделирования эволюции 100 особей течение 10 поколений, ранжированные в порядке возрастания

На рисунке 3 представлены результаты имитационного моделирования эволюции 100 особей в течение 10 поколений. Медианой будем считать значение жизненной силы, равной 35%, что на графике соответствует 72 столбцу. Значения, которые вошли в диапазон от 35% до 50%, имеют среднее значение уровня жизненной силы и составляют 17% от общей выборки. У 72% – низкий уровень социального статуса и жизненной силы. И только 12% особей обладают высокой жизненной силой.

Выбор параметров сценарных условий является сложной задачей, т.к. требуется верификация значений, которую необходимо проводить по фактическим данным (социальный опрос, анкетирование). Поэтому, данное исследование рассматривается, как модельный (компьютерный) эксперимент, но который может дать представление о реальности и закономерностях передачи и сохранения пассионарных свойств или жизненной силы.

УДК: 51-76; 57.087

**Применение вертикальной модели биомасс для построения интегральных оценок фитопланктона по данным дистанционного зондирования озера Иссык-Куль**

*С.Я. Пак, А.И. Абакумов*  
ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток

Озерные системы представляют собой важный компонент территориальной экосистемы. Крупные озера, подобные Иссык-Кулю, часто определяют социально-индустриальную инфраструктуру региона. Задача сохранения экологической целостности и поддержания стабильного функционирования таких водных объектов должна быть неотъемлемой частью регионального управления и природного мониторинга. Для оценки продуктивного потенциала экосистемы озера Иссык-Куль используется модель вертикального распределения фитопланктона по глубине, основанная на концепции функции приспособленности [1].

$$\frac{dy}{dx} = \left[ \frac{d\mu}{dx} - e(y) \right] y, \quad \frac{dz}{dx} = \nu p(y, y_0) z, \quad \frac{dI}{dx} = -k(y, z) I. \quad (1)$$

Поскольку модель стационарная, в уравнениях учитываются только изменения, зависящие от локализации растительных организмов по глубине. Здесь  $y(x)$  – плотность биомассы фитопланктона ( $\text{г}/\text{м}^3$ );  $z(t, x)$  – плотность массы минеральных веществ ( $\text{г}/\text{м}^3$ );  $I(t, x)$  – освещенность поверхности океана и ее распределение по глубине  $x$ . Что касается функции приспособленности, то в данном случае она совпадает с удельной скоростью роста биомассы фитопланктона  $\mu(z, I, \theta) = \mu_0 \cdot \mu_z(z) \cdot \mu_I(I) \cdot \mu_\theta(\theta)$ , интерпретируемой как скорость роста сообщества;  $e(y)$  – удельная скорость элиминации биомассы фитопланктона из-за поедания зоопланктоном и иных причин смертности. Коэффициент  $\mu_0$  – максимально возможная скорость роста фитопланктона,  $\mu_z(z) = z / (z_0 + z)$ , где  $z_0$  – константа полунасыщения по биогенному питанию;  $\mu_I(I) = I / (I_0 + I)$ ,  $I_0$  – константа полунасыщения по освещенности;  $\mu_\theta(\theta) = \exp\left(-\frac{(\theta - \theta_{opt})^2}{2\tau^2}\right)$ ,  $\theta_{opt}$  – оптимальная для роста фитопланктона температура водной среды,  $\tau$  – интервал толерантности.

Будем придерживаться гипотезы об обратном влиянии фитопланктона на пищевой стимул  $z$ , тогда  $p(y, y_0) = \frac{y_0}{y + y_0}$ , где  $y_0$  – константа

полунасыщения по фитопланктону,  $v$  – максимально возможная скорость пополнения минерального вещества [2].

Третье уравнение системы (1) имитирует ослабление освещенности с глубиной, обусловленное преломлением водных слоев, затенением фитопланктоном и взвешенной органикой. Соответствующее распределение описывается функцией  $k(t, z, y, z) = k_0 + k_1y + k_2z$ , где  $k_0$  – коэффициент общей мутности воды,  $k_1$  – коэффициент затенения фитопланктоном,  $k_2$  – коэффициент затенения минеральными веществами [3].

Система уравнений (1) верифицируется в соответствии с данными, полученными контактными методами в пелагиали озера Иссык-Куль. В ходе экспедиций 1998-1999 гг. были составлены вертикальные разрезы удельной биомассы фитопланктона, температуры, освещенности, а также концентрации биогенных соединений по маршруту Тамга-Григорьевка [4]. Распределения соответствующих показателей аппроксимировались методом сплайн-интерполяции с целью последующей минимизации функционала невязки. Полученные значения были использованы в качестве параметров модели (1).

Информацией, которая использовалась в качестве начальных условий для решения системы уравнений (1), послужили данные спутниковых наблюдений о концентрации хлорофилла в поверхностном водном слое, освещенности водной поверхности и температуре. Построение интегральных оценок биомассы фитопланктона в заданном географическом районе состояло в численном решении задачи Коши для вертикальной модели (1) в каждой точке регулярной сетки с шагом 0.0033 градуса или 11,88 угловых секунд по долготе и 0,002448 по широте. Интегрирование производилось согласно карте глубин, построенной путем оцифровки растрового изображения топографической карты масштаба 1:500000. Значения биомассы в точках, где данные не удалось зафиксировать из-за облачности, были получены путем автоматической триангуляции по тем опорным точкам, где корректные данные были успешно зарегистрированы.

Описанным методом удалось сформировать оценки интегральной биомассы в исследуемом районе озера Иссык-Куль в июле-августе 2002 года, представленные на рисунках 1, 2.

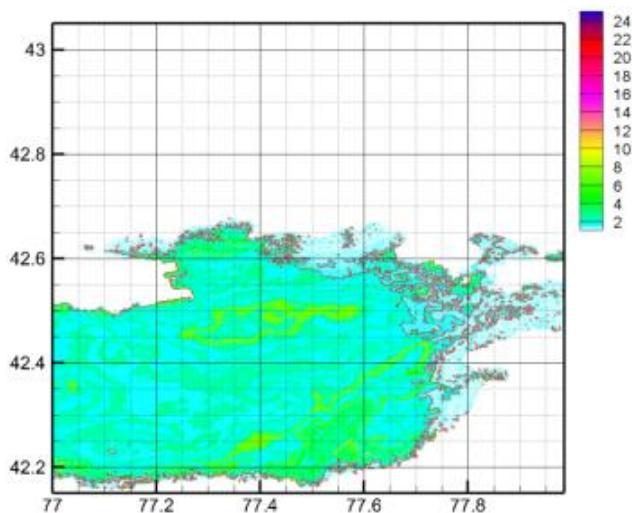


Рисунок 1 – Интегральные оценки биомассы фитопланктона за 30 июля 2002 года

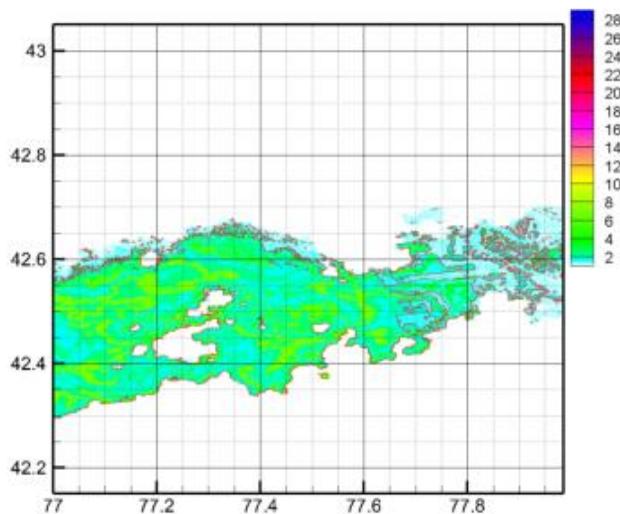


Рисунок 2 – Интегральные оценки биомассы фитопланктона за 26 августа 2002 года

Максимальные оценки интегральной биомассы фитопланктона в июле-августе 2002 года достигают порядка 24–28 мг/м<sup>3</sup>, что вполне согласуется с измерениями, опубликованными в [5]. Распределение

максимальных и минимальных значений совокупной по вертикали биомассы не поддается выраженному районированию, что объяснимо с точки зрения гидрологии озер, где движение водных масс, влекущее за собой перераспределение температуры и биогенного притока, значительно уступает морям. Кроме того, переменный уровень воды, характерный исключительно для Иссык-Куля, вероятно, усиливает хаотичность влияния внешних факторов, что закономерно отражается в случайном характере локализации удельной биомассы.

### **Библиографический список**

1. Полуэктов Р.А., Пых Ю.А., Швытов И.А. Динамические модели экологических систем. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 286 с.
2. Пак С.Я., Абакумов А.И. Модельный способ восстановления состояния фитопланктона в вертикальном столбе воды по спутниковым данным о поверхностном слое // Информатика и системы управления. – 2014. – № 3(41). – С. 23–32.
3. Abakumov A., Izrail'skii Yu., Park S. Functioning of the phytoplankton in seas and estimates of primary production for aquatic ecosystems // Developm. Environment. Modelling. – 2015. – Vol. 27. – P. 339–349.
4. Тыныбеков А.К., Маторин Д.Н. Состояние фитопланктона озера Иссык-Куль. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2009. – 230 с.
5. Тыныбеков А. Математическая модель состояния фитопланктона озера Иссык-Куль // Международный университет Ала-Тоо. – Бишкек, 2016. – № 1. – С. 369–385.

## **УДК 581.6**

### **Прогнозирование актуальной эвапотранспирации на основе моделей скользящей регрессии (на примере сухой степи Алтайского края)**

*Е.В. Понькина<sup>1</sup>, А.А. Бондарович<sup>1</sup>, Г. Шмидт<sup>2</sup>, А. Савиных<sup>1</sup>*  
<sup>1</sup>АлтГУ, г. Барнаул; Россия; <sup>2</sup>Университет Мартина-Лютера Халле-Виттенберг, Хале, Германия

Эвапотранспирация представляет собой суммарный расход влаги в результате испарения из почвы и вегетационных процессов и является необходимой составляющей водного баланса. В соответствии с [1], запас почвенной влаги в момент времени  $t$   $W(t)$  (мм) при обработке данных почвенно-гидрологического мониторинга зависит от запаса

влаги в предшествующий период  $t - 1$ , совокупного ее прихода и расхода, что определяется уравнением:

$$W(t) = W(t - 1) + \text{Precipitation}(t) - \text{Eta}(t) - R(t) - S(t), \quad (1)$$

где  $\text{Precipitation}(t)$  – объем влаги, поступившей в почву за счет осадков, мм;  $\text{Eta}(t)$  – расход влаги в результате эвапорации и транспирации, мм;  $R(t)$  – поверхностный сток, мм;  $S(t)$  – инфильтрация, мм.

Формула (1) позволяет оценить общий баланс почвенной влаги  $\Delta W(t)$  на момент измерений  $t$  и оценку  $\text{Eta}(t)$ :

$$\text{Eta}(t) = \text{Precipitation}(t) - \Delta W(t) - R(t) - S(t). \quad (2)$$

Разработка прогностических и оценочных моделей  $\Delta W(t)$ , а также  $\text{Eta}(t)$  для сценарных (предполагаемых) и фактических климатических условий на некоторый период  $N$  позволяет решить ряд практических задач:

*а) оценить степень лимитированности почвенно-гидрологических факторов роста и развития сельскохозяйственных культур, наличие или отсутствие водного стресса. Это дает необходимую информацию:*

во-первых, для оценки благоприятности климатических условий и действия климата как решающего фактора, ограничившего фактическую урожайность культур, что важно при обосновании страховых выплат в системе страхования урожайности культур;

во-вторых, для регулирования мелиоративных систем и обеспечения оптимального водного режима растений;

в-третьих, для подбора возделываемых культур с учетом специфики почвенно-гидрологического режима;

в-четвертых, для подбора элементов технологии возделывания культур (глубина заделки семян, глубина рыхления и т.д.) обеспечивающих благоприятный водный режим их роста и развития.

