УДК 514.765

О тензоре кривизны 3-мерных унимодулярных групп Ли, удовлетворяющих симметрическому уравнению Эйнштейна[1]

Павлова А.А., Хромова О.П.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
anya.0596@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Аннотация

В работе исследуется тензор кривизны 3-мерных унимодулярных групп Ли с полусимметрической связностью и левоинвариантной римановой метрикой, удовлетворяющей симметрическому уравнению Эйнштейна.

Ключевые слова: полусимметрические связности, метрики Эйнштейна, унимодулярные группы Ли, левоинвариантные римановы метрики.

1. Общие сведения

Пусть (M,g) — риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \tag{1}$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в [1], и называется полусимметрической связностью или связностью с векторным кручением (с точностью до направления) [2,3].

Тензор кривизны и тензор Риччи риманова многообразия (M,g) относительно полусимметрической связности задаются соответственно равенствами

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

$$r(X,Y) = \mathrm{tr}(U \to R(X,U)Y).$$

Отметим, что тензор кривизны полусимметрической связности обладает следующими симметриями

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z;$$
$$R(X,Y,Z,T) = -R(X,Y,T,Z).$$

и тензор Риччи полусимметрической связности, вообще говоря, не является симметрическим.

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 22-21-00111), а также в рамках реализации Программы поддержки научно-педагогических работников ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет», проект «Символьные вычисления на многообразиях с метрикой».

Назовем многообразие (M, g) эйнштейновым, если тензор r_{ij} удовлетворяет одному из следующих уравнений [4, 5]:

$$\begin{array}{ll} Type\,\mathcal{A} & r_{ij} = \Lambda g_{ij}; \\ Type\,\mathcal{B} & r_{ij} = \Lambda(x) g_{ij}; \\ Type\,\mathcal{C} & r_{(ij)} = \Lambda g_{ij}; \\ Type\,\mathcal{D} & r_{(ij)} = \Lambda(x) g_{ij}, \end{array}$$

где $r_{(ij)}$ — симметрическая часть тензора Риччи, Λ — константа, $\Lambda(x)$ — функция на многообразии.

Рассмотрим уравнение типа $\mathcal{C}$, которое назовем симметрическим уравнением Эйнштейна.

2. Тензор кривизны

Пусть $M = G$ — группа с левоинвариантной римановой метрикой Ли; LG — алгебра Ли группы Ли G. Зафиксируем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в алгебре LG и положим

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k,$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли.

Известно, что символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты ∇^g выражаются через структурные константы и компоненты метрического тензора

$$(\Gamma^g)_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} \left(c_{ijs} - c_{jsi} + c_{sij}\right)$$

Пусть $V \in LG$, тогда компоненты полусимметрической связности ∇ (1) задаются равенством

$$\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij} V^k - V^s g_{sj} \delta_i^k$$

Компоненты тензора кривизны и тензора Риччи можно вычислить с помощью соответствующих формул

$$R_{ijks} = \left(\Gamma_{ij}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p\right) g_{ps},$$

$$r_{ij} = R_{ijks} g^{js}$$

Рассмотрим трехмерный случай. Переобозначим структурные константы алгебры Ли в соответствии со следующей теоремой.

Теорема 1. *[6] Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда в алгебре Ли $\mathcal{U}$ группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что*

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1.$$

Тогда справедлива

Теорема 2. *[7] Пусть (G, g, ∇) — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g и полусимметрической связностью ∇, удовлетворяющая уравнению*

$$r_{ij} + r_{ji} = \Lambda g_{ij}. \tag{2}$$

Тогда алгебра Ли изоморфна $so(3)$ или $e(2)$, а структурные константы ее алгебры Ли и координаты векторного поля V входят в следующий список:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda_3^2+v_3^2}{\lambda_3}, \lambda_3 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\},\ V = \{0,0,v_3\}, \Lambda = \lambda_3^2.$

2. $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - 4v_1^2}), \lambda_2 = \lambda_3 \in \mathbb{R}^+,\ V = \{v_1, 0, 0\}, v_1^2 \leq \frac{\lambda_3^2}{4}, \Lambda = \lambda_1\lambda_3 - v_1^2.$

3. $\lambda_1 = \lambda_3 \in \mathbb{R}^+, \lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - 4v_2^2}),\ V = \{0, v_2, 0\}, v_2^2 \leq \frac{\lambda_3^2}{4}, \Lambda = \lambda_2\lambda_3 - v_2^2.$

Пусть мы находимся в условиях данной теоремы.

