УДК 519.67

К задаче об охране картинной галереи на поверхности многогранника[1]

Гринкевич А.В., Оскорбин Д.Н.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
alexander.grin97@gmail.com, oskorbin@yandex.ru

Аннотация

Данная работа посвящена изучению задачи об охране картинной галереи в случае, когда план галереи представляет собой выпуклый многогранник. Проводится обзор известных ранее результатов. Приведены результаты, которые могут стать основой для разработки алгоритма расстановки охранников и его реализация на одном из языков программирования.

Ключевые слова: вычислительная геометрия, выпуклый многогранник, задача об охране картинной галереи, алгоритм расстановки охранников.

На сегодняшний день задача об охране картинной галереи является хорошо изученной задачей видимости в области вычислительной геометрии [1], которая возникает в реальном мире как задача охраны интерьера художественной галереи минимальным числом охранников, наблюдающих за всеми ее залами. В вычислительной геометрии план галереи представлен в виде простого многоугольника, а охранник – точкой внутри него.

Известны многочисленные модификации исходной задачи. В некоторых вариантах охранники должны находиться на границе, в вершинах либо во внутренней области многоугольника. В других вариантах задачи изменениям подвергается план внутреннего пространства галереи, т.е. многоугольник. В некоторых случаях необходимо охранять внешнюю область, например, задача об охране тюрьмы, а также есть варианты задачи в терминах многогранников.

В данной работе осуществляется переход к трехмерному аналогу исходной задачи, т.е. план картинной галереи представлен в виде выпуклого многогранника, а охранник (средство наблюдения), расположенный в его вершине – точкой, а также приводится доказательство теоремы, которая дает оценку минимального числа охранников для наблюдения за поверхностью. Область видимости охранника ограничена поверхностью трехмерного объекта наблюдения. Необходимо оценить, какое наименьшее количество охранников (средств наблюдения) иногда необходимо и всегда достаточно для того, чтобы вся поверхность многогранника находилась под присмотром.

Единственная нетривиальная теорема об охране картинной галереи, известная для трехмерного случая, касается особого случая внешней видимости для охранников, ограниченных поверхностью выпуклого многогранника. Эквивалентная задача в размерности 2 тривиальна: $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ охранников всегда необходимо и достаточно для защиты внешней части выпуклого многоугольника.

Пусть дан выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^3$, V, E и F – количество его вершин, ребер и граней соответственно. Установим зависимость между F и минимальным числом охранников, которых нужно поставить в вершины многогранника так, чтобы они наблюдали всю поверхность.

[1]Исследование выполнено в рамках реализации Программы поддержки научно-педагогических работников ФГБОУ “Алтайский государственный университет”, проект “Символьные вычисления на многообразиях с метрикой”.

Дальнейшие результаты получены с помощью паросочетаний в двойственном графе многогранника. Нам понадобится следующая теорема Нишизеки о размере максимального паросочетания в плоских графах.

Лемма 1 (Нишизеки [2]). *Если G – k-связный планарный ($k \geq 2$) граф на n вершинах, с минимальной степенью вершины $\delta \geq 3$ и $k \geq 2$, тогда для всех $n \geq 14$ количество ребер в максимальном паросочетании G больше или равно $\left[\frac{n+4}{3}\right]$, а для всех $n < 14$ количество ребер равно $\left[\frac{n}{2}\right]$.*

Нишизеки получил много схожих результатов для различных значений δ и k, все из которых являются наилучшими (см. [2]). Далее, приведем доказательство теоремы о картинной галерее.

