УДК 519.67

Теория узлов

Шимолина А.О., Оскорбин Д.Н.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
shimalinaa@mail.ru, oskorbin@yandex.ru

Аннотация

В данной работе рассматриваются общие сведения о теории узлов, способы задания узлов плоскими диаграммами. Рассматривается возможности применения SageMath для визуализации узлов. Представлены примеры.

Ключевые слова: теория узлов, узел, диаграмма, полином, инвариант, визуализация в SageMath.

Теория узлов является одним из актуальных на сегодняшний день разделов математики.

Определение 1. *Узел это — вложение окружности (одномерной сферы) в трёхмерное евклидово пространство, рассматриваемое с точностью до изотопии.*

Узел можно представлять, как тонкую запутанную веревку в пространстве, концы которой соединены. Эту веревку можно как угодно изгибать, сжимать или растягивать, но нельзя разрывать и склеивать. Всевозможные положения, которые может принимать при этом веревка, изображают один и тот же узел.

1. Возникновение теории узлов

Одним из основоположников теории узлов считается Уильям Томсон, размышлявший в середине 19 века о строении материи. Основных теорий на тот момент было две: корпускулярная и волновая. Томсон выдвинул гипотезу, что атомы, из которых состоит материя, являются не точечными объектами, а мельчайшими узлами и, что разные топологические свойства узлов соответствуют разным физическим и химическим свойствам атомов. А значит, важно классифицировать узлы и научиться определять, когда две веревки, на первый взгляд совершенно различные, представляют собой один и тот же узел.

Итак, на первый план встала математическая задача — задача классификации узлов. То есть, важно определить, когда два совершенно разных узла допускают изотопию. Частным случаем является задача о распознавании тривиальности того или иного узла, то есть о том, является ли заданный узел изотопным тривиальному узлу.

Определение 2. *Тривиальный узел — это образ вложения окружности в евклидово пространство, которое может быть непрерывно деформировано в стандартную окружность.*

Рисунок 1. Трилистник, восьмерка и тривиальный узел

Прежде чем пытаться развязывать узлы, нужно придумать разумный способ их задания. Идея, которая лежит в основе теории узлов, — это то, что узел можно представить в виде диаграммы.

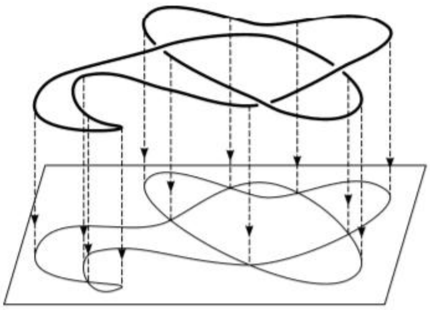

Рисунок 2. Проекция узла на плоскость

Определение 3. *Диаграмма узла – это проекция узла на какую-нибудь плоскость.*

Легко видеть, что такой диаграммы (рисунок 2) достаточно для того, чтобы задать узел с точностью до изотопии.

Именно в этот момент появилась задача о классификации соответствующих плоских кривых. Но заметим, что стоит совсем немного перекрутить тривиальный узел, как диаграмма изменится. Таким образом, возникла вторая задача теории узлов: распознать тривиальный узел в различных диаграммах узла.

2. Движение Рейдемейстера

В 1920 году в Германии Курт Рейдемейстер рассмотрел локально диаграмму узлов возле отдельных перекрестков и показал, что два узла изотопны, если их диаграммы переводятся друг в друга с помощью наборов простых движений. Он привел полный список этих движений и доказал, что этот набор является набором необходимых и достаточных движений. Каждое такое движение действует в небольшой области диаграммы и бывает одного из трёх типов:

Тип I (Ω_1). Скручивание и раскручивание в любом направлении.

Тип II (Ω_2). Перемещение одной петли целиком через другую.

Тип III (Ω_3). Перемещение нити целиком над или под пересечением.

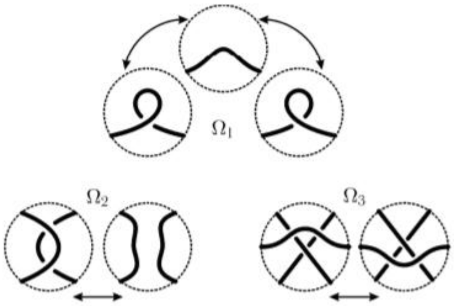

Рисунок 3. Преобразование Рейдеместера

Считалось, что этот набор решил главную задачу. Но возникли более сложные диаграммы узлов, с которыми движения Рейдемейстера не справляются.