Случай 1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda_3^2+v_3^2}{\lambda_3}, \lambda_3 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, V = \{0,0,v_3\}, \Lambda = \lambda_3^2$. Используя математическую модель, описанную выше, вычислим тензор кривизны для данного случая. Получим следующие существенные компоненты

$$R_{1212} = R_{1313} = R_{2323} = \frac{1}{4}\lambda_3^2;$$
$$R_{3231} = -R_{3132} = \frac{1}{2}v_3\lambda_3.$$

Поскольку в рассматриваем случае $\lambda_3 \neq 0$, то тензор кривизны нетривиален.

Случай 2. $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - 4v_1^2}\right), \lambda_2 = \lambda_3 \in \mathbb{R}^+, V = \{v_1, 0, 0\}, v_1^2 \leq \frac{\lambda_3^2}{4}, \Lambda = \lambda_1\lambda_3 - v_1^2.$ Действуя аналогично случаю 1, вычислим тензор кривизны для данного случая. Приведем существенные компоненты

$$R_{1212} = R_{1313} = \frac{1}{16}\left(\pm\lambda_3 + \sqrt{\lambda_3^2 - 4v_1^2}\right)^2;$$
$$R_{3121} = R_{1231} = \frac{1}{4}v_1\left(\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - 4v_1^2}\right);$$
$$R_{2323} = \frac{1}{8}\lambda_3^2 \pm \frac{1}{8}\lambda_3\sqrt{\lambda_3^2 - 4v_1^2} - \frac{1}{4}v_1^2.$$

Заметим, что тензор кривизны тривиален, только при равенстве нулю координаты v_1 векторного поля V. Это равносильно тому, что полусимметрическая связность вырождается в связность Леви-Чивиты.

Случай 3. $\lambda_1 = \lambda_3 \in \mathbb{R}^+, \lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - 4v_2^2}), V = \{0, v_2, 0\}, v_2^2 < \frac{\lambda_3^2}{4}, \Lambda = \lambda_2\lambda_3 - v_2^2$. Используя математическую модель, описанную выше, вычислим тензор кривизны для данного случая. Получим следующие существенные компоненты

$$R_{1212} = R_{2323} = \frac{1}{16}\left(\pm\lambda_3 + \sqrt{\lambda_3^2 - 4v_2^2}\right)^2;$$
$$R_{3221} = R_{1232} = \frac{1}{4}v_2\left(\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - 4v_2^2}\right);$$
$$R_{1313} = \frac{1}{8}\lambda_3^2 \pm \frac{1}{8}\lambda_3\sqrt{\lambda_3^2 - 4v_2^2} - \frac{1}{4}v_2^2.$$

Нетрудно проверить, что тензор кривизны тривиален, только при $v_2 = 0$ векторного поля V. Это равносильно тому, что полусимметрическая связность вырождается в связность Леви-Чивиты.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *На трехмерных унимодулярных группах Ли с нетривиальной полусимметрической связностью, удовлетворяющей уравнению Эйнштейна типа С, тензор кривизны не тривиален.*

Заметим, что для метрик Эйнштейна типа А выполняется

Теорема 4. *[8, 9] Если для трехмерного (псевдо)риманова локально однородного пространства с полусимметрической метрической связностью выполняется уравнение Эйнштейна, то либо векторное поле V тривиально, либо тензор кривизны равен нулю.*

3. Заключение

В данной работе исследовался тензор кривизны 3-мерных унимодулярных групп Ли с полусимметрической связностью и левоинвариантной римановой метрикой, удовлетворяющей симметрическому уравнению Эйнштейна (уравнению Эйнштейна типа С). Доказано, что среди указанных метрик существуют такие, что тензор кривизны нетривиален, и полусимметрическая связность отлична от связности Леви-Чивиты.

Список литературы

1. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. — 1925. — Vol. 42. — P. 17–88.

2. Yano K. On semi-symmetric metric connection // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees. — 1970. — Vol. 15. — P. 1579–1586.

3. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion // Differential Geometry and its Applications. — 2016. — Vol. 46. — P. 130–147.

4. Klemm D.S., Ravera L. Einstein manifolds with torsion and nonmetricity // Phys. Rev. D. — 2020. — Vol. 101(4).

5. Maralbhavi Y.B., Muniraja G. Semi-Symmetric Metric Connections, Einstein Manifolds and Projective Curvature Tensor // Int. J. Contemp. Math. Sciences. — 2010. — Vol. 5(20). — P. 991–999.

6. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. — 1976. — Vol. 21. — P. 293–329.

7. Павлова А.А., Хромова О.П. О симметрическом уравнении Эйнштейна трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической связностью. — (в печати).

8. Klepikov P., Rodionov E., Khromova O. Einstein equation on 3-dimensional locally symmetric (pseudo)Riemannian manifolds with vectorial torsion // Mathematical notes of NEFU. — 2020. — Vol. 26(4). — P. 25–36.

9. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально симметрических (псевдо)римановых многообразиях с векторным кручением // Математические заметки СВФУ. — 2019. — Т. 26, № 4. — С. 25–36.