УДК 512.552.4

О минимальном тождестве в n-мерной нильпотентной алгебре

Петров Е.П.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
pep@mail.asu.ru

Аннотация

В данной работе рассматриваются конечномерные ассоциативные нильпотентные алгебры над произвольным полем. Установлен факт, что стандартное тождество степени $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$ при $n \leq 13$ и $n = 15, 16, 17, 21$ является минимальным тождеством в многообразии алгебр, порожденном всеми n-мерными нильпотентными алгебрами.

Ключевые слова: нильпотентная алгебра, многообразие алгебр, стандартное тождество, минимальное тождество.

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] Л.А. Бокутем была поставлена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n-мерных ассоциативных алгебрах над полем (n – фиксированное число). В 1980 году С.А.Пихтильковым [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n \leq 18$. В 1986 году Ю.Н.Мальцевым [3] изучалось многообразие $\mathfrak{M}_n$ ассоциативных алгебр над произвольным полем, порожденное всеми n-мерными нильпотентными алгебрами. Такие многообразия там были описаны для $n = \overline{1, 6}$, а также доказано, что каждая n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет тождествам:

$$x_1 x_2 \dots x_{n-2} = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n-2)},\ \sigma \in S_{n-2},\ n \geq 6; [x_1, x_2, \dots, x_k] = 0,$$

где $k = [\frac{n+1}{2}] + 1$. Кроме того, в работе [3] был поставлен вопрос:
(*) *Какова степень минимального тождества в многообразии $\mathfrak{M}_n$?*

Заметим, что описание многообразия $\mathfrak{M}_n$ на языке тождеств позволит ответить на вопрос: когда приведенносвободная алгебра некоторого многообразия аппроксимируется k-мерными нильпотентными алгебрами ($k \leq n$)? Исходя из этого, представляется естественным изучение тождеств сначала нильпотентных n-мерных алгебр, а затем уже произвольных n-мерных алгебр.

В 1989 г. И.Л.Гусевой [4] было доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству

$$S_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0, \text{ где } k = [\tfrac{n}{3}] + 2.$$

В 1991 г. автором [5] была сформулирована гипотеза о том, что произвольная n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, \dots, x_k) = 0$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, в качестве подтверждения этой гипотезы приводится пример n-мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра R с условием $dim R^2/R^3 \leq 2$ удовлетворяет данной гипотезе.

В работе [6] усиливается предыдущий результат. Именно, доказано, что всякая нильпотентная конечномерная алгебра R с условием $dim R^2/R^3 = 2$ удовлетворяет стандартному тождеству степени четыре

$$S_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{\sigma\in S_4}(-1)^{\sigma}x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}=0.$$

Причем эта оценка является точной.

Далее в работах [7–9] автором изучались строение и определяющие соотношения произвольной ассоциативной s-порожденной нильпотентной алгебры R над полем с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2$ (для некоторого $N>2$). В итоге, был получен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть R — произвольная s-порожденная ($s\geq 2$) нильпотентная алгебра над произвольным полем с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2$ для некоторого $N\geq 3$. Тогда*

1) если $s<N+2$, то R удовлетворяет стандартному тождеству $S_T(x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_T)=0$, где $T=\left\lceil\frac{(N+2)(s-1)^2+s^{m+1}-m(s-1)s-s}{m(s-1)^2}\right\rceil$ и параметр m вычисляется по формулам:

$$m=\begin{cases}\left\lfloor\log_s\dfrac{\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}}\right\rfloor, & \text{если } N<N^*;\\[2ex] \left\lfloor\log_s\dfrac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}}\right\rfloor, & \text{если } N\geq N^*,\end{cases}$$

$$N^*=\frac{\left(\left\lfloor\log_s\dfrac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}}\right\rfloor(s-1)-s\right)\cdot s^{\left\lfloor\log_s\frac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}}\right\rfloor}+s}{(s-1)^2}-2;$$

2) при любых значениях s алгебра R удовлетворяет стандартному тождеству $S_{N+2}(x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_{N+2})=0$.

Здесь $\lfloor x\rfloor$ обозначает округление числа x в меньшую сторону (целая часть числа, пол), $\lceil x\rceil$ обозначает округление числа x в большую сторону (потолок).

Из этой теоремы в качестве следствия имеет место следующий факт:

Теорема 2. *Стандартное тождество степени $k=[\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$ при $n\leq 13$ и $n=15,16,17,21$ является минимальным тождеством в многообразии $\mathfrak{M}_n$.*

Таким образом, для алгебр некоторых малых размерностей получен положительный ответ на вопрос (*).

Список литературы

1. Днестровская тетрадь: нерешенные проблемы теории колец и модулей: (оперативно-информационный материал). — Новосибирск : Ин-т математики СО АН СССР, 1982.

2. Пихтильков С.А. О многообразиях, порожденных n-мерными алгебрами. — Тула : Тульский политехнический институт, 1980. — Деп. в ВИНИТИ, №1213-80.

3. Мальцев Ю.Н. О тождествах нильпотентных алгебр // Известия вузов, Мат. — 1986. — № 9. — С. 68–72.

4. Гусева И.Л. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Международная конференция по алгебре памяти А.И. Мальцева: сборник трудов, Новосибирск, август 1989. — Новосибирск : НГУ, 1989. — С. 43.

5. Петров Е.П. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Алгебра и логика. — 1991. — Т. 30, № 5. — С. 540–556.

6. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества нильпотентной конечномерной алгебры R с условием $\dim R^2/R^3 = 2$ // Сибирские электронные математические известия. — 2016. — № 13. — С. 1052–1066.

7. Петров Е.П. Строение, определяющие соотношения и тождества конечномерной нильпотентной алгебры R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. — 2017. — № 14. — С. 1153–1187.

8. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества конечнопорожденной нильпотентной алгебры R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — № 15. — С. 1048–1064.

9. Петров Е.П. О стандартном тождестве в конечнопорожденной нильпотентной алгебре R над произвольным полем с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — № 16. — С. 1981–2002.