*б) моделировать влияние климатических условий и их ожидаемых изменений на величину потенциальной продуктивности возделываемых культур, оценить ожидаемые последствия изменения продуктивности в растениеводстве;*

*в) использовать математические модели для восстановления величины  $\text{Eta}$  по известным климатическим данным.*

В рамках проекта «Кулунда» АлтГУ получил уникальное оборудование (лизиметрическая станция, компания UGT, Германия), позволяющее «напрямую», в поле оценивать величину водного баланса в почве  $\Delta W(t)$  и величину  $\text{Eta}(t)$  в режиме реального времени. Полигон наблюдений расположен на Кулундинской равнине Алтайского края (с. Полуямки, Михайловский район, ООО «КХ Партнер»). Измерение почвенно-гидрологических параметров (температура почвы, влаж-

ность, рF) осуществляется по глубинам 30, 50 и 120 см. Оценка текущего состояния водного баланса в почве проводится посредством измерения массы почвенного монолита и его изменения. Все измерения осуществляются с шагом 1 час. Стационар оборудован метеорологической станцией, измеряющей синхронно во времени с лизиметром метеоэлементы. Подробнее характеристики оборудования и особенности измеряемых данных приведены в [2].

Для Кулундинской равнины характерен засушливый климат и недостаточное увлажнение в течение вегетационного периода. Распределение осадков, как по территории, так и по сезонам является неравномерным. Для расчета  $Eta(t)$  по лизиметрическим данным достаточно вычислить фактическую массу монолита и ее изменение, показывающую непосредственно приходящую или остаточную влагу в почве с учетом поверхностного стока и инфильтрации. Соответственно, в (2)  $R(t) = S(t) = 0$ . В связи с этим, оценки фактической  $Eta(t)$  получены по редуцированной формуле:

$$Eta(t) = Precipitation(t) - \Delta W(t),$$

при этом  $Precipitation(t)$  – сумма приходящей влаги в почву (может оцениваться как положительный прирост массы лизиметра), мм; а отсутствие осадков и отрицательные приросты масс лизиметра характеризуют совокупную эвапотранспирацию  $Eta(t)$ :

$$Eta(t) = \begin{cases} 0, & \Delta W(t) \geq 0; \\ -\Delta W(t), & \Delta W(t) < 0. \end{cases}$$

Методы моделирования и оценки актуальной эвапотранспирации можно разделить на три группы: непосредственных полевых и лабораторных измерений (прямой метод); аналитический метод (физико-гидрологический подход); эмпирический метод (оценка параметров моделей на основе данных почвенно-климатических наблюдений) [3]. Первая группа включает довольно трудоемкие методы прямого измерения суммарного испарения влаги. Во второй группе наиболее известны метод водного баланса и метод теплового баланса. Эмпирические методы третьей группы основаны на установлении зависимостей различного вида между испарением и одним или несколькими метеорологическими показателями; сюда относится, например, модель Пенмана-Монтейта и методы регрессионного анализа [4-8]. Анализ теории и практики моделирования величины  $Eta(t)$  показал, что процесс эвапотранспирации в схожих почвенных условиях в большей степени определен климатом.

Предполагая, что влияние климатических факторов неустойчиво во времени в качестве наиболее подходящей формы модели рассматривается скользящая регрессия вида:

$$Eta(t) = A(n) \cdot Climat(t) + eps(t, n), \quad t = t_0 - n, \dots, t_0, \quad (3)$$

где  $n$  – объем обучающей выборки («временное окно»), сформированный в виде временного ряда из  $n$  фактических предшествующих  $t_0$  наблюдений ( $t = t_0 - n, \dots, t_0$ ); обучающая выборка затем используется для обучения модели;  $A(n) = (A_1(n), \dots, A_M(n))$  – коэффициенты модели линейной регрессии;  $Climat(t)$  – вектор-столбец  $M$  климатических переменных;  $eps(t, n)$  – ошибка.

Прогнозирование значений  $Eta(t)$  на  $k$  периодов вперед по известным, либо предполагаемым (сценарным) климатическим данным  $Climat(t)$  выполняется по модели (3) для  $t = t_0 + 1, \dots, t_0 + k$ . Соответственно, ошибка прогнозирования в точке  $k$  определена как  $eps(t_0 + k, n) = eps(k, n)$ .

**Задача.** Задача автоматического обучения модели скользящей регрессии (3) заключается в нахождении оптимального размера «окна»  $n^*$  обеспечивающего минимум средней квадратичной ошибки прогнозирования  $Eta(t)$  по модели на заданный период  $k$ :

$$n^* = \operatorname{argmin}_{n > 10 \cdot M} (\sum_{t=t_0+1}^{t_0+k} eps(t, n)^2).$$

Анализ практики регрессионного моделирования процессов эвапотранспирации показал, что часто в качестве оценки точности моделирования  $Eta$  используется величина кумулятивной (суммарной) ошибки модели на момент прогнозирования  $k$  (мм):

$$Cumul\_eps(n, k) = \sum_{t=t_0-n}^{t_0+k} eps(t).$$

Такой подход используется в задачах непрерывного мониторинга величины потерь влаги в почве (например, в течение 14 дней) с необходимостью прогноза на ближайшую перспективу (следующие 14 дней).

Апробация модели выполнена по часовым данным за вегетационный период 2015 г. В качестве независимых переменных в модели рассматривались следующие метеорологические факторы: скорость ветра (м/с), температура воздуха (°C), относительная влажность воздуха (%), атмосферное давление (Па), солнечная радиация (Вт/м<sup>2</sup>); сумма осадков, мм; в качестве зависимой переменной выступала актуальная эвапотранспирация, оцененная по данным лизиметрической установки (мм/м<sup>2</sup>).

Предварительный анализ регрессионной модели (3) показал, что модель скользящей регрессии при идентификации коэффициентов модели по методу наименьших квадратов является в целом статистически значимой, точность оценки суммарной  $Eta$  по фактическому периоду колеблется от 4 до 10%. Оптимальная база для оценки параметров модели (3) при прогнозировании на 7, 10 и 14 дней составляет  $n^* = 10, 12$  и 14 дней, соответственно. Относительная ошибка прогнозиро-

вания на  $k$ -ый период в среднем составляет 8, 10 и 12%. Увеличение «временного окна» выше найденных значений  $n^*$  не целесообразно и способствует наращиванию ошибки.

Предложенный подход прогноза и оценки эвапотранспирации может быть использован при физическом ограничении доступа к данным наземных наблюдений, или необходимости их восстановления по известным климатическим данным.

### Библиографический список

1. Майсснер Р., Бондарович А.А., Щербинин В.В., Понькина Е.В., Мацюра А.В., Пузанов А.В., Рупп Х., Шмидт Г., Штефан Э., Иллигер П., Фрюауф М., Харламова Н.Ф., Галахов В.П., Балькин Д.Н., Рудев Н.В. Методика расчета водного баланса для сухой степи юга Западной Сибири по данным международной мониторинговой сети // *Biological Bulletin of Bogdan Chmelnitkiy Melitopol State Pedagogical University*. – 2016. – 6 (2). – P. 223–238.
2. Беляев В.И., Бондарович А.А., Понькина Е.В., Щербинин В.В., Шмидт Г., Мацюра А.В., Кожанов Н.А., Рудев Н.В. Температурный режим воздуха и почвы по данным метеорологической и почвенно-гидрологической мониторинговой сети в Кулундинской равнине за вегетационные периоды 2013-2016 гг. // *Вестник Алтайского государственного аграрного университета*. – 2017. – № 3 (149). – С. 30–37.
3. Черемисинов А.А., Черемисинов А.Ю. Обзор расчетных методов определения суммарного испарения орошаемых сельскохозяйственных полей // *Научный журнал Российского НИИ проблем мелиорации*. – 2016. – № 1(21). – С. 113–133.
4. Manikumari N., Vinodhini G. Regression Models for Predicting Reference Evapotranspiration // *International Journal of Engineering Trends and Technology (IJETT)*. 2016. – V. 38 (3). P. 134–139.
5. AlJumaili K.K., Al-Khafaji M.S., Al-Awadi A.T. Assessment of Evapotranspiration Estimation Models for Irrigation Projects in Karbala, Iraq // *Eng. & Tech. Journal*. – 2014. – Vol.32, Part (A), No.5. – P. 1149–1157.
6. Sriram A. V., Rashmi C. N. Estimation of Potential Evapotranspiration by Multiple Linear Regression Method // *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE)*. 2014. – 11 (2). – P. 65–70.
7. Honarbakhsh A., Dashtpajardi M.M., Vagharfard H. Application of Soft Computing Methods in Predicting Evapotranspiration // *Open Journal of Geology*. – 2013. – 3. – P. 397–403.
8. Helder J. F. da Silva, Marconio S. dos Santos, Jório B. Cabral Junior, Maria H. C. Spyrides. Modeling of reference evapotranspiration by multiple

linear regression // Journal of Hyperspectral Remote Sensing. – 2016. – V.6 (1). – P. 44–58.

**УДК 631.1, 519.816**

**Роль семейной формы аграрного бизнеса в реализации стратегии устойчивого развития сельского хозяйства Алтайского края**

*Е.В. Понькина<sup>1</sup>, А.С. Маничева<sup>1</sup>, А.В. Прищепов<sup>2</sup>, Д. Сан<sup>3</sup>*  
*<sup>1</sup>АлтГУ, г. Барнаул; Россия; <sup>2</sup>Университет Копенгагена, Дания;*  
*<sup>3</sup>Институт исследования аграрных проблем в странах с переходной экономикой (ИАМО), Германия*

**Введение.** Реализация концепции устойчивого развития сельских территорий связана как с созданием конкурентоспособного аграрного комплекса, стимулирования инновационной и инвестиционной активности, так и «формированием позитивного отношения к сельской местности и сельскому образу жизни» [1], сохранением природного потенциала. Доминирование коммерческих целей в деятельности сельскохозяйственных производителей приводит к нарушению баланса между экономическими, экологическими и социальными функциями аграрного бизнеса.

Одной из важных форм ведения аграрного бизнеса является – «семейный». Важным состоянием семейного бизнеса является преемственность. Наличие или отсутствие преемника бизнеса, особенно на этапах выхода на пенсию старшего поколения, может существенно отразиться на стиле руководства и организации производства, темпах развития, инновационной активности. Преемственность обеспечивает генерацию нового поколения фермеров, для которых земля, на которой они работают, является родной, «впитавших» традиции земледелия старшего поколения.

Первые научные исследования феномена преемственности в аграрном бизнесе были выполнены в 80-х гг. XX века [2], в ходе которых выявлен и обоснован «эффект наследования», который заключается в том, что молодые преемники бизнеса более склонны к внедрению инноваций, диверсификации производства и ориентированы на сохранение природного потенциала территории. Кроме того, с 2015 г. введены специальные меры в рамках программы развития сельского хозяйства стран ЕС (Common Agriculture Policy – CAP), предполагающие выплаты, как для молодых фермеров, так и специальные платежи для «кра-

но», уходящих на пенсию старших фермеров [3]. В России в настоящее время данный феномен является мало изученным. В связи с этим оценка «эффекта преемника» актуальна.

В рамках данной работы эмпирической проверке подвергаются гипотезы о том, что наличие преемника из числа членов семьи и развитие именно семенной формы аграрного бизнеса способствует укреплению ориентации аграрной экономики не только на извлечение экономического эффекта, но и экологической ориентации производства, повышению инвестиционной активности.

**Данные и методы.** В качестве эмпирической базы исследования послужили результаты проводимых структурированных интервью с руководителями сельскохозяйственных предприятий Алтайского края, проведенных в 2013 г. в рамках проекта Кулунда. Полученная выборка содержит 67 наблюдений. Основную долю выборки составляют КФХ и ИП – 48%, ООО – 22%, 13% – СПК и 16% – прочие формы организации. Главы ЛПХ в интервью не участвовали.

Базовыми вопросами, касающимися аспектов наследования и преемственности бизнеса, рассматриваются: *«Есть ли преемник бизнеса? Да / Нет / Затрудняюсь ответить»*, *«Является ли преемник членом вашей семьи? Да / Нет»*. Ответы на ключевые вопросы позволяют разбить выборку с учетом факта наличия или отсутствия преемника. По результатам опроса доля респондентов, признавших наличие преемника, составила 40%, отсутствие – 33% и затруднившихся ответить – 27%.