Данная теория продолжала развиваться, но уже с большей точностью, то есть диаграммы рисовались в специальной форме, а не произвольной проекцией на плоскость. Принципиальная задача — построить наиболее эффективный алгоритм развязывания узла — по-прежнему актуальна.

3. Полином Конвея

Есть еще одно направление, связанное со сформулированной ранее задачей теории узлов. Пусть есть две запутанные диаграммы узлов, как понять, что это один и тот же узел? В основе лежит простая идея — каждому узлу нужно сопоставить единым образом какую-нибудь алгебраическую конструкцию – инвариант. Появилось понятие полинома узла. Узлу сопоставляется инвариант в виде многочлена, коэффициенты которого кодируют некоторые свойства данного узла. Подробнее о полиномах можно узнать в работе [1].

Эта идея развивалась очень быстро. Знаменитым открытием в теории узлов является полином Конвея 1973 года, который получил название — "Переброска Конвея". Главная идея постройки полинома состоит, в том, что мы должны описать как меняется этот полином, если мы изменяем вид перекрестков, то есть локально меняем узел, например, заменяем пересечение (рисунок 4). Тем не менее, несмотря на всю красоту конструкций, полином Конвея также не решает главную задачу.

Рисунок 4. Переброска Конвея

4. Инварианты Васильева

Большой вклад в исследовании узлов внес Виктор Васильев в 1990 году. Он придумал свои инварианты Васильева. Инвариант Васильева — это инвариант, который может быть расширен (точным образом описан) до инварианта некоторых особых узлов. Он разрешил самопересечение, введя только условие, как оно связано с непересекающимися перекрестками. Более подробно о инвариантах Васильева можно узнать в работе [2].

В настоящий момент существует недоказанная гипотеза о том, что Васильев все-таки построил полную систему инвариантов.

5. Роль узлов в реальном мире

В последнее время узлы стали обсуждаться и в других естественных науках: генетика, гидродинамика, ферромагнетизм. Удивительным является то, что так называемая "переброска Конвея", действительно происходит в природе. Это выяснилось, когда начали изучать структуру молекулы ДНК. Оказывается, что фермент топоизомераза осуществляет переброски Конвея. Этот фермент изменяет степень сверхспиральности ДНК, путем внесения одноцепочечных разрывов в ДНК. На рисунке видно, что (а) и (б) – переброска Конвея. Третья операция, которая называется твист, также известна в топологии.

Она имеет отношение к математической теории лент, весьма полезной в современной теоретической физике.

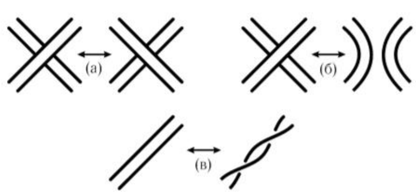

Рисунок 5. Схемы операций, производимых топоизомеразами над ДНК

6. Визуализация узлов в SageMath

Система компьютерной алгебры SageMath вышла в 2005 году, в настоящее время проект SageMath стремительно развивается. Sage свободно распространяется на условиях лицензии GNU Public License. Главная цель разработчиков бала в том, чтобы система была открытой и свободно распространяемой. С самого начала Sage задумывалась как единый и общий интерфейс к различным существующим свободным пакетам компьютерной алгебры. Сейчас Sage объединяет около 80 пакетов и систем компьютерной алгебры общего назначения.

Пользователь, работая в Sage, может легко переключаться между пакетами, а при совершении стандартных операций даже не подозревать, с помощью каких именно пакетов эти операции выполняются.

В качестве исходного языка программирования в SageMath выбран популярный язык Python. Разработчики Sage выбрали уже существующий и достаточно понятный язык программирования. Python характеризуется как язык для быстрой и удобной разработки.

К языку прилагается богатая стандартная библиотека. Кроме того, в свободном доступе имеется множество пакетов по численным методам, линейной алгебре, двумерной и трехмерной графике, поддержке баз данных и другие, которые могут заинтересовать пользователей Sage.

Для построения графиков функций в SageMath используется большое количество команд. Данная программа может строить двумерные и трехмерные графики.

