УДК 514.765.2

Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных неунимодулярных метрических группах Ли с полусимметрической связностью

Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Аннотация

Статья посвящена исследованию инвариантных солитонов Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической связностью.

Ключевые слова: солитоны Риччи, полусимметрическая связность, группы и алгебры Ли.

Пусть (M, g) – (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X,$$

где V – некоторое фиксированное векторное поле; X и Y – произвольные векторные поля; ∇^g – связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в работе [1], и называется метрической связностью с векторным кручением или полусимметрической связностью (с точностью до направления).

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad r(X, Y) = tr(Z \to R(X, Z)Y).$$

Отметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивиты, в данном случае тензор Риччи не обязан быть симметричным. Однако верна

Теорема 1 ([2]). *Пусть (M, g) – риманово многообразие с полусимметрической связностью. Тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда $d\pi = 0$, где 1-форма π, определяется равенством $\pi(X) = g(X, V)$ для любого векторного поля X на M.*

Определение 1. *Метрика g полного риманова многообразия (M, g) называется солитоном Риччи, если она удовлетворяет уравнению*

$$r = \Lambda \cdot g + L_P g, \tag{1}$$

где r – тензор Риччи; $L_P g$ – производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля P; константа $\Lambda \in \mathbb{R}$. Если $M = G$ – группа Ли, и поле P левоинвариантно, то левоинвариантная риманова метрика, удовлетворяющая (1), называется инвариантным солитоном Риччи.

Основным результатом данной работы является

Теорема 2. *Пусть (G, g, ∇) – трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g и полусимметрической связностью ∇, отличной от связности Леви-Чивиты. Тогда среди таких групп Ли существуют группы, допускающие инвариантные солитоны Риччи.*

Замечание 1. *Полный список троек (G, g, ∇), а также инвариантных солитонов Риччи содержится в таблице 1.*

Таблица 1

Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической связностью

Λ	V	P	g
$-4 - 2V^1 + 4\delta - 2\delta^2 - 2\gamma^2$	$(V^1, 0, 0)$	$\left(\dfrac{\pm\sqrt{2(\delta-1)^2 + 2\gamma^2 + 2}}{2} + 1, 0, 0\right)$	$\alpha = 2 - \delta$, $\gamma = \beta$
-8	$(2, 0, 0)$	$(2, 0, P^3)$	$\alpha = 2$, $\beta = \gamma = \delta = 0$
		$\left(2, P^2, -\frac{\beta P^2}{\delta}\right)$	$\alpha = 2 - \delta$, $\beta = \gamma = \pm\sqrt{2\delta - \delta^2}$, $\delta \in (0; 2)$
0	$(-2, 0, 0)$	$\left(0, P^2, -\frac{\beta P^2}{\delta}\right)$	
$-2 - 2V^1$	$(V^1, 0, 0)$	$\left(\frac{V^1 + (V^1)^2}{2}, 0, 0\right)$	$\alpha = \delta = 1$, $\beta = -\gamma$

Следующая классификация для трехмерных неунимодулярных метрических групп Ли была получена Дж. Милнором в [3].

Теорема 3. *Пусть G – трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда в алгебре Ли группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что:*

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3, \quad [e_2, e_3] = 0,$$

где $\alpha + \delta = 2$.

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим систему уравнений (1) для определения инвариантных солитонов Риччи и условие теоремы 1 для определения симметричности тензора Риччи в базисе теоремы 3.

Условие теоремы 1 имеет вид

$$\gamma V^2 + \delta V^3 = 0, \quad \alpha V^2 + \beta V^3 = 0,$$

где $\alpha + \delta = 2$. Поэтому имеет место один из следующих случаев:

(i) $V = (V^1, 0, 0)$;

(ii) $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha = 2$, $\beta = \delta = 0$;

(iii) $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha = -\frac{\beta V^3}{V^2}$, $\gamma = -\frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}$, $\delta = \frac{\beta V^3 + 2V^2}{V^2}$.