В методологическом плане исследование *«эффекта преемника»* бизнеса базируется на применении методов качественного и количественного анализа. Детальный обзор методов исследования феноменов наследования и смены руководства аграрных предприятий приведен в работе [4]. В виду того, что полученная выборка является малой, анализ базируется на сочетании методов анализа причинности (Features Selection Analysis) и структурных уравнений регрессии (Structural Equation Model).

**Результаты.** *Оценка состояния почвенного плодородия.* Анализ мнений респондентов о качестве почв и возможных проблемах почвенного плодородия выявил следующие статистически значимые различия мнений респондентов – 89% фермеров, имеющих преемника семейного бизнеса, отмечают наличие проблем с сохранением почвенного плодородия; 93% – проблем с накоплением почвенной влаги; 81% – проблем, связанных с негативным действием почвенных эрозионных процессов. Фермеры, отметившие отсутствие преемника, показали меньшую озабоченность проблемами качества и сохранности плодородия почв (59%; 82%; 68%, соответственно).

*Технология возделывания культур.* 93% фермеров, имеющих преемника бизнеса, практикуют следование севообороту; 52% – внесение органических и минеральных удобрений. Только 30% фермеров, не имеющих преемника, практикуют внесение удобрений (различие 22%), наличие следования севообороту отмечается в 75% случаев (различие 18%). Также отмечена большая активность применения различных технологических операций по сохранению почвенного плодородия среди предприятий, имеющих преемника. Фермеры, имеющие наследника, показали урожайность выше на 1 ц/га в среднем за 2008–2012 гг. и 2 ц/га в засушливый 2012 г.

*Инвестиции.* В целом большая инвестиционная активность по приобретению новой сельскохозяйственной техники была характерна для предприятий, имеющих преемника.

*Мотивы ведения аграрного бизнеса и планы на будущее.* Фермеры, не имеющие преемника, в большей степени ориентированы на извлечение прибыли и получение наибольшей продуктивности – 45% респондентов отметили этот пункт как «самая важная причина». Только 38% фермеров, имеющих преемника, отметили извлечение прибыли в качестве самой важной причины, 17% не считают важным максимизировать прибыль вообще. 21% из них отметили, что наибольшая продуктивность не является важной целью.

В целом фермеры, развивающие семейный бизнес, в перспективе более ориентированы на расширение производства, вовлечение новых земель (14% респондентов), наращивание урожайности культур (59%), более позитивно оценивают опыт работы в сельском хозяйстве. 55% из них выбрали бы сельскохозяйственное производство снова как основной вид деятельности, если бы была возможность начать бизнес с нуля. Кроме того, 62% из них хотели бы, чтобы их дети занялись аграрным бизнесом тоже.

### **Библиографический список**

1. О федеральной целевой программе «Устойчивое развитие сельских территорий на 2014–2017 годы и на период до 2020 года». Постановление Правительства РФ от 15 июля 2013 года № 598.
2. Fennell R. Farm succession in the European Community // *Sociologia Ruralis*. – 1981. – № 21(1). – Pp. 19–42.
3. Rural Development 2014-2020 in EU. URL: [https://ec.europa.eu/agriculture/rural-development-2014-2020\\_en](https://ec.europa.eu/agriculture/rural-development-2014-2020_en).
4. Bertoni D., Cavicchioli D. Process description, qualitative analysis and causal relationships in farm succession // *CAB Reviews*. – 2016. – № 43. – Pp. 1–11.

## УДК 581.6

**Использование дистанционных методов зондирования  
для выделения деградации растительности  
и определения толщины морского льда  
(на примере полуострова Ямал и Карского моря)**

*Т.Г. Сысова*  
*АлтГУ, г. Барнаул*

В связи с изменением климата Арктики и освоением природных ресурсов Крайнего Севера является актуальным использование спутниковых данных для выявления реакции тундровой растительности на различные природные и антропогенные воздействия и определения толщины морского льда на Крайнем Севере [1].

Поскольку растительность является наиболее важным компонентом экосистем Ямала, важно использовать эффективные вычислительные инструменты для анализа состояния растительного покрова, а также для получения оценок продуктивности и полной деградации растительности на основе доступных космических данных с достаточным пространственным и радиометрическим разрешением.

Отражение и поглощение растительностью падающих солнечных лучей зависят от длины волны света. Спектр здоровых зеленых листьев соответствует диапазону излучения 400–1000 нм.

Эти характерные особенности спектрального отражения позволяют использовать космические снимки для оценки состояния растительности на основе преобразований исходных спектральных значений в элементах растра. Одним из наиболее известных преобразований на основе использования особенностей спектральной отражательной способности растительности является нормализованный разностный индекс растительности NDVI.

Для детального изучения пространственно-временных закономерностей изменения растительности на Ямале был создан специальный тематический каталог снимков (ТКС) «ЯНАО-Landsat-8/OLI», обеспечивающий покрытие растительности на территории ЯНАО в период вегетации (май-октябрь) 2013-2017 гг. Продуктивность растительности вычислялась на основе пакета SNAP/ESA 2.0.2, как максимальное значение NDVI для заданного периода времени (таблица 1).

Для проведения классификации объектов, использовалось программное обеспечение ERDAS Imagine 2013.

Таблица 1 – Максимальные значения NDVI

Месяц	Максимальное значение NDVI			
	2013 г	2014 г	2015 г	2016 г.
<b>Май</b>	0,190	0,010	0,464	
<b>Июнь</b>	0,735	0,720	0,746	0,753
<b>Июль</b>	0,750	0,756	0,755	0,786
<b>Август</b>	0,749	0,752	0,751	0,751
<b>Сентябрь</b>	0,509	0,458	0,564	0,657
<b>Октябрь</b>	0,277	-0,013	0,258	0,467

Результаты обработки снимков центрального Ямала (окрестности Бованенково) показали участки полной деградации растительности в 2016-2017 гг. [2–4].

Данные регулярных наблюдений за ледяным покровом в Арктике в нашей стране концентрируются в Арктическом и антарктическом научно-исследовательском институте (ААНИИ) Росгидромета. Обзорные карты распределения льда, создаваемые в ААНИИ, являются основным российским материалом о ледовой обстановке в арктических морях. По этим картам определяются ледовитость.

Анализ данных наблюдений за состоянием ледяного покрова арктических морей показал, что площадь льдов, их толщина, сплоченность и другие характеристики заметно изменялись во времени.

Для исследования толщины морского льда в Карском море были привлечены данные спутника CryoSat-2. Составлена сетка, в точках которой, по данным CryoSat-2 получена толщина морского льда для зимнего периода (ноябрь-апрель) 2010-2016 гг.

Сопоставление данных OSISAF (старый/молодой лед) и данных CryoSat-2 (численные значения толщины льда) в Карском море (2010-2016) показало:

1. Старый лед (подвергался таянию, по крайней мере в течение одного лета) имеет невысокое среднее квадратичное отклонение. Средние значения 0,18–0,33. В Карском море с 2010 его толщина превышает 180 см и достигает толщины порядка 320 см.

2. Поведение толщины однолетнего льда нестабильно (скачки вверх в ноябре 2012 и в декабре 2013, скачки вниз в январе 2013 и в январе 2014). Среднее квадратичное отклонение толщины однолетнего льда гораздо выше, как правило, по сравнению с StD старого льда. Средние значения от 0,32 до 0,6. Поэтому внутри этого класса «Однолетний лёд» целесообразно выделение нескольких подклассов: тонкий

однолетний (30–50 см); однолетний средней толщины (70–20 см); толстый однолетний более (120 см).

Изменение толщины старого и молодого льда сопоставляли по двум зимним периодам (2010–2011, 2015–2016) (наиболее полные данные) (рисунки 1, 2). Пунктирными линиями обозначены значения среднего квадратичного отклонения.

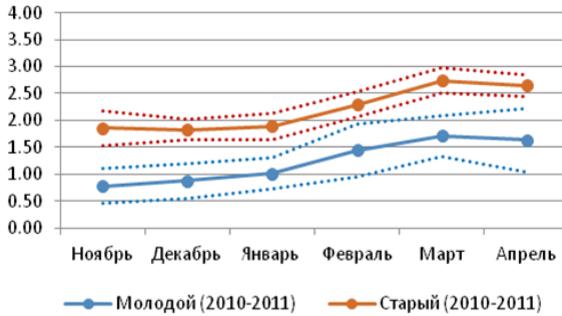


Рисунок 1 – Динамика толщины молодого и старого льда (2010–2011 гг.)

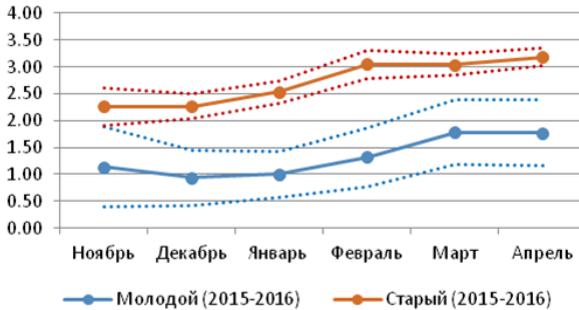


Рисунок 2 – Динамика толщины молодого и старого льда (2015–2016 гг.)

В результате проведенного исследования для оценки воздействия различных естественных и антропогенных факторов на изменение продуктивности растительного покрова полуострова использован индекс NDVI, характеризующий продуктивность растительности. Выделены области полной деградации растительного покрова [5].

Анализ данных о ледовой обстановке Арктики показал, что площадь льдов и их толщина заметно изменяются во времени, что свидетельствует об изменении климата. Данная тенденция подтверждена

анализом данных института Арктики и Антарктики, а также данными наших исследований.

### **Библиографический список**

1. Сысоева Т.Г., Ковалевская Н.М., Хворова Л.А. Исследование синергизма глобального потепления климата и хозяйственного освоения территорий методами ДЗЗ // Сб. трудов XIX всесоюзная конференция по математике «Математики – Алтайскому краю (МАК-2016)». – Барнаул, 1-5 июля 2016. – С. 224–227.

2. Сысоева Т.Г., Ковалевская Н.М., Хворова Л.А. Анализ состояния растительности на основе индекса NDVI и данных спутника LandSat 8 // Труды молодых ученых Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2016. – С. 149-152

3. Сысоева Т.Г., Ковалевская Н.М., Хворова Л.А. Оценка биологической продуктивности ландшафтов с использованием дистанционных методов зондирования Земли // Политехническая неделя в Санкт-Петербурге: материалы научного форума с международным участием. Кафедра водохозяйственного и гидротехнического строительства. – Санкт-Петербург, 2016. – С. 323–326.

3. Романов А.Н., Ковалевская Н.М., Хворова Л.А., Сысоева Т.Г., Суковатов К., Шаповалов С.В. Анализ пространственных образов растительного покрова полуострова Ямал на основе данных дистанционного зондирования // Научный вестник Ямало-Ненецкого автономного округа. – Салехард, 2016. – С. 45–52.

4. Романов А.Н., Хвостов И.В., Уланов П.Н., Ковалевская Н.М., Кириллов В.В., Плуталова Т.Г., Кобелев В.О., Печкин А.С., Сеницкий А.И., Сысоева Т.Г., Хворова Л.А., Космический мониторинг арктических и субарктических территорий Ямало-Ненецкого округа. – Барнаул: Изд-во ООО «Пять плюс», 2018. – 120 с.

## **УДК 004**

### **Автоматизированное решение задач в теории эпидемий с использованием Mathcad Prime**

*А.С. Шевченко, Н.Д. Химочкина*  
*РИ (филиал) АлтГУ, г. Рубцовск*

Системы компьютерной алгебры (СКА), как Maple [1], Matlab, Mathematica, Mathcad [2, 3] позволяют облегчить решение самых разнообразных математических задач, повысить интерес к обучению, а также расширить круг решаемых задач практического содержания.

В данной статье рассматривается задача о распространении эпидемии инфекционного заболевания в рамках одной популяции.