Двумерные графики задаются командами:
для явно заданные функции: plot(f(x),(xmin, xmax)),
для заданных параметрически: parametric_plot((x(t),y(t)),(tmin, tmax)),
для функций, заданных неявно: implicit_plot(f, (xmin,xmax), (ymin,ymax), ...)
implicit_plot(f, (x,xmin,xmax), (y,ymin,ymax), ...)

Также можно построить графики кривых, заданных в полярных координатах:
polar_plot(r(t),(tmin, tmax))

Такими же командами, с добавлением третей переменной, можно строить трехмерные графики, что и требовалась в нашей задаче.

В настоящее время известно большое количество узлов. Наша задача состояла визуализировать некоторые узлы для лучшего восприятия. Работа выполнялась в помощью средствам пакета SageMath на языке Pyhton.

Пример 1. *В теории узлов “восьмёрка” — это единственный узел с числом пересечений четыре. Что является наименьшим возможным числом пересечений, за исключением тривиального узла и трилистника. “Восьмёрка” является простым узлом. Впервые рассмотрен Листингом в 1847 году.*

Параметрическое представление узла “восьмёрка” задаётся следующими уравнениями:
$x = (2+cos(2t))cos(3t)$
$y = (2+cos(2t))sin(3t)$
$z = sin(4t)$
где t — вещественная переменная.

Ниже представлен код программы, который по заданной параметризации реализует визуальное представление узла восьмерка:
```
t=var ('t')
parametric_plot(((2+cos(2*t))*cos(3*t),(2+cos(2*t))*sin(3*t), sin(4*t)),(t,0,2*pi))
```

Пример 2. *“Трилистник” — это простейший нетривиальный узел. Узел получается из соединения 2-х свободных концов обычного простого узла, в результате чего получаем*

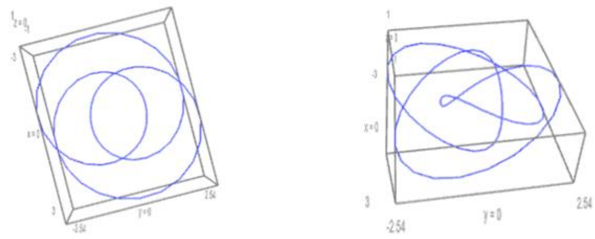

Рисунок 6. Узел “восьмерка” в пакете SageMath

заузленное кольцо. Как простейший узел, “трилистник” является фундаментальным объектом при изучении теории узлов.

“Трилистник” определяется как кривая, которая получается из следующих параметрических уравнений:
$x = sin(t)\text{-}2sin(2t)$
$y = cos(t)\text{-}2cos(2t)$
$z=\text{-}sin(3t)$
где t — вещественная переменная.

Далее приведен код программы, который по заданной параметризации реализует визуальное представление торического(трилистник) узла:

```
t=var ('t')
parametric_plot(((sin(t)+2*sin(2*t)),(cos(t)-2*cos(2*t)), -sin(3*t)),(t,0,2*pi))
```

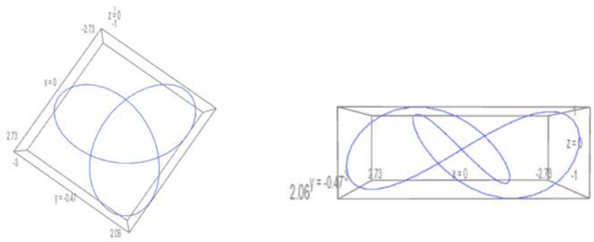

Рисунок 7. Узел трилистник в пакете SageMath

В настоящее время актуальной темой является изучение возможностей систем компьютерной математики для решения задач теории узлов.

Список литературы

1. Richard H. Crowell, Ralph H. Fox. Introduction to Knot Theory. — Springer-Verlag : Springer-Verlag, 1963.

2. Burde G., Zieschang H. Knots. — Berlin, New York : Walter de Gruyter, 2003.

3. Сосинский А.Б. Узлы. Хронология одной математической теории. Библиотечка “Квант”. — М. : Изд-во Бюро Квантум, 2009.

4. Гиляров Д.А., Шкундина И.С. ДНК-топоизомеразы и их функции в клетке // Молекулярная биология. — 2012. — Т. 46, № 1. — С. 52–63.