УДК 519

О потоке Риччи метрической группы Ли SU(2) с полусимметрической связностью[1]

Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Аннотация

В работе записано уравнение потока Риччи на трехмерной метрической группе Ли SU(2) с полусимметрической связностью. Замечено, что поток Риччи полусимметрической связности совпадает с потоком Риччи связности Леви-Чивиты на SU(2).

Ключевые слова: группа Ли, поток Риччи, полусимметрическая связность.

1. Введение

Пусть M — риманово многообразие размерности n. Определим на M однопараметрическое семейство римановых метрик $g(t)$ и запишем уравнение потока Риччи

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t)_{ij} = -2Ric(g(t))_{ij}, \tag{1}$$

где Ric —тензор Риччи многообразия M.

Уравнение (1) впервые исследовалось Р.Гамильтоном в [1].

Определим на M полусимметрическую связность ∇ формулой

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \tag{2}$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является метрической и впервые описана Э. Картаном в [2].

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \quad Ric(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X,Z)Y).$$

2. Поток Риччи группы SU(2)

Пусть далее $M = SU(2)$ — трехмерная унимодулярная группа Ли. Рассмотрим базис Дж. Милнора левоинвариантных векторных полей $\{E_1, E_2, E_3\}$, такой, что [3]

$$[E_1,E_2] = E_3, \quad [E_3,E_1] = E_2, \quad [E_2,E_3] = E_1.$$

Рассмотрим на $SU(2)$ семейство левоинвариантных римановых метрик

$$g(t) = A(t)(\theta^1)^2 + B(t)(\theta^2)^2 + C(t)(\theta^3)^2,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 22-21-00111), а также в рамках реализации Программы поддержки научно-педагогических работников ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет», проект «Символьные вычисления на многообразиях с метрикой».

где $\{\theta^i\}$ — кобазис к базису Милнора $\{E_i\}$.

Используя математические модели работы [4], определим компоненты тензора Риччи метрики $g(t)$

$$
\begin{aligned}
&Ric_{11} = \frac{2\,BC - C^2 - B^2 + A^2 - 2\,A(V^3)^2BC^2 - 2\,A(V^2)^2B^2C}{2BC},\\
&Ric_{12} = -1/2\,BV^3 + 1/2\,AV^3 - 1/2\,CV^3 + BV^2AV^1,\\
&Ric_{13} = 1/2\,CV^2 - 1/2\,AV^2 + 1/2\,BV^2 + V^1AV^3C,\\
&Ric_{21} = 1/2\,AV^3 - 1/2\,BV^3 + 1/2\,CV^3 + BV^2AV^1,\\
&Ric_{22} = -1/2\,\frac{C^2 - 2\,AC - B^2 + A^2 + 2\,AV^{3^2}BC^2 + 2\,BV^{1^2}A^2C}{AC},\\
&Ric_{23} = -1/2\,CV^1 - 1/2\,AV^1 + 1/2\,BV^1 + BV^2V^3C,\\
&Ric_{31} = -1/2\,AV^2 - 1/2\,BV^2 + 1/2\,CV^2 + V^1AV^3C,\\
&Ric_{32} = 1/2\,BV^1 + 1/2\,AV^1 - 1/2\,CV^1 + BV^2V^3C,\\
&Ric_{33} = -1/2\,\frac{-2\,AB + B^2 - C^2 + A^2 + 2\,AV^{2^2}B^2C + 2\,BV^{1^2}A^2C}{AB},
\end{aligned}
$$

где $V = \{V^1, V^2, V^3\}$.

Запишем уравнение потока Риччи на группе Ли $SU(2)$ с полусимметрической связностью

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}A = \frac{(B-C)^2 - A^2 + 2\,ABC((V^3)^2C + (V^2)^2B)}{BC},\\
&0 = BV^3 - AV^3 + CV^3 - 2BV^2AV^1,\\
&0 = CV^2 - AV^2 + BV^2 + 2V^1AV^3C,\\
&0 = AV^3 - BV^3 + CV^3 + 2BV^2AV^1,\\
&\frac{d}{dt}B = \frac{(A-C)^2 - B^2 + 2\,ABC((V^3)^2C + (V^1)^2A)}{AC},\\
&0 = CV^1 + AV^1 - BV^1 - 2BV^2V^3C,\\
&0 = AV^2 + BV^2 - CV^2 - 2V^1AV^3C,\\
&0 = BV^1 + AV^1 - CV^1 + 2BV^2V^3C,\\
&\frac{d}{dt}C = \frac{(A-B)^2 - C^2 + 2\,ABC((V^2)^2B + (V^1)^2A)}{AB}.
\end{aligned}
$$

Нетрудно заметить, что данная система имеет решение только при тривиальном векторном поле V. Таким образом, поток Риччи на группе $SU(2)$ относительно полусимметрической связности совпадает на $SU(2)$ с потоком Риччи связности Леви-Чивиты, который исследовался в [5].

3. Заключение

В работе определен поток Риччи на группе $SU(2)$ относительно полусимметрической связности. Замечено, что на данной группе поток Риччи полусимметрической связности совпадает с потоком Риччи связности Леви-Чивиты. Аналогично может быть записано уравнение потока Риччи на других трехмерных метрических группах Ли.

Список литературы

1. Hamilton R.S. Three-manifolds with positive Ricci curvature // J. Differential Geom. — 1982. — Vol. 17(2). — P. 255–306.

2. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. — 1925. — Vol. 42. — P. 17–88.

3. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — Vol. 21. — P. 293–329.

4. Klepikov P., Rodionov E.and Khromova O. Einstein equation on three-dimensional locally symmetric (pseudo)Riemannian manifolds with vectorial torsion // Mathematical notes of NEFU. — 2020. — Vol. 26(4). — P. 25–36.

5. Onda K. Ricci Flow on 3-dimensional Lie groups and 4-dimensional Ricci-flat manifolds. — 2010.