Для автоматизации решения данной задачи будем использовать систему автоматизированного проектирования Mathcad Prime 4. Mathcad содержит интегрированные между собой компоненты: мощный текстовый редактор, вычислительный и символьный процессоры, огромное хранилище справочной информации. Mathcad Prime имеет простой интерфейс и хорошие возможности визуализации.

Пусть функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  характеризуют число незараженных и зараженных особей в момент времени  $t$ . Известно, то в начальный момент времени  $x(0)=n$  и  $y(0)=a$ . Считается, что инфекция передается при встрече зараженных особей с незараженными. Тогда математическая модель имеет следующий вид [4]:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(n + a - x), x(0) = n,$$

$$y = a + n - x, y(0) = a,$$

$\beta$  коэффициент пропорциональности, характеризующий вероятность передачи инфекции при встрече. Численные результаты расчетов при различных  $\beta$  представлены на рисунках 1–2 ( $n=200$ ,  $a=100$ ).

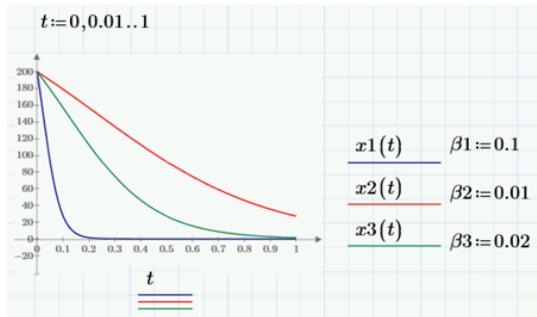


Рисунок 1 – Динамика уменьшения численности незараженных особей

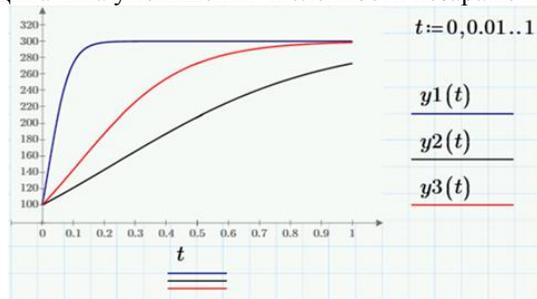


Рисунок 2 – Динамика увеличения численности зараженных особей

Из рисунков видно, что с увеличением  $\beta$  увеличивается скорость передачи инфекции и численность незараженных особей уменьшается.

Усовершенствованная модель образуется добавлением функции  $z(t)$ , которая характеризует процесс выздоровления больных особей.

Новая математическая модель может быть представлена следующей системой уравнений [4]:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy, \quad \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y, \quad \frac{dz}{dt} = \gamma y, \quad x + y + z = n + a,$$

$$x(0) = n, y(0) = a, z(0) = 0,$$

$\gamma$  характеризует степень выздоровления. Результаты решения данной задачи приведены на рисунках 3–5 ( $n=200$ ,  $a=100$ ,  $\beta = 0.01$ ).

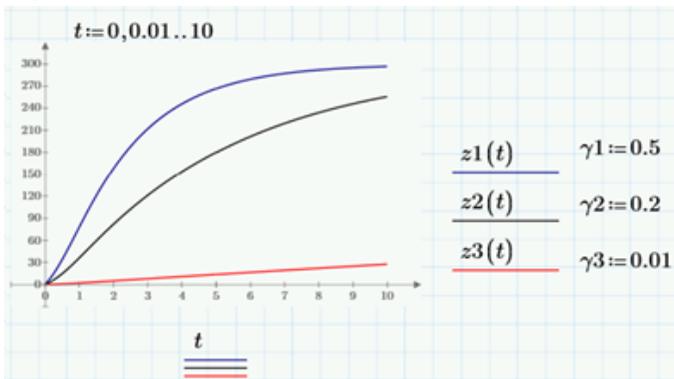


Рисунок 3 – Динамика увеличения численности выздоровевших особей

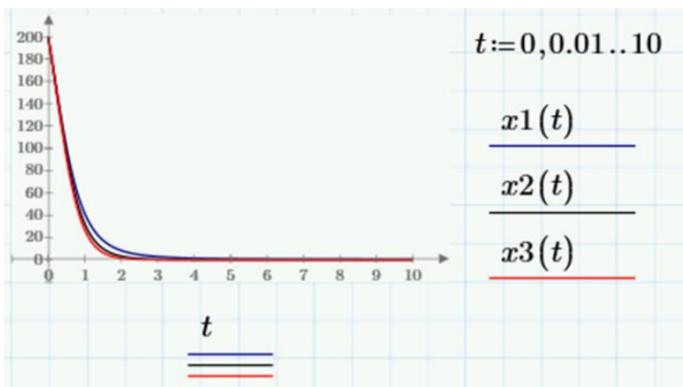


Рисунок 4 – Динамика уменьшения численности незараженных особей

Видно, что с ростом  $t$  все особи успевают заболеть, т.е. величина  $x(t)$  падает до нуля. Численность зараженных особей  $y(t)$  сначала растет, но затем уменьшается в связи с их выздоровлением. При  $t$  стремящейся к бесконечности модель предсказывает полное выздоровление всех особей.

Таким образом, разработанный файл в САПР Mathcad Prime можно использовать для решения конкретных задач в теории эпидемий.

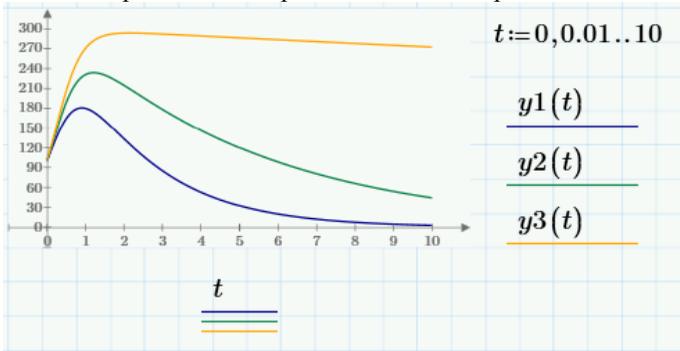


Рисунок 5 – Динамика уменьшения численности зараженных особей

### Библиографический список

1. Шевченко А.С. Применение математического пакета Maple к решению вариационных задач на условный экстремум. Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ». 2016. Том 7, № 2. С. 246–260 [Электронный ресурс]. URL: [http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles-2016/TGU\\_7\\_91.pdf](http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles-2016/TGU_7_91.pdf) (дата обращения: 8.12.2017).
2. Шевченко А.С. Автоматизированное решение вариационных задач на условный экстремум. // Современная наука: проблемы и пути их решения: Сборник материалов Международной научно-практической конференции. Том II. – Кемерово: КузГТУ, 2015. – С. 325–328.
3. Химочкина Н.Д. Использование САПР MATHCAD PRIME 4.0 для решения транспортных задач линейного программирования // Роль технических наук в развитии общества: сборник материалов III Международной научно-практической конференции. Выпуск 3. – Кемерово: ЗапСибНЦ, 2018. – С. 40–43.
4. Задачи математической экологии и пакет Maxima: учебное пособие / Зарипов Ш.Х., Абзалилов Д.Ф., Костерина Е.А. – Казань: Изд-во Казанского федерального университета, 2015. – 120 с.

## УДК 519.8

**Исследование влияния материнского капитала  
на уровень рождаемости в Сибирском федеральном округе***О.С. Юрченко, А.С. Маничева**АлтГУ, г. Барнаул*

Политика стимулирования рождаемости играет важную роль в воспроизводстве населения, однако, изучение степени воздействия ее на отдельные демографические группы остается актуальным в наши дни. Низкий уровень рождаемости ведет к сокращению населения, из чего следует уменьшение доли молодых людей в его структуре, что представляет значимый демографический риск для развития страны.

Введенный материнский капитал в России стал ключевым в плане поддержки семей с детьми и непосредственное изучение влияния данного фактора на демографический процесс является неотъемлемым для оценки качества данной меры поддержки семей.

Оценка эффективности факторов является одной из основополагающих подобных исследований, поэтому целью данного исследования является оценка эффективности материнского капитала как средства регулирования демографического процесса.

Для нахождения степени влияния материнского капитала на показатель рождаемости были построены модели регрессии на основе данных по Сибирскому федеральному округу за 2000–2016 гг.:

1. Общий коэффициент рождаемости (число родившихся на 1000 человек населения) ( $y$ ).
2. ВВП/ВРП на душу населения (руб.) ( $x_1$ ).
3. Среднедушевые доходы населения (рублей в месяц) ( $x_2$ ).
4. Размер материнского капитала (тыс. рублей) ( $x_3$ ).
5. Использование свежей воды (миллионов кубических метров) ( $x_4$ ).
6. Численность среднего медицинского персонала (на 10 000 человек населения) ( $x_5$ ).
7. Прерывание беременности (аборты) (на 1000 женщин) ( $x_6$ ).
8. Число больничных коек (на 10 000 человек населения) ( $x_7$ ).
9. Средние цены на первичном рынке жилья (в процентах к концу предыдущего периода) ( $x_8$ ).
10. Заболеваемость на 1000 человек ( $x_9$ ).
11. Общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя (квадратных метров) ( $x_{10}$ ).
12. Общий коэффициент рождаемости (число родившихся на 1000 человек населения) ( $y$ ).

Построенные модели были двух типов: М1 – с учетом материнского капитала, М0 – без учета. После исключения незначимых факторов модели приняли следующий вид:

$$M1: y = -13,89 - 0,00003x_1 - 0,00047x_2 + 0,00001x_3 + 0,22x_5;$$

$$M0: y = 1,27 - 0,00002x_1 + 0,27x_5 - 0,18x_7 + 0,00012x_8.$$

По моделям были рассчитаны коэффициенты рождаемости и был построен прогноз на 2017–2019 года. Средняя погрешность по модели М1 составила 2%, по М0 – 2%. Среднее отклонение по прогнозным значениям: 4%. На графике наглядно показано, насколько значения по моделям отличны от фактических данных.



Рисунок 1 – График коэффициентов рождаемости

На прогнозируемый период 2017–2019 гг. модель с учетом материнского капитала М1 не показала высоких значений показателя рождаемости, что, с одной стороны, может показаться странным, а с другой очевидным фактом. Одним из объяснений можно назвать неизменную сумму материнского капитала, которая заморожена до 2020 года, следовательно, с таким значимым фактором, как материнский капитал, рождаемость остается на неизменном уровне. Следующий момент в том, что на рождаемость влияет не один отдельный фактор, а совокупность факторов.

В итоге было определено, что один из главных стимуляторов демографической ситуации в стране не является на данный момент эффективным настолько, чтобы обеспечить банального воспроизводства населения, что было показано на примере Сибирского федерального округа.

УДК 536.25

**Исследование влияния продольных градиентов  
температуры на интенсивность испарения жидкости  
в двухслойной системе на основе точных решений**

*Е.В. Резанова*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Исследование конвективных течений, сопровождающихся тепло- и массопереносом через границы раздела, в настоящее время является весьма актуальной задачей и осуществляется как экспериментально, так и теоретически [1–4]. В настоящей работе изучаются двухслойные течения жидкости и газопаровой смеси в горизонтальном канале с твердыми непроницаемыми стенками. На термокапиллярной границе раздела учитывается испарение, а в верхнем слое системы принимаются во внимание эффекты Соре и Дюфура [2].