Теорема 1 (Грюнбаум и О'Рурк [1]). $[(2F-4)/3]$ *вершинных охранников иногда необходимо и всегда достаточно, чтобы поверхность выпуклого многогранника из F граней ($F \geq 10$) находилась под присмотром.*

Доказательство. Необходимость. Пусть Q – любой простой многогранник из f граней, т.е. имеющий все вершины степени 3. Из формулы Эйлера $v - e + f = 2$ и $2e = 3v$ следует, что $v = 2f - 4$. Из Q построить многогранник P, "обрезав" все вершины Q, то есть заменив каждую вершину Q маленьким треугольником так, чтобы ни один из новых треугольников не имел общих точек. Эта процедура проиллюстрирована на рисунке 1, когда Q – куб. P имеет $F = f + v = 3f - 4$ грани. Для каждой из новых треугольных граней требуется собственная защита, поэтому общее необходимое количество должно быть не менее $v = 2f - 4$. Но $\left[\frac{2F-4}{3}\right] = \left[\frac{6f-12}{3}\right] = 2f - 4$. Это устанавливает необходимость, когда $F \equiv 2 \, mod \, 3$, поскольку $3f - 4 \equiv 2 \, mod \, 3$. Два других случая ($mod \, 3$) можно показать следующим образом. Если одна из вершин Q не обрезана, то P имеет $F = 3f - 5$ граней и требует $2f - 5 = [[2(3f-5)-4]/3] = [(2F-4)/3]$ охранников. Если две вершины Q не обрезаны, то P имеет $F = 3f - 6$ граней и требует $2f - 6 = [[2(3f-6)-4]/3] = [(2F-4)/3]$ охранников. Таким образом, для всех значений F существуют многогранники, требующие $[(2F-4)/3]$ охранников.

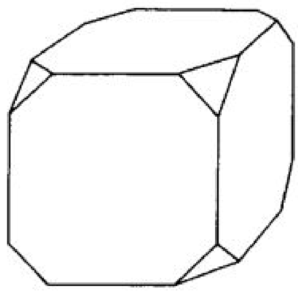

Рисунок 1. Результат усечения куба в каждой вершине

Достаточность. Пусть G – двойственный граф поверхности многогранника P; G имеет F вершин. G планарный граф, и его минимальная степень вершины равна трем, потому что каждая грань P должна иметь не менее трех ребер (двойственный граф многогранника – это граф, вершинами которого являются грани многогранника, и они соединены ребром, если соответствующие грани многогранника смежны). G 3-связен по теореме Мишеля Балинского [3], и G полиэдрален, потому что он является двойственным графом выпуклого многогранника. Следовательно, применима лемма Нишизеки, которая показывает, что для $F \geq 14$ существует паросочетание M в G, имеющее не менее $m = [(F+4)/3]$ ребер.

Теперь поместим охранника в один из концов ребра многогранника P, соответствующего каждому ребру в паросочетании. Это покрывает $2m$ граней. Назначим отдельного охранника для каждой из граней $F - 2m$ из P. Результатом будет полное покрытие с $m + F - 2m = F - [(F + 4)/3]$ охранниками. Эта величина идентична $[(2F - 4)/3]$. Для $F < 14$ существует соответствие $m = \left[\frac{F}{2}\right]$ ребер, которое в силу тех же рассуждений приводит к покрытию с помощью $\left[\frac{F}{2}\right]$ охранников. Для $F \geq 10$ $\left[\frac{F}{2}\right] \leq \left[\frac{2F-4}{3}\right]$. Таким образом, это доказывает теорему для всех $F \geq 10$. $\square$

Необходимость сохраняется для всех $F \geq 5$, есть гипотеза, что достаточность также сохраняется в диапазоне $5 \leq F \leq 9$.

Доказательство теоремы показывает, что построение алгоритма для расстановки охранников для трехмерной картинной галереи сводится к нахождению максимального паросочетания в двойственном графе многогранника. Описанию данного алгоритма будет посвящена отдельная работа.

Список литературы

1. O'Rourke J. Art Gallery Theorems and Algorithms. — UK : Oxford University Press, 1987.

2. Nishizeki T. Lower bounds on the cardinality of the maximum matchings of planar graphs // Carnegie-Mellon tech. report. — 1977.

3. Balinski M.L. On the graph structure of convex polyhedral in n-space // Pacific Journal of Mathematics. — 1961.