

# О задаче вычисления функционалов Минковского цифровых пространств малых размерностей<sup>1</sup>

Бондарь А.В., Гнедко М.Е., Оскорбин Д.Н.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул  
artem.bondar.99@gmail.com, gnedko98@mail.ru, oskorbin@yandex.ru

## Аннотация

Статья посвящена исследованию функционалов Минковского в четырехмерном цифровом пространстве на основе расчетов трехмерного цифрового пространства. В работе выдвигается идея нахождения функционалов Минковского для трехмерного цифрового пространства, основанного на двумерном случае.

*Ключевые слова:* пиксель, воксель, цифровое пространство, функционал Минковского.

## 1. Введение

Достаточно точным инструментом моделирования и изучения пористых сред на сегодняшний день является актуальным и востребованным изучение функционалов Минковского. Например, их можно использовать при срезах томографа любого черно-белого изображения объекта реального мира. Иными словами, функционалы Минковского играют все более заметную роль в приложениях благодаря тому, что могут быть использованы для эффективной оценки морфологии материалов [1–5].

Эффективность использования функционалов Минковского обусловлена быстротой алгоритмов их вычисления — для цифровых пространств, например, существующие алгоритмы линейны по числу вокселей/пикселей области рассматриваемого цифрового изображения. Для двумерных и трехмерных цифровых изображений представлено множество алгоритмов, в которых вычисление сводится к проходу по целочисленным вершинам и суммированию с весами, которые заранее посчитаны. Для четырехмерных цифровых изображений описано малое количество различных изображений. Детальному описанию такого алгоритма, пригодного для практической реализации, посвящена предлагаемая статья [5].

## 2. Четырехмерное цифровое пространство

Рассмотрим функционалы Минковского цифровых пространств. В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^2$  рассмотрим решетку  $\mathbb{Z}^4$ , состоящую из точек с целочисленными координатами. Решетка  $\mathbb{Z}^4$  определяет разбиение всего пространства  $\mathbb{R}^4$  на четырехмерные воксели — кубы с единичной длины ребра, вершины которых расположены в узлах решетки  $\mathbb{Z}^4$  (рисунок 1) [5].

Очевидно, что любые два вокселя могут пересекаться лишь по целой трехмерной грани, двумерной грани, ребру либо по вершине. Цифровым пространством размерности 4 называется конечный набор 4-мерных вокселей  $K = \{q_1, \dots, q_N\}$ . Каждому цифровому пространству  $K$  отвечает подмножество  $|K| \subset \mathbb{R}^4$ , являющимся объединением всех вокселей  $q_i \in K$  и наделенное индуцированной из евклидова пространства топологией. Удобно считать, что  $|K|$  содержится в некоторой ограниченной области  $M$  пространства  $\mathbb{R}^4$ .

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено в рамках реализации программы поддержки научно-педагогических работников ФГБОУ ВО “Алтайский государственный университет”, проект “Символьные вычисления на многообразиях с метрикой”.

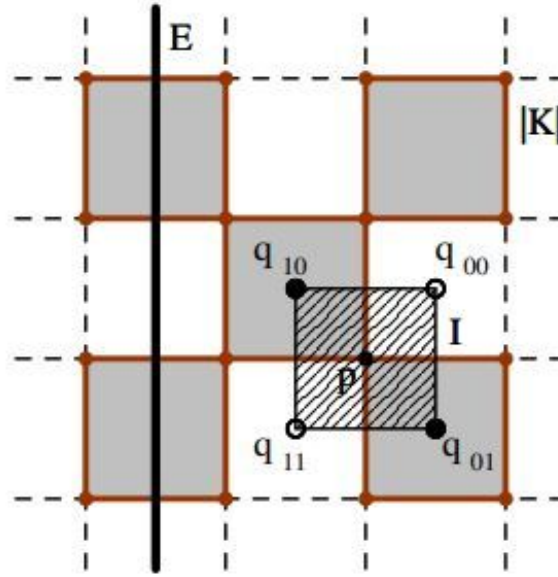


Рисунок 1. Фрагмент цифрового изображения, иллюстрация в размерности два

Назовем плоскость  $E_v$  размерности  $v$  в  $\mathbb{R}^4$  допустимой, если она параллельна какому-то  $v$  из четырех осей координат и проходит через точку с полуцелыми координатами (рисунок 1). Обозначим через  $\Pi_v$  множество всех допустимых плоскостей. Функционалы Минковского цифрового изображения  $K$  могут быть определены следующим образом:

$$V_v(K) = \frac{v!(4-v)!}{24} \sum_{E_v} \chi(|K| \cap E_v), \quad v = 0, 1, 2, 3, \quad V_4(K) = \chi(|K|),$$

где  $\chi$  – эйлерова характеристика. Подробное изложение теории представлено в источнике [5].

**Теорема 1.** Для цифрового изображения  $K$ , целиком расположенного в ограниченной области  $M \subset \mathbb{R}^4$ , функционалы Минковского  $V_v$ ,  $v = 0, 1, 2, 3, 4$ , могут быть вычислены в соответствии со следующей формулой:

$$V_v(K) = \frac{v!(4-v)!}{24} \sum_{p \in \mathbb{Z}^4 \cap M} \chi_v(p).$$

Доказательство теоремы показано в [5] источнике.

### 3. Идея алгоритма

В работе Богоявленской [5] приводится идея алгоритма вычисления функционалов Минковского размерности  $\mathbb{R}^4$  на основе расчетов функционалов в  $\mathbb{R}^3$ . Иными словами, попытаться перенести известные расчеты из размерности три в размерность четыре за счет вычисления локальных величин  $\chi_v$  зависящих только от типа окрестности точки, и затем их просуммировать. Подобная классификация с точностью до симметрии в размерности четыре является нетривиальной теоретической задачей, которая осложняется невозможностью визуализации окрестности четырехмерного цифрового изображения.

На первом этапе рассмотрим переход от размерности два к размерности три и составим алгоритм, основанный на классификации типов окрестностей в размерности три. На втором этапе будет производиться сравнение вычислительной скорости для трехмерного

случая (должно получиться менее 256 вариаций перебора, в отличие от источника [4], где “вручную” было получено 256 вариаций из 22 типов окрестностей с точностью до симметрии). В двумерном случае возможны 16 вариаций из 6 типов окрестностей с точностью до симметрии (рисунок 2).

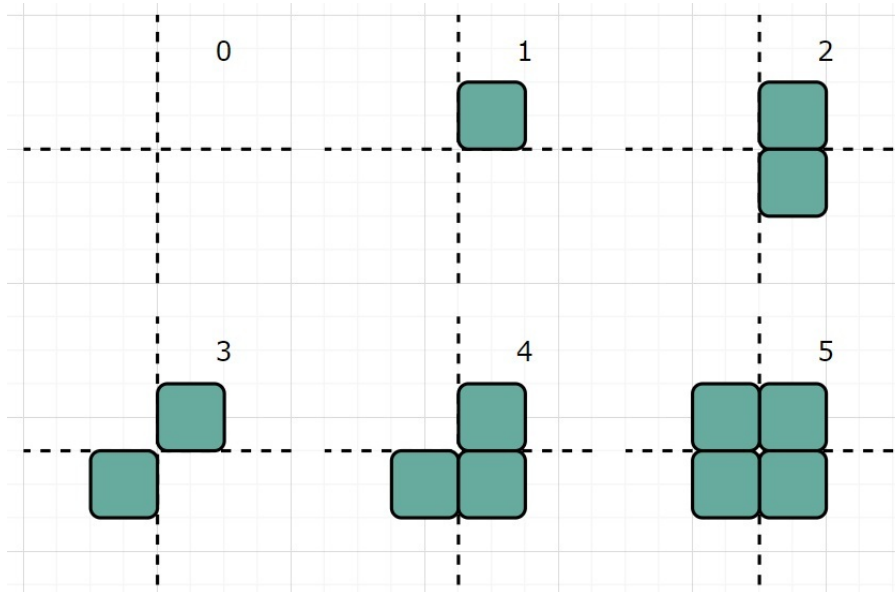


Рисунок 2. Шесть типов окрестностей с точностью до симметрии в  $\mathbb{R}^2$

#### 4. Реализация алгоритма перехода типа окрестности от двумерного пространства к трехмерному пространству

Опишем ввод данных следующим образом: по рисунку 2 произведем матричное преобразование, где 0 – пустая ячейка, 1 – ячейка, в которой находится пиксель. Таким образом, наши типы окрестностей будут представлены в следующем виде:

Таблица 1

Матричное представление типов окрестностей в двумерном цифровом пространстве

$c(U_{i,j})$	$a(U_{i,j})$
0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Где  $c(U_{i,j})$  – номер типа окрестности,  $a(U_{i,j})$  – матричное представление типа окрестности.

Далее опишем процесс перехода типов окрестностей от двумерного пространства к

трехмерному:

**Шаг 1.** Разобьем рассматриваемое цифровое трехмерное пространство на области размера 4 на 4 вокселя;

**Шаг 2.** Циклом от 1 до 4 отображаем на “этажи” типы окрестности из двухмерного пространства на области из предыдущего шага. Этжами будем называть совокупность вокселей размера 1 на 4 (рисунок 3);

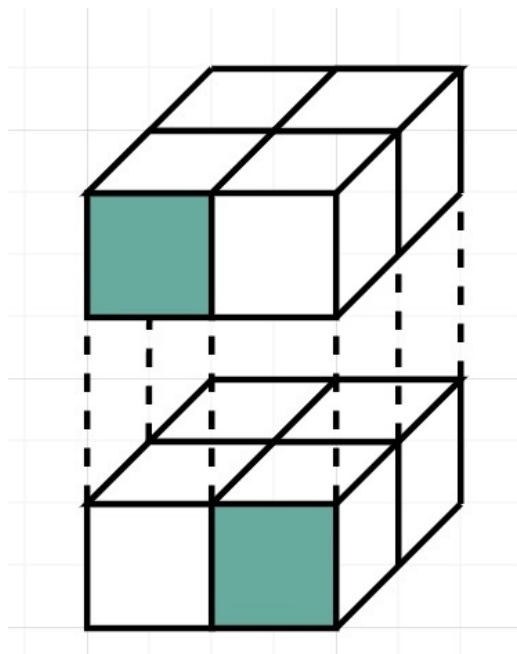


Рисунок 3. Этажи для области размера 4 на 4 вокселя

**Шаг 3.** Циклом от 1 до 4 повернем область по часовой стрелке;

**Шаг 4.** Полученный результат сравним с уже известными нам типами окрестностей из источника [4];

**Шаг 5.** Прodelываем вышеописанные шаги для оставшихся областей и суммируем их эйлеровы характеристики по свойству аддитивности.

В заключении стоит упомянуть о дальнейшем развитии работы, а именно, переход от трехмерного пространства к четырехмерному. Данный переход аналогичным образом будет опираться на результаты вычислений предыдущей размерности, что даст более короткий способ подсчета функционалов, по сравнению с источником [5].

## Список литературы

1. Arns C.H., Knackstedt M.A., Mecke K.R. Characterisation of irregular spatial structures by parallel sets and integral geometric measures // *Colloids and Surfaces A*. — 2015. — Vol. 24. — P. 352–359.
2. Arns C.H., Knackstedt M.A., Pinczewski W.V., Mecke K.R. Euler – Poincare’ characteristics of classes of disordered media. — Cambridge University Press, 2004.
3. Mecke K.R. Additivity, Convexity, and Beyond: Applications of Minkowski Functionals in Statistical Physics // *Lecture Notes in Physics*. — Berlin : Springer, 2000. — Vol. 554. — P. 100–130.
4. Базайкин Я.В. Лекции по вычислительной топологии: Учебно - метод. пособие / Новосибир. гос. ун-т. — Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2017. — 57 с.

5. Богоявленская О.А. О вычислении функционалов Минковского четырехмерных цифровых изображений. — М. : Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, 2020. — 170 с.