Математическое моделирование исследуемых процессов проводится на основе точных решений уравнений Навье – Стокса в приближении Обербека–Буссинеска вида [4]

$$u_i = \frac{y^4}{24} S_4^i + \frac{y^3}{6} S_3^i + \frac{y^2}{2} c_1^i + y c_2^i + c_3^i, \quad (1)$$

$$v_i = 0, \quad (2)$$

$$T_i = (A + a_2^i y) x + \frac{y^7}{1008} L_7^i + \frac{y^6}{720} L_6^i + \frac{y^5}{144} L_5^i + \frac{y^4}{24} L_4^i + \frac{y^3}{6} L_3^i + \frac{y^2}{2} L_2^i + y c_4^i + c_5^i, \quad (3)$$

$$C = (b_1 + b_2 y) x + \frac{y^7}{1008} N_7^i + \frac{y^6}{720} N_6^i + \frac{y^5}{144} N_5^i + \frac{y^4}{24} N_4^i + \frac{y^3}{6} N_3^i + \frac{y^2}{2} N_2^i + y c_6^i + c_7^i, \quad (4)$$

$$p_i' = \left( \frac{y^2}{2} k_2^i + y k_1^i + k_0^i \right) x + \frac{y^7}{1008} K_7^i + \frac{y^6}{720} K_6^i + \frac{y^5}{144} K_5^i + \frac{y^4}{24} K_4^i + \frac{y^3}{6} K_3^i + \frac{y^2}{2} K_2^i + y K_1^i + c_8^i, \quad (5)$$

где  $u_i$  - продольная скорость,  $T_i$  - температура,  $C$  - концентрация пара в газе в верхнем слое системы,  $p_i'$  - модифицированное давление (от-

клонение от гидростатического давления). Функции и параметры с индексом  $i = 1$  определяют течение жидкости, индекс  $i = 2$  используется для описания характеристик газопарового слоя. Коэффициенты  $S_3^i$ ,  $S_4^i$ ,  $L_j^i$ ,  $N_j^i$ ,  $K_m^i$ ,  $k_n^i$  ( $j = 2, \dots, 7$ ;  $m = 1, \dots, 7$ ;  $n = 0, \dots, 2$ ) зависят от физико-химических параметров системы «жидкость – газ»,  $c_l^i$  ( $l = 1, \dots, 8$ ) являются неизвестными константами интегрирования.

На твердых стенках канала выполняются условия прилипания для скорости, температура распределена линейно относительно продольной координаты. Концентрация пара на верхней границе системы удовлетворяет либо условию полного поглощения пара, либо условию отсутствия потока пара с учетом эффекта термодиффузии. На термокапиллярной границе раздела полагаются выполненными кинематическое и динамическое условия, условия непрерывности скорости и температуры, условие баланса масс с учетом эффекта Соре, условие переноса тепла с учетом эффекта Дюфура. Концентрация насыщенного пара может быть найдена с помощью следствия уравнений Менделеева–Клапейрона и Клапейрона–Клаузиуса, используемого здесь в линеаризованном виде [3]. Для замыкания постановки задачи необходимо задавать расход газа в верхнем слое системы. С помощью названных граничных условий задачи определяются неизвестные константы интегрирования в выражениях (1)–(5). Таким образом, определены функции продольной скорости, давления, температуры и концентрации пара, а также массы испаряющейся на границе раздела жидкости.

Дополнительный интерес представляет исследование влияния различных факторов на интенсивность испарения. Выражение, определяющее константу  $M$  (массовую скорость испаряющейся жидкости) представляет собой линейную функцию от расхода газа в верхнем слое системы  $Q$ . Зависимость  $M$  от продольного градиента температуры на границе раздела сред  $A$  и толщины жидкого слоя  $l$  имеет следующий вид:

$$M = \sum_{i,j} A^i l^j f_j^i / \sum_k l^k f_k^i, \quad (6)$$

где  $i = 0, \dots, 2$ ,  $j = 0, \dots, 9$ ,  $k = 0, \dots, 3$ , а коэффициенты  $f_j^i$ ,  $f_k^i$  зависят от физико-химических параметров исследуемых сред.

Рассмотрим полученную зависимость (6) на примере системы «жидкость – газ» типа «НФЕ-7100 – азот». Расход газа  $Q$  при этом выбран равным  $3.6 \cdot 10^{-4}$  г/(см<sup>2</sup>·с). На рисунке 1 проиллюстрировано влияние продольного градиента температуры на термокапиллярной границе и толщины жидкого слоя на массу испаряющейся с границы раздела сред жидкости (формула (6)). Зависимость функции  $M$  от продольного

градиента  $A$  носит параболический характер либо близкий к нему (см. рисунок 1а). При этом наиболее интенсивное испарение жидкости наблюдается для значения толщины нижнего слоя системы равного 0.3 см. Аналогичный результат продемонстрирован на рисунке 1б. Отметим, что данная качественная зависимость была получена в результате экспериментальных исследований [4].

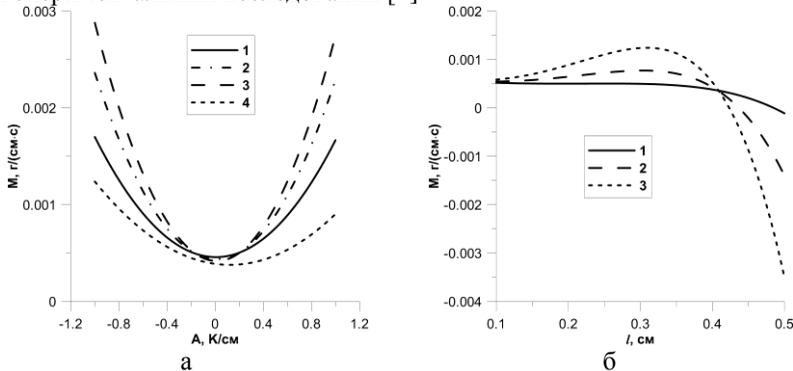


Рисунок 1 - Зависимость значения массы испаряющейся жидкости от а) продольного градиента температуры на границе раздела при различных значениях толщины жидкого слоя (1 -  $l = 0.2$  см, 2 -  $l = 0.25$  см, 3 -  $l = 0.3$  см, 4 -  $l = 0.4$  см); б) толщины слоя жидкости при различных значениях продольного градиента температуры (1 -  $A = 0.2$  К/м, 2 -  $A = 0.4$  К/м, 3 -  $A = 0.6$  К/м).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-08-00291).*

### Библиографический список

1. Шлиомис М.И., Якушин В.И. Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Ученые записки Пермского государственного университета, серия Гидродинамика: Сб. науч. тр. - 1972. - № 4. - С. 129–140.
2. Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Люлин Ю.В., Кабов О.А. Изучение конвективных течений жидкости и спутного потока газа с учетом испарения // ТВТ. - 2017. - Т. 55, № 6. - С. 720–732.
3. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях при наличии испарения на границе раздела // ПМТФ. - 2014. - № 2. - С. 68–79.
4. Lyulin Yu.V., Kabov O.A. Evaporative convection in a horizontal liquid layer under shear-stress // Int. J. Heat and Mass Transfer. - 2014. - N. 70. - P. 599–609.
5. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. - 1966. - № 3. - С. 69–72.

## НАШИ АВТОРЫ

*Абакумов Александр Иванович*, доктор физико-математических наук, профессор, Институт автоматизации и процессов управления (г. Владивосток), лаборатория математического моделирования биофизических процессов, заведующий, e-mail: abakumov@iacp.dvo.ru.

*Абзал Бейбитулы Тойганбаев*, магистрант кафедры математики ВКГУ имени С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан. e-mail: etoo\_91@mail.ru.

*Абрамова Анастасия Владимировна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: abramova.math@gmail.com.

*Алгazin Геннадий Иванович*, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики, профессор, e-mail: algaz46@yandex.ru.

*Алгизина Дарья Геннадьевна*, кандидат технических наук, Алтайский государственный университет, кафедра прикладной информатики в экономике, государственном и муниципальном управлении, доцент, e-mail: darya.algazina@mail.ru

*Алгизина Юлия Геннадьевна*, кандидат экономических наук, Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова, факультет информационных технологий, кафедра информационных систем в экономике, доцент, e-mail: algazina@inbox.ru.

*Алексеева Светлана Владимировна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: Obsveta09@gmail.com.

*Алия Солтанбеккызы*, магистрант кафедры математики ВКГУ имени С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан. e-mail: s.aliya91@mail.ru.

*Алябыхева Юлия Анатольевна*, кандидат педагогических наук, доцент кафедры информатики, факультет математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, e-mail: veryaeva@gmail.com.

*Аменова Фарида Сейткумаровна*, доктор PhD, доцент, Восточно-Казахстанский государственный университет имени С.Аманжолова, факультет естественных наук и технологий, кафедра математики, e-mail: faramen.74@mail.ru.

*Антонов Игорь Анатольевич*, e-mail: aia-1995@mail.ru.

*Апышев Оразбек Демесинович*, кандидат физико-математических наук, Восточно-Казахстанский государственный университет имени С. Аманжолова, профессор кафедры математики, г. Усть-Каменогорск, Казахстан; e-mail: apshevod\_47@mail.ru.

*Бабкина Наталья Сергеевна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: inf.asu@gmail.com.

*Бакшиев Айбек Калибекович*, Восточно-Казахстанский государственный университет имени С.Аманжолова, старший преподаватель кафедры математики, г. Усть-Каменогорск, Казахстан; e-mail: b.aibek86@mail.ru.

*Баранчук Владислав Александрович*, Югорский государственный университет, факультет прикладной математики и информатика, студент, г. Ханты-Мансийск, e-mail: Vladinho@mail.ru.

*Барсукова Татьяна Викторовна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, студентка 4 курса, e-mail: tatyana18.96@mail.ru.

*Баяк Анастасия Андреевна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, студент, e-mail: AnastasiaBayuk@gmail.com.

*Баянова Надежда Владимировна*, к.ф.-м.н., доцент, Алтайский государственный университет, кафедра алгебры и математической логики, доцент, e-mail: bayanova@math.asu.ru.

*Бейсебай Перизат Бейсебайқызы*, кандидат физико-математических наук, доцент, Казахский агротехнический университет имени С.Сейфуллина, факультет компьютерных систем и профессионального образования, кафедра высшей математики, e-mail: beisebai@mail.ru.

*Биттер Мария Александровна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, бакалавр.

*Богданова Рада Александровна*, Горно-Алтайский государственный университет, физико-математический и инженерно-технологический институт, старший преподаватель, e-mail: bog-rada@yandex.ru.

*Бойко Илья Юрьевич*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, студент, e-mail: boyan.94@mail.ru.

*Бондарович Андрей Александрович*, кандидат географических наук, доцент, Алтайский государственный университет, географический факультет, доцент, a9130262571@gmail.com.

*Будкин Александр Иванович*, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, заведующий кафедрой алгебры и математической логики, e-mail: budkin@math.asu.ru.

*Букасова Анастасия Константиновна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: nastushakb5@mail.ru.

*Быканов Дмитрий Владимирович*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, студент, e-mail: Vykanov.445@stud.asu.ru.

*Вараксин Сергей Владимирович*, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: varaksins@yandex.ru.

*Вараксина Наталья Владимировна*, кандидат социологических наук, Алтайский государственный университет, социологический факультет, доцент кафедры общей социологии, e-mail: varaksins@yandex.ru.

*Вершинина Марина Сергеевна*, ФКУ «ЦУКС ГУ МЧС России по ХМАО-Югре», отдел информационных технологий, АСУ и связи, старший инженер, e-mail: Marina-Kozachenko@yandex.ru.

*Вириц Рудольф Александрович*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: virtsrudolf@gmail.com.

*Гамова Алла Николаевна*, кандидат физико-математических наук, доцент, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского, факультет компьютерных наук и информационных технологий (КНИИТ), кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, доцент, e-mail: gamovaan@yandex.ru.

*Гиричева Евгения Евгеньевна*, кандидат физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН (г. Владивосток), лаборатория ма-

тематического моделирования биофизических процессов, старший научный сотрудник, e-mail: evg.giricheva@yandex.ru.

*Глебова Наталья Юрьевна*, Алтайский государственный университет, факультет математик и информационных технологий, магистрант, e-mail: tusja02-95@mail.ru.

*Гончарова Ольга Николаевна*, доктор физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, кафедра дифференциальных уравнений, профессор, e-mail: gon@math.asu.ru.

*Джандигулов Абдыгали Реджепович*, кандидат физико-математических наук, доцент, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, доцент кафедры алгебры и геометрии, Астана, Казахстан, e-mail: abeked@mail.ru.

*Досумбеков Кайрат Рахметуллинович*, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, факультет физики, математики и информационных технологий, старший преподаватель, e-mail: 75646100@mail.ru

*Досымова Маргарита Владимировна*, Рубцовский институт (филиал) Алтайского государственного университета, кафедра математики и прикладной информатики, e-mail: metzler@rb.asu.ru.