Рассмотрим подробно случай (iii). Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$, $\alpha = -\frac{\beta V^3}{V^2}$, $\gamma = -\frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}$, $\delta = \frac{\beta V^3 + 2V^2}{V^2}$. Тогда уравнение солитона Риччи имеет вид

$$\beta(V^2)^2 + 2((V^1 + 1)V^3 - P^2\beta - 2P^3)V^2 - (2P^3 - V^3)\beta V^3 = 0,$$

$$
\begin{gathered}
2(V^2)^3V^1 - \beta(V^2)^2V^3 + 2V^3(\beta P^2 + 2P^3 - V^3)V^2 + (2P^3 - V^3)\beta(V^3)^2 = 0, \\
2V^3(\beta^2+2P^1-V^1)(V^2)^2+(2P^1-V^1+4)(V^3)^2\beta V^2+2\beta^2(V^3)^3-2V^3(V^2)^4-\beta(2P^1-V^1-4)(V^2)^3 = 0, \\
4(V^2)^2(V^3)^2 + 4\beta V^2(V^3)^3 + \beta^2(V^3)^4 - (\beta^2 + 2(V^1)^2 + 2(V^3)^2 + 2\Lambda + 4V^1)(V^2)^4- \\
-2\beta V^3(2P^1 - V^1 - 2)(V^2)^3 = 0, \\
(\beta^2 - 2(V^1)^2 - 2\Lambda + 8P^1 - 8V^1 - 8)(V^2)^4 + 2\beta V^3(2P^1 - V^1 - 2)(V^2)^3 - 4(V^2)^2(V^3)^2- \\
-4\beta V^2(V^3)^3 - \beta^2(V^3)^4 - 2(V^2)^6 = 0, \\
2(V^2)^6 + (\beth a^2 + 2(V^3)^2 + 2\Lambda + 4V^1 + 8)(V^2)^4 + 4\beta(V^2)^3V^3+ \\
+2(V^3)^2(\beta^2 + 2)(V^2)^2 + 4\beta V^2(V^3)^3 + \beta^2(V^3)^4 = 0.
\end{gathered}
$$

Докажем, что данная система уравнений не имеет решений в действительных числах.

Если первое уравнение системы домножить на $\frac{V^3}{V^2}$ и сложить со вторым уравнением, то получим

$$
\frac{V^1((V^2)^2 + (V^3)^2)}{V^2} = 0,
$$

откуда $V^1 = 0$. Тогда из суммы четвертого и пятого уравнений выразим $\Lambda = -\frac{1}{2}(V^2)^2 - \frac{1}{2}(V^3)^2 + 2P^1 - 2$.

Рассмотрим случай 1: $\beta \neq 0$. Выразим из первого уравнения

$$
P^2 = \frac{\beta(V^2)^2 + 2(V^3 - 2P^3)V^2 - V^3\beta(2P^3 - V^3)}{2V^2\beta}.
$$

Разобьём случай 1 на два подслучая. Случай 1.1: $\beta V^3 + 2V^2 \neq 0$. Тогда из разности шестого и пятого уравнений имеем:

$$
P^1 = -\frac{\beta^2(V^2)^2 + \beta^2(V^3)^2 + (V^2)^2(V^3)^2}{2V^2(\beta V^3 + 2V^2)}.
$$

После подстановки в исходную систему, сумма третьего уравнения, домноженного на $\frac{V^3}{V^2}$, и пятого уравнения примет вид

$$
-\frac{((V^2)^2 + (V^3)^2 + 4)((V^2)^2 + (V^3)^2)}{2(V^2)^2} = 0.
$$

Данное уравнение не имеет решений в действительных числах.

Случай 1.2. Пусть $\beta V^3 + 2V^2 = 0$. Из третьего уравнения системы выражаем $P^1 = \frac{1}{2}(V^3)^2$. Но тогда шестое уравнение примет вид:

$$
\frac{1}{8}(\beta^2 + 12)(V^3)^2 + \frac{1}{2}\beta^2 + 2 = 0.
$$

Данное уравнение не имеет решений в действительных числах.

Случай 2. Пусть $\beta = 0$. Из первого уравнения системы имеем $V^3 = 2P^3$, а из шестого $P^1 = -\frac{(V^2)^4+16(P^3)^2}{4(V^2)^2} - (P^3)^2 - 1$. Тогда четвертое уравнение системы примет вид

$$
\frac{(V^2)^4 + 16(P^3)^2 + 4(V^2)^2}{(V^2)^2} = 0.
$$

Данное уравнение не имеет решений в действительных числах. Таким образом, исходная система уравнений случая (iii) неразрешима. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. — 1925. — Vol. 42. — P. 17–88.

2. Barua B., Ray A.Kr. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. pure appl. Math. — 1985. — Vol. 16, no. 7. — P. 736–740.

3. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — Vol. 21. — P. 293–329.