*Дронов Сергей Вадимович*, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, доцент кафедры математического анализа, e-mail: dsv@math.asu.ru.

*Екимовская Ольга Афанасьевна*, кандидат географических наук, Байкальский институт природопользования СО РАН, лаборатория геоэкологии, научный сотрудник, г. Улан-Удэ СО РАН, e-mail: oafe@mail.ru.

*Ергалиев Ерлан Кананиянович*, кандидат физико-математических наук, ВКГУ имени С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан, доцент кафедры математики, e-mail: ergali\_erlan@mail.kz.

*Ефремова Ольга Алексеевна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: 3669817@gmail.com.

*Жариков Александр Владимирович*, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, врио заведующего кафедрой информатики, e-mail: Zharikov@math.asu.ru.

*Жаксылыкова Жадра Рахметовна*, докторант PhD, старший преподаватель, Восточно-Казахстанский государственный университет имени С.Аманжолова, факультет естественных наук и технологий, кафедра математики, e-mail: zhaksylykova0507@mail.ru.

*Жанахметова Мадина Мараткызы*, Восточно-Казахстанский государственный университет имени С.Аманжолова, факультет естественных наук и технологий, кафедра математики, магистрант, e-mail: zh.madina.m@mail.ru.

*Журавлев Евгений Владимирович*, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: evzhuravlev@mail.ru.

*Журавлева Вера Владимировна*, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики, доцент, e-mail: vzhuravleva@mail.ru.

*Завьялова Кристина Николаевна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, студент, e-mail: kristina-zavyalova-1996@mail.ru.

*Испулов Нурлыбек Айдаргалиевич*, Павлодарский государственный университет, факультет физики, математики и информационных технологий, доцент, кандидат физико-математических наук, e-mail: ispulov.n@psu.kz.

*Кайырбеков Едил Алибекулы*, магистрант I курса Восточно-Казахстанского государственного университета имени С. Аманжолова, факультет естественных наук и технологий, кафедра математики, e-mail: Edil.vip95@mail.ru.

*Карлова Юлия Олеговна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, магистрант кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: terekhova.iulya@yandex.ru.

*Кирибаев Естай Иержанович*, Рубцовский институт (филиал) Алтайского государственного университета, кафедра математики и прикладной информатики, старший преподаватель, e-mail: kiribaev@rb.asu.ru.

*Кисельников Игорь Васильевич*, кандидат педагогических наук, доцент, Алтайский государственный педагогический университет, кафедра алгебры и методики обучения математике, доцент, e-mail: kiv@altspu.ru.

*Кисиков Танат Габитович*, Университет Калифорнии, Дэвис, США, докторант, департамент физики, e-mail: tanten84@mail.ru.

*Кислицин Алексей Владимирович*, кандидат физико-математических наук, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского (г. Омск), научный отдел, старший научный сотрудник; Алтайский государственный педагогический университет, институт физико-математического образования, доцент, e-mail: kislitsin@altspu.ru.

*Клепиков Павел Николаевич*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: klepikov.math@gmail.com.

*Клепикова Светлана Владимировна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, аспирант кафедры математического анализа, e-mail: klepikova.svetlana.math@gmail.com.

*Косолап Жанна Игоревна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: shanna200294@mail.ru.

*Костюк Кристина Игоревна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: KristinaMus@mail.ru.

*Костюшко Анна Валерьевна*, кандидат медицинских наук, доцент, Тихоокеанский медицинский университет (г. Владивосток), кафедра нормальной и патологической физиологии, доцент, e-mail: avkostyushko@gmail.com.

*Кочаровский Иван Александрович*, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, факультет компьютерных наук и информационных технологий, студент, e-mail: vanechka\_94@mail.ru.

*Кравченко Галина Владимировна*, кандидат педагогических наук, доцент; Алтайский государственный университет, кафедра дифференциальных уравнений, доцент, e-mail: kravchenko@math.asu.ru.

*Кондратьева Ольга Александровна*, Алтайский государственный технический университет, факультет информационных технологий, аспирант, e-mail: olenka\_kondrateva@mail.ru.

*Кротова Ольга Сергеевна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, студент, e-mail: kr.olga0910@gmail.com.

*Кузнецов Александр Евгеньевич*, Алтайский государственный педагогический университет, институт физико-математического образования, старший преподаватель, e-mail: kuznetsov\_ae@uni-altai.ru.

*Кузнецов Иван Владимирович*, кандидат физико-математических наук, ИГиЛ СО РАН (Новосибирск), лаборатория ММФП, научный сотрудник; НГУ (Новосибирск), ЛКЗ МСС ММФ, старший научный сотрудник, кафедра прикладной математики ММФ, ассистент, kuznetsov\_i@hydro.nsc.ru

*Куркина Мария Викторовна*, кандидат физико-математических наук, Югорский государственный университет, Институт (НОЦ) технических систем и информационных технологий, доцент, e-mail: mavi@inbox.ru

*Леонгардт Кристина Александровна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, магистрант кафедры ТКПМ, e-mail regencul@mail.ru.

*Линевич Любовь Андреевна*, кандидат педагогических наук, Алтайский государственный университет, колледж, отделение экономики и информационных технологий, преподаватель e-mail linevich-l@mail.ru.

*Лодейщикова Виктория Владимировна*, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, кафедра высшей математики, доцент, e-mail: lodeischikova@gmail.com.

*Лях Иван Андреевич*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, студент, e-mail: adizero707@mail.ru.

*Мадияров Мураткан Набенович*, кандидат технических наук, ВКГУ имени С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан, профессор кафедры математики, e-mail: madiyarov\_mur@mail.ru.

*Маничева Анастасия Станиславовна*, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики, доцент, e-mail: manichevaas@gmail.com.

*Маркелова Елена Владимировна*, доктор медицинских наук, профессор, Тихоокеанский медицинский университет (г. Владивосток), кафедра нормальной и патологической физиологии, заведующая кафедрой, e-mail: markev2010@mail.ru.

*Марченко Олеся Владимировна*, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, соискатель, e-mail: olemarchenko@yandex.ru.

*Мерззликина Дарина Александровна*, Алтайский государственный университет, отдел сопровождения научно-исследовательских, опытно-конструкторских и технологических работ, лаборант-исследователь, e-mail: happy-green@yandex.ru.

*Михалева Анастасия Валерьевна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: nasmik11@gmail.com.

*Монастырева Анна Сергеевна*, кандидат физ.-мат. наук, Алтайский государственный педагогический университет, институт физико-математического образования, доцент кафедры алгебры и методики обучения математике, e-mail: akuzminal@yandex.ru.

*Мошкин Николай Павлович*, доктор физико-математических наук, доцент, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, лаборатория фильтрации, ведущий научный сотрудник, e-mail: nikolay.moshkin@gmail.com.

*Мурзинцев Степан Витальевич*, аспирант, Алтайский государственный университет, кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: e-mailo.100@yandex.ru

*Мухамедиев Габит Хамитович*, кандидат физико-математических наук, доцент, Восточно-Казахстанский государственный университет имени С.Аманжолова, факультет естественных наук и технологий, кафедра математики, e-mail: gmukhamediev@mail.ru.

*Назик Л.*, магистрант, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

*Налимов Денис Петрович*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: nalimov@edu.asu.ru.

*Неупокоева Карина Геннадьевна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: k-neupokoeva@mail.ru.

*Ничкова Юлия Игоревна*, Алтайский государственный университет факультет математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: yulia\_alekhina@mail.ru.

*Нурканова Райхан Оразбековна*, кандидат педагогических наук, доцент, Казахстанский Национальный университет имени аль-Фараби, директор высшего колледжа, г. Алматы, Казахстан; e-mail: rnurkanova@mail.ru.

*Нурумжанова Куляш Алдонгаровна*, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, факультет физики, математики и информационных технологий, д.п.н., ассоциированный профессор (доцент), e-mail:75646100@mail.ru

*Орлов Вадим Борисович*, доктор педагогических наук, профессор, Югорский государственный университет.

*Орлова Дарья Сергеевна*, Югорский государственный университет, Институт технических систем и информационных технологий, студент, e-mail: longplaying96@gmail.com.

*Оскорбин Дмитрий Николаевич*, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, кафедра математического анализа, доцент, e-mail: oskorbin@yandex.ru.

*Оскорбин Николай Михайлович*, доктор технических наук, профессор, Алтайский государственный университет, кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики, профессор, e-mail: osk46@mail.ru.

*Оспанова Жулдыз Джумагалиевна*, Павлодарский государственный университет, факультет физики, математики и информационных технологий, преподаватель, e-mail: zhulduz-ospan@mail.ru.

*Павлова Наталья Валерьевна*, кандидат технических наук, доцент, Бийский технологический институт (филиал) Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова, кафедра естественнонаучных дисциплин, доцент, e-mail: pnaval@mail.ru.

*Пак Светлана Яковлевна*, кандидат технических наук, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН (г. Владивосток), лаборатория математического моделирования биофизических процессов, младший научный сотрудник, e-mail: packsa@iacp.dvo.ru.

*Папин Александр Алексеевич*, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, факультет математики и информацион-

ных технологий, кафедра дифференциальных уравнений, заведующий, e-mail: rapin@math.asu.ru.

*Петрова Анна Георгиевна*, доктор физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, профессор кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: annapetrova07@mail.ru.

*Пиянзин Алексей Илларионович*, кандидат медицинских наук, доцент, Алтайский государственный медицинский университет, факультет педиатрический, кафедра гистологии, эмбриологии, доцент, e-mail: bio777777@mail.ru.

*Плотникова Елена Александровна*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Новосибирского государственного технического университета, e-mail: pselena@gmail.com.

*Плотникова Елена Александровна*, кандидат физико-математических наук, доцент, Новосибирский государственный технический университет, кафедра высшей математики, e-mail: pselena@gmail.com.

*Пляскина Нина Ильинична*, доктор экономических наук, доцент, Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН, ведущий научный сотрудник, Новосибирск; Новосибирский Национальный исследовательский государственный университет (НГУ), профессор, e-mail: pliaskina@hotmail.com.

*Поликанова Ирина Викторовна*, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный педагогический университет, Институт физико-математического образования, кафедра математического анализа и прикладной математики, доцент, e-mail: anirix1@yandex.ru.

*Половикова Ольга Николаевна*, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, кафедра информатики, доцент, e-mail: ponOlgap@gmail.com.

*Поморов Никита Сергеевич*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, студент, e-mail: pomorov1994@mail.ru.

*Пономарев Игорь Викторович*, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, кафедра математического анализа, доцент, e-mail: igorpon@mail.ru.

*Понькина Елена Владимировна*, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики, доцент, e-mail: ponkinaelena77@mail.ru.

*Прищепов Александр Владимирович*, доктор наук, доктор, Университет Копенгагена, Дания; Институт Степей РАН, Оренбург, профессор, e-mail: alpr@ign.ku.dk.

*Пронь Сергей Петрович*, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики, доцент, e-mail: pspron@mail.ru.

*Пышнограй Григорий Владимирович*, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, декан, e-mail: pyshnograi@mail.ru.

*Резник Александр Львович*, доктор технических наук, заведующий лабораторией вероятностных методов исследования информационных процессов, Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, e-mail: reznik@iae.nsk.su.

*Родионов Евгений Дмитриевич*, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, профессор кафедры математического анализа, e-mail: edr2002@mail.ru.

*Резанова Екатерина Валерьевна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, кафедра информатики, старший преподаватель, e-mail: kategezanova@mail.ru.

*Рязанова Ольга Валентиновна*, Рубцовский институт (филиал) Алтайского государственного университета, кафедра математики и прикладной информатики, старший преподаватель, e-mail: guazanova@rb.asu.ru.

*Савиных Анна Владимировна*, магистрант, Алтайский государственный университет, Россия.

*Саженок Александр Николаевич*, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, кафедра математического анализа, заведующий, e-mail: san@math.asu.ru.

*Саженкова Елена Владимировна*, Новосибирский государственный университет экономики и управления, кафедра математики и естественных наук, старший преподаватель, e-mail: elsazh1977@gmail.com.

*Саженок Сергей Александрович*, доктор физико-математических наук, доцент, ИГиЛ СО РАН (Новосибирск), лаборатория ММФП, старший научный сотрудник; НГУ (Новосибирск), ЛКЗ МСС ММФ, ведущий научный сотрудник, кафедра теоретической механики ММФ, доцент; Хэйлунцзянский ун-т (Харбин), КРИ, профессор, sazhenkovs@yandex.ru

*Саженкова Татьяна Владимировна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, кафедра математического анализа, доцент, e-mail: sazhenkov\_an@mail.ru.

*Сан Джохани*, доктор наук, доктор, Институт исследования аграрных проблем в странах с переходной экономикой (IAMO), Германия, научный сотрудник, e-mail: Sun@iamo.de.

*Сарсекеева Сымбат Жаксыбековна*, Восточно-Казахстанский государственный университет имени С.Аманжолова, факультет естественных наук и технологий, кафедра математики, магистрант, e-mail: symbat.\_95@mail.ru.

*Сергеева Анастасия Михайловна*, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, заместитель директора по научной работе, e-mail: serg-nasty@mail.ru.

*Сибин Антон Николаевич*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: sibin\_anton@mail.ru.

*Славский Виктор Владимирович*, доктор физико-математических наук, Югорский государственный университет, кафедра высшей математики, профессор, e-mail: v\_slavskiy@ugrasu.ru.

*Смирнов Виталий Васильевич*, кандидат технических наук, доцент, Бийский технологический институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова», кафедра технологии машиностроения и качества, доцент, e-mail: v2s0@yandex.ru.

*Смолякова Лариса Ленгардовна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, кафедра информатики, старший преподаватель, e-mail: knaus.larisa@gmail.com.

*Соловьев Александр Анатольевич*, кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории вероятностных методов исследования информационных процессов, Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, e-mail: solowey@rambler.ru.

*Суханов Сергей Иванович*, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, Алтайский государственный университет, e-mail: sukhanov-s@yandex.ru.

*Сысоева Татьяна Геннадьевна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: sysoevatanya1995@gmail.com.

*Токарев Владимир Николаевич*, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, старший преподаватель, e-mail: tok321.1973@mail.com.

*Токарева Елизавета Викторовна*, аспирант, Алтайский государственный университет, e-mail: yadvig@yandex.ru.

*Токарева Маргарита Андреевна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, кафедра дифференциальных уравнений, старший преподаватель, e-mail: tma25@mail.ru.

*Токарева Екатерина Юрьевна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, бакалавр, e-mail: ketrin.sinel@mail.ru

*Топаж Александр Григорьевич*, доктор технических наук, доктор технических наук, Крыловский Государственный Научный Центр (г. Санкт-Петербург), самостоятельный сектор проектирования морских систем освоения шельфа, ведущий научный сотрудник, e-mail: alex.topaj@gmail.com.

*Торгов Андрей Владиславович*, научный сотрудник лаборатории вероятностных методов исследования информационных процессов, Институт автоматизации и электротометрии СО РАН, E-mail: torgov@iae.nsk.su.

*Туканаев Турар Дауренбекович*, кандидат физико-математических наук, доцент, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева (г. Астана), механико-математический факультет, кафедра алгебры и геометрии, доцент, e-mail: tukanaev\_t@mail.ru

*Тушкина Татьяна Михайловна*, кандидат физико-математических наук, доцент, Бийский технологический институт (филиал) Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова, кафедра естественно-научных дисциплин, доцент, e-mail: tanyamt@mail.ru.

*Тякунов Александр Сергеевич*, Югорский государственный университет (г. Ханты-Мансийск), Институт систем управления и информационных технологий, аспирант, e-mail: atyakunov@mail.com.

*Устюжанова Алла Владимировна*, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, доцент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: ustyuzhanova.pgs@math.asu.ru.

*Файзиева Галина Николаевна*, Рубцовский институт (филиал) Алтайского государственного университета, кафедра математики и прикладной информатики, старший преподаватель, e-mail: faizieva@rb.asu.ru.

*Фоменко Анастасия Павловна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, магистрант кафедры информатики, e-mail: nastena\_fomenko@list.ru.

*Фомина Анжела Владимировна*, кандидат физико-математических наук, Новокузнецкий институт (филиал) Кемеровского государственного университета, кафедра математики, физики и методики обучения (МФИМО), заведующий, e-mail: kafmfimo@mail.ru.

*Фрисман Ефим Яковлевич*, доктор биологических наук, член-корреспондент РАН, Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН (г. Биробиджан), директор, e-mail: frisman@mail.ru.

*Хворова Любовь Анатольевна*, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики, заведующий, e-mail: hla@math.asu.ru.

*Хромова Олеся Павловна*, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, кафедра математического анализа, доцент, e-mail: khromova.olesya@gmail.com.

*Цхай Александр Андреевич*, доктор технических наук, профессор, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, профессор; Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, факультет информационных технологий, профессор; Институт водных и экологических проблем СО РАН, главный научный сотрудник; e-mail: taa1956@mail.ru

*Черных Геннадий Георгиевич*, доктор физико-математических наук, профессор, Институт вычислительных технологий СО РАН, Лаборатория математического моделирования, главный научный сотрудник, e-mail: chernykh@ict.nsc.ru.

*Черпакова Надежда Анатольевна*, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, факультет информационных технологий, аспирант, e-mail: nadja-cherpakova@mail.ru.

*Черпакова Надежда Анатольевна*, Алтайский государственный технический университет, факультет информационных технологий, аспирант, e-mail: nadja-cherpakova@mail.ru

*Чешкова Мира Артемьевна*, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, профессор кафедры математического анализа, e-mail: sma@math.asu.ru, cheshkov@ab.ru.

*Шарый Сергей Петрович*, Институт вычислительных технологий СО РАН (г. Новосибирск), ведущий научный сотрудник, e-mail: shary@ict.nsc.ru.

*Шахова Светлана Александровна*, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: sashakhova@gmail.com.

*Шевченко Алеся Сергеевна*, кандидат физико-математических наук, Рубцовский институт (филиал) Алтайского государственного университета, доцент, e-mail: ibragimova.a.s@mail.ru.

*Шеларь Антон Юрьевич*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, студент, e-mail: shelaranton@gmail.com.

*Шимарев Константин Александрович*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: shishmarev.k@mail.ru.

*Шмидт Герд*, доктор наук, Университет Мартина-Лютера Галле-Витгенберг, Институт наук о Земле и географии, Германия.

*Эрнст Игорь Владиславович*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, студент, e-mail: igh@ya.ru

*Юрченко Ольга Сергеевна*, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, студент 4-го курса, yurchenkoolga07@gmail.com.

*Яковлев Анатолий Александрович*, Дальневосточный федеральный университет (г. Владивосток), кафедра информатики, математического и компьютерного моделирования, аспирант, e-mail: yakovlev.anatol@mail.ru.

*Янов Сергей Иванович*, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный педагогический университет, кафедра математического анализа и прикладной математики e-mail: ifmo-marpm@uni-altai.ru.

## Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
СЕКЦИЯ 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА.....	5
<i>Баянова Н.В.</i> Об $\alpha$ -аппроксимируемом многообразии $m$ -групп.....	5
<i>Будкин А.И.</i> Независимая аксиоматизируемость квазимногообразий групп .....	8
<i>Журавлев Е.В., Монастырева А.С.</i> О графах делителей нуля коммутативных локальных колец .....	11
<i>Кислицин А.В.</i> Замечание о гомоморфизмах мультипликативных векторных пространств .....	14
<i>Лодейщикова В.В.</i> Класс Леви, порожденный квазимногообразием $qH_2$ .....	16
<i>Шахова С.А.</i> О базисе класса Леви квазимногообразия, порождённого конечной $r$ -группой.....	19
СЕКЦИЯ 2. ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ .....	21
<i>Богданова Р.А.</i> Двухточечный инвариант группы движений симплицального пространства II типа .....	21
<i>Дронов С.В., Шеларь А.Ю.</i> Латентный кластерный анализ для случая двух кластеров .....	23
<i>Дронов С.В., Леонгардт К.А.</i> Оценивание силы пост-кластерной связи между формирующими показателями .....	26
<i>Клепиков П.Н., Родионов Е.Д.</i> Псевдоримановы эйнштейново-подобные метрические группы Ли с метрикой алгебраического солитона Риччи .....	29
<i>Клепикова С.В., Хромова О.П.</i> О 4-мерных локально-однородных псевдоримановых многообразиях с изотропным тензором Вейля .....	31
<i>Куркина М.В., Славский В.В., Тякунов А.С.</i> Метрики деревьев и псевдоевклидова геометрия .....	32
<i>Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В.</i> Поля Киллинга и солитоны Риччи на четырехмерных 3-симметрических лоренцевых многообразиях.....	36
<i>Плотникова Е.А., Саженок А.Н., Саженкова Т.В.</i> О вопросах сходимости комбинированных методов штрафных функций .....	36
<i>Поликанова И.В.</i> Канонический базис эники .....	40
<i>Туканаев Т.Д.</i> О восстановления поверхности по заданной сумме главных радиусов кривизны .....	44
<i>Чешкова М.А.</i> Инверсия псевдосферы.....	47
<i>Чешкова М.А.</i> К геометрии бутылки Клейна на сфере $S^3$ в $E^4$ .....	50
СЕКЦИЯ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ .....	53

<i>Алексеева С.В., Папин А.А.</i> Разрешимость одномерной задачи двухфазной фильтрации с переменной пористостью .....	53
<i>Вириц Р.А., Папин А.А.</i> Одномерная задача фильтрации несжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде .....	56
<i>Глебова Н.Ю., Папин А.А.</i> Автомодельное решение задачи абляции деформируемого ледового покрова .....	60
<i>Гончарова О.Н.</i> Математические модели конвективных течений в условиях массопереноса на термокапиллярной границе раздела .....	63
<i>Завьялова К.Н., Шишмарев К.А.</i> Исследование формирования вынужденных гравитационных волн в канале, покрытом битым льдом .....	65
<i>Испулов Н.А., Оспанова Ж.Д., Кисиков Т.Г.</i> О распространении термоупругих волн в анизотропных средах. Структура матрицанта... ..	69
<i>Кузнецов И.В., Саженков С.А.</i> Задача Коши–Дирихле для квазилинейного ультра-параболического уравнения колмогоровского типа .....	74
<i>Марченко О.В., Сергеева А.М.</i> Деформирование упругой пластины конечной толщины под действием подвижной нагрузки .....	77
<i>Мерззликина Д.А., Пышнограй Г.В., Черпакова Н.А.</i> Нелинейная теория вязкоупругости расплавов разветвленных полимеров как следствие мезоскопического подхода к описанию их динамики.....	81
<i>Мошкин Н.П., Фомина А.В., Черных Г.Г.</i> Численное моделирование динамики областей перемешанной жидкости ненулевой плавучести в линейно стратифицированной среде.....	84
<i>Папин А.А.</i> Математические модели многофазной фильтрации .....	87
<i>Петрова А.Г.</i> Начально-краевые задачи течения вязкоупругой среды Максвелла.....	91
<i>Пышнограй Г.В., Кузнецов А.Е.</i> Исследование характера течений полимерного расплава в канале с внезапным сужением.....	93
<i>Пышнограй Г.В., Черпакова Н.А., Кондратьева О.А.</i> Моделирование нелинейных эффектов в мезоскопической теории полимерных жидкостей при их больших периодических деформациях .....	97
<i>Саженков С.А., Саженкова Е.В.</i> Обобщенная НBS-модель обтекания листа растения воздухом.....	100
<i>Сибин А.Н.</i> Расчет физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии и прогноз их разрушения .....	104
<i>Токарева М.А.</i> Корректность начально-краевых задач для уравнений фильтрации в пороупругих средах.....	107
<i>Устюжанова А.В., Кравченко Г.В.</i> Численное решение задачи консолидации Терцаги в программном комплексе Abaqus .....	110

<i>Шимарев К.А.</i> Поведение прогибов ледового покрова в канале при больших временах .....	113
<i>Янов С.И.</i> Асимптотика решения второй начально-краевой задачи для системы Соболева.....	117
<b>СЕКЦИЯ 4. ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ</b> .....	119
<i>Баранчук В.А.</i> Анализ юзабилити сайтов университетов Ханты-Мансийского округа – Югры.....	119
<i>Бойко И.Ю.</i> Ледж-коэффициент корреляции и его применение в задачах бинарной классификации .....	121
<i>Жаксылыкова Ж.Р.</i> Об одном итерационном методе решения эллиптического уравнения.....	124
<i>Жариков А.В., Быканов Д.В., Бондарович А.А., Понькина Е.В.</i> Разработка сервиса для структурирования и обработки метеорологических данных .....	128
<i>Кочаровский И.А., Гамова А.Н.</i> Защита программного обеспечения от нелегального использования с помощью сетей Петри.....	131
<i>Нахимов Д.П.</i> Анализ методов машинного обучения для решения задач медицинского профиля .....	135
<i>Павлова Н.В., Смирнов В.В., Тушкина Т.М.</i> К вопросу о реализации динамических лабиринтов .....	137
<i>Половикова О.Н., Бабкина Н.С., Смолякова Л.Л.</i> Анализ проблематики тематического моделирования .....	139
<i>Половикова О.Н.</i> Возможности логического языка для решения задач на основе программной генерации фактов.....	142
<i>Резник А.Л., Соловьев А.А., Торгов А.В.</i> Программные и комбинаторные методы анализа случайных изображений .....	144
<i>Рязанова О.В., Досымова М.В., Кирибаев Е.И.</i> Возможности технологии краудсорсинга для студентов направления подготовки «Прикладная информатика» .....	148
<i>Токарева Е.Ю.</i> Применение компилятора MATLAB для создания независимых приложений.....	151
<i>Тушкина Т.М., Павлова Н.В., Смирнов В.В.</i> Информационная система для перерасчета учебной нагрузки преподавателей .....	156
<i>Цхай А.А., Мурзинцев С.В.</i> Разработка компьютерной системы обработки больших данных для персонифицированного анализа особенностей генома .....	157
<b>СЕКЦИЯ 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ, ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ</b> .....	161
<i>Алгazin Г.И.</i> О механизмах формирования олигопольных рынков с конкурентоспособными агентами .....	161

<i>Алгazin Г.И., Алгазина Д.Г.</i> О задаче оптимизации структур ответственности на конкурентных рынках .....	163
<i>Алгазина Ю.Г.</i> Моделирование поведения посредников в торговых системах товарами .....	167
<i>Вараксин С.В., Вараксина Н.В.</i> Моделирование динамики показателя ожидаемой продолжительности жизни населения Алтайского края методом нечеткой линейной авторегрессии.....	169
<i>Вершинина М.С.</i> Анализ предположений о стационарности некоторых временных рядов.....	172
<i>Екимовская О.А.</i> К вопросу об исследовании производственной деятельности в хозяйствах населения Республики Бурятия .....	176
<i>Ергалиев Е.К., Тойганбаев А.Б., Солтанбеккызы А.</i> Неявные итерационные схемы для стационарных задач гидродинамики.....	179
<i>Косолап Ж.И., Оскорбин Н.М.</i> Компьютерное моделирование причинно-следственных связей в предположения конглоэнтного анализа .....	182
<i>Костюк К.И.</i> Обзор моделей некооперированной олигополии .....	183
<i>Мадияров М.Н., Оскорбин Н.М., Суханов С.И.</i> Исследование точности интервальных оценок в задачах моделирования процессов .....	187
<i>Михалева А.В.</i> Исследование применения математической модели линейного программирования для оптимизации транспортного маршрута (на примере автотранспортных грузоперевозок Москва – Калининград) .....	192
<i>Ничкова Ю.И., Оскорбин Н.М.</i> Математическое моделирование линейных процессов по наблюдениям с интервальными ошибками.	194
<i>Орлова Д.С.</i> Оценка финансовой устойчивости предприятия с использованием динамического норматива .....	196
<i>Пляскина Н.И.</i> Проектирование институциональных условий эффективной реализации ресурсных мегапроектов с использованием игровой модели .....	199
<i>Пономарев И.В.</i> Об одном методе проверки статистических данных на наличие выбросов .....	203
<i>Токарева Е.В., Пронь С.П.</i> Актуализация программы капитального ремонта многоквартирных домов с использованием нейтрософских компонентов .....	205
<i>Суханов С.И., Оскорбин Н.М.</i> Решение задачи «линейная засечка» методом центра неопределенности .....	209
<i>Фоменко А.П.</i> О максимально различных кластерных разбиениях конечного множества .....	211
<i>Шарый С.П.</i> Выявление выбросов в методе максимума согласования при анализе интервальных данных .....	215

<i>Яковлев А.А., Маркелова Е.В., Костюшко А.В., Абакумов А.И.</i>	
Сравнительный анализ концентрации цитокина ИЛ-10 при различных схемах лечения пневмонии .....	219
<b>СЕКЦИЯ 6. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ .....</b>	<b>223</b>
<i>Алябышева Ю.А.</i> Алгоритм Дейкстры поиска кратчайшего пути в графе с использованием строковых матриц смежности .....	223
<i>Бабкина Н.С., Смолякова Л.Л.</i> Прикладное направление тематического моделирования в учебном процессе .....	227
<i>Бакишев А.К., Аменова Ф.С.</i> Некоторые вопросы численного решения двумерных разностных уравнений.....	228
<i>Бакишев А.К., Нурканова Р.О., Апышев О.Д.</i> Применение векторов при решении задач по элементарной математике .....	232
<i>Баянова Н.В., Лодейщикова В.В.</i> Математический квест как современная форма промежуточного контроля.....	235
<i>Джандигулов А.Р., Тлепбай К.</i> Дистанционное обучение дискретной математике .....	238
<i>Джандигулов А.Р., Назик Л.</i> Метод сопряженных градиентов для решения систем линейных алгебраических уравнений .....	240
<i>Кисельников И.В.</i> Самоучитель решения математической задачи как средство обучения элементарной математике студентов бакалавриата педагогического вуза .....	243
<i>Кравченко Г.В., Устюжанова А.В.</i> Применение системы Moodle для организации дистанционной поддержки образовательного процесса в вузе .....	245
<i>Линевич Л.А., Кравченко Г.В.</i> Использование балльно-рейтинговой системы для оценивания компетенций студентов вуза по математическим дисциплинам в среде Moodle.....	248
<i>Лях И.А., Кравченко Г.В.</i> Разработка электронного учебного пособия по курсу «История и методология математики и информатики» .....	252
<i>Мухамедиев Г.Х., Бейсебай П.Б.</i> Об одной методике изложения темы «Построение решения линейного уравнения с постоянными коэффициентами произвольного порядка» .....	257
<i>Нурумжанова К.А., Досумбеков К.Р.</i> Из опыта конструирования инновационных технологий изучения физических эффектов в системе профессионального образования .....	260
<i>Плотникова Е.А., Саженкова Е.В.</i> О методологии преподавания математических дисциплин на технических и экономических направлениях подготовки .....	269

<i>Сажеников А.Н., Саженикова Т.В.</i> Студенческие математические олимпиады – средство развития у студентов математического творческого потенциала .....	272
<i>Смолякова Л.Л.</i> Методика преподавания курса «Основы программирования» .....	274
<i>Токарев В.Н., Токарева Е.В.</i> Повышение мотивации учащихся на занятиях по математике через наработку техники некоторых вычислений .....	278
<i>Файзиева Г.Н.</i> Интеграция содержания образования как средство развития профессионального интереса студентов .....	281
<i>Шевченко А.С.</i> Использование системы компьютерной алгебры Maple для решения вариационных задач .....	288
<b>ЧАСТЬ II. МАТЕРИАЛЫ МОЛОДЕЖНОЙ ПРИКЛАДНОЙ ИТ ШКОЛЫ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЭКОЛОГИИ</b> .....	293
<i>Баяк А.А.</i> Исследование аналитического решения математической модели производства биогаза из растительного сырья .....	293
<i>Биттер М.А., Понькина Е.В.</i> Пространственный анализ факторов миграции сельской молодежи в Алтайском крае .....	297
<i>Букасова А.К., Абрамова А.В.</i> Анализ агентных моделей динамики популяции методом рекуррентных диаграмм .....	303
<i>Гиричева Е.Е.</i> Моделирование вертикальной структуры фитопланктона с учетом активных перемещений зоопланктона .....	305
<i>Ефремова О.А.</i> Имитационное моделирование систем солнечного теплоснабжения в реальных климатических условиях .....	307
<i>Журавлева В.В., Барсукова Т.В.</i> Моделирование зависимости ширины годовичных колец деревьев от климатических условий .....	311
<i>Кайырбеков Е.А., Аменова Ф.С.</i> Определение валового выброса вредных веществ от автотранспорта на окружающую среду города Усть-Каменогорска .....	314
<i>Карлова Ю.О.</i> Моделирование гидротермического режима системы «почва – приземный слой воздуха» .....	317
<i>Колбина Е.А., Фрисман Е.Я.</i> Влияние оптимального промысла на менделевскую лимитированную популяцию .....	321
<i>Колбина Е.А., Абакумов А.И.</i> Изучение пространственно-временного распределения хлорофилла «а» в Беринговом море на основе спутниковых данных .....	324
<i>Кротова О.С., Хворова Л.А., Пиянзин А.И.</i> Методы и подходы глубокого обучения в изучении сахарного диабета у детей и подростков .....	327

<i>Мадияров М.Н., Хворова Л.А., Жанахметова М.М.</i> Математическое моделирование температурного режима на границе атмосфера-почва .....	329
<i>Мадияров М.Н., Сарсекеева С.Ж.</i> Численная реализация модели процесса загрязнения атмосферы .....	332
<i>Маничева А.С.</i> Анализ динамики экологической ситуации в районе Алтайского края на основе моделей линейной регрессии .....	336
<i>Неупокоева К.Г., Хворова Л.А., Букаев М.С.</i> Имитационные модели эволюции популяций .....	339
<i>Пак С.Я., Абакумов А.И.</i> Применение вертикальной модели биомасс для построения интегральных оценок фитопланктона по данным дистанционного зондирования озера Иссык-Куль .....	343
<i>Понькина Е.В., Бондарович А.А., Шмидт Г., Савиных А.</i> Прогнозирование актуальной эвапотранспирации на основе моделей скользящей регрессии (на примере сухой степи Алтайского края) ...	346
<i>Понькина Е.В., Маничева А.С., Прищепов А.В., Сан Д.</i> Роль семейной формы аграрного бизнеса в реализации стратегии устойчивого развития сельского хозяйства Алтайского края .....	351
<i>Сысоева Т.Г.</i> Использование дистанционных методов зондирования для выделения деградации растительности и определения толщины морского льда (на примере полуострова Ямал и Карского моря) .....	354
<i>Шевченко А.С., Химочкина Н.Д.</i> Автоматизированное решение задач в теории эпидемий с использованием Mathcad Prime .....	357
<i>Юрченко О.С., Маничева А.С.</i> Исследование влияния материнского капитала на уровень рождаемости в Сибирском федеральном округе .....	361
<i>Резанова Е.В.</i> Исследование влияния продольных градиентов температуры на интенсивность испарения жидкости в двухслойной системе на основе точных решений .....	363
<b>НАШИ АВТОРЫ</b> .....	366

**МАК : «Математики – Алтайскому краю»:  
сборник трудов всероссийской конференции по математике,  
посвященной памяти профессора кафедры дифференциальных  
уравнений С.С. Кузикову  
(часть I)**

**Материалы молодежной прикладной  
IT школы  
«Математические методы и модели в экологии»  
(часть II)**

*Научное издание*

**Оригинал-макет подготовлен  
С.С. Максимовой**

Публикуется в авторской редакции

Л Р 020261 от 14.01.97  
Н/К

---

Подписано в печать	28.06.2018	Формат 60×84/16
Бумага офсетная		Уч.-изд. л. 14,0
Заказ 325	Тираж 100 экз.	

---

Типография издательства Алтайского государственного университета,  
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66, тел. (385-2) 36-63-61, 364