УДК 532.546

Математическая модель движения жидкости в пороупругом льду с учетом фазовых переходов и движения льда[1]

Токарева М.А., Вирц Р.А., Ларионова В.Н.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
tma25@mail.ru, virtsrudolf@gmail.com, lazylazo801@gmail.com

Аннотация

С использованием уравнений неизотермической двухфазной фильтрации рассматривается задача о движении воды в тающем снеге. Ледовый покров рассматривается как двухфазная среда, состоящая из воды и льда. В данной постановке учитываются фазовые переходы и движение твердой фазы. В модельном случае в автомодельных прееменных задача сводится к системе уравнений для нахождения пористости, температуры, скоростей фаз и давления жидкой фазы. Предложен алгоритм численного решения для автомодельной задачи.

Ключевые слова: фильтрация, автомодельные переменные, пористость, ледовый покров, фазовый переход, неизотермическая фильтрация, численное решение

1. Актуальность темы исследования

Задачи динамики ледового покрова являются весьма сложными как с теоретической точки зрения, так и в отношении использования для решения конкретных задач, возникающих в научно-техническом комплексе страны. Актуальность исследования таких задач обусловлена многочисленными проблемами, возникающими наряду с технологическими процессами в экологии и природопользовании, что приводит к необходимости моделирования процесса взаимопроникающего движения сплошных сред. Строящиеся при этом математические модели, как правило, являются неклассическими, и требуют разработки новых подходов как к исследованию их корректности, так и к численному моделированию [1–3].

Существует большое количество работ, посвященных фильтрации воды, при таянии льда, в которых используются экспериментальные данные и эмпирические соотношения [4, 5]. По большей части эмпирические модели одномерны и не позволяют рассчитать скорость фильтрации жидкости, а модели, которые рассчитывают скорость фильтрации жидкости, обычно не учитывают фазовые переходы или подходят только для конкретных режимов движения воды в ледовом покрове, также они не предоставляют необходимой информации о поле скоростей и насыщенности жидкой фазы, необходимой для оценки стока. Существуют различные подходы к моделированию процессов фильтрации при таянии льда. Для оценки глубины снежно-ледового покрова используются балансовые модели [4, 6], которые позволяют оценить интенсивность таяния льда и объем общего стока. Эти модели не позволяют оценить величину поверхностного и подземного стока, так как процессы фильтрации в этих моделях не рассматриваются. Абсолютно разные подходы к

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ТУБИТАК в рамках научного проекта № 20-54-55001)

моделированию фильтрации при таянии льда и снега предложены в [6, 7]. В этих работах вводятся неизвестные границы между талым льдом, содержащим воду и льдом без воды, со стандартной реологией. Кинематические и динамические условия используются в задачах со свободными границами (аналог классической задачи Стефана) для определения неизвестных границ. Однако при таком подходе пористость считается постоянной в области движения воды. Очевидно, что такая модель значительно упрощается, так как при таянии льда пористость должна зависеть от температуры. В этой работе учитывается деформация ледяного каркаса, то есть переменная пористость. Ледовый покров - это пористая среда, твердый каркас которой состоит из частиц льда. В процессе таяния в пористой среде происходит совместное движение двух фаз: воды и льда. Во льду происходят постоянные фазовые превращения, приводящие к перераспределению масс фаз. Подробная формулировка проблемы приведена в [8].

2. Постановка задачи

Лёд рассматривается как вязкоупругая деформируемая пористая среда, в порах которой движется вязкая жидкость (концентрацией воздуха и обменом импульса фаз пренебрегаем). Фильтрация воды в пористом ледовом скелете описывается с помощью уравнений сохранения массы для каждой фазы с учетом фазовых переходов, обобщенного закона Дарси, уравнения баланса сил для системы в целом, реологического уравнения для пористости и уравнения теплового баланса для двухфазной среды [3, 8, 9]:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_i}{\partial t} + div((1-\phi)\rho_i\vec{v}_i) = I_{wi}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi\rho_w}{\partial t} + div(\phi\rho_w\vec{v}_w) = I_{iw}, \tag{2}$$

$$\phi(\vec{v}_w - \vec{v}_i) = -\frac{k(\phi)}{\mu(\theta)}(\nabla p_w - \rho_w\vec{g}), \tag{3}$$

$$div\vec{v}_i = -\phi\left(\alpha p_e + \beta\frac{dp_e}{dt}\right), \tag{4}$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot}\vec{g} + div\left[(1-\phi)\eta\left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\vec{x}}\right)^*\right)\right], \tag{5}$$

$$\left(\rho_w c_w\phi + \rho_i c_i(1-\phi)\right)\frac{\partial\theta}{\partial\vec{x}} + \left(\rho_w c_w\phi\vec{v}_w + \rho_i c_i(1-\phi)\vec{v}_i\right)\nabla\theta = div(\lambda_c\nabla\theta) + \nu\frac{\partial(1-\phi)\rho_i}{\partial t}. \tag{6}$$

Здесь плотности фаз постоянные ($\rho_i = \rho_w = const$), ϕ – пористость среды, ρ_i, ρ_w, $\vec{v}_i$, $\vec{v}_w$, p_i, p_w – плотности, скорости и давление льда и воды соответственно, θ^+ – температура плавления льда, θ^-– температура замерзания воды, $k(\phi)$ – фазовая проницаемость, $\mu(\theta)$ – динамическая вязкость жидкости, $\eta(\theta)$ – вязкость льда, $\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2$ – константы, характеризующие среду и интенсивность фазового перехода, $\vec{g}$ – вектор ускорения свободного падения, $\rho_{tot} = \phi\rho_w + (1-\phi)\rho_i, p_{tot} = \phi p_w + (1-\phi)p_i, p_e = (1-\phi)(p_i - p_w), \lambda_c = a_c + b_c\rho_{tot}^2(a_c, b_c = const), I_{wi} = -I_{iw}$, а фазовый переход определён следующим образом [3]:

$$I_{iw} = \begin{cases} -\lambda_w\phi\theta, \theta < \theta^-, \\ 0, \theta^- \le \theta \le \theta^+, \\ \lambda_i(1-\phi)^2 exp\{\beta(\theta-\theta^+)\}, \theta^- > \theta^+. \end{cases}$$

3. Автомодельные переменные

Для системы (1) – (6) рассматривается автомодельное решение типа “бегущей волны” [9], $\xi = x - ct$, ($\xi > 0$, c – постоянный параметр):

$$- c\frac{d}{d\xi}(\rho_i(1-\phi)) + \frac{d}{d\xi}(\rho_i(1-\phi)v_i) = I_{wi}, \tag{7}$$

$$- c\frac{d}{d\xi}(\rho_w\phi) + \frac{d}{d\xi}(\rho_w\phi v_w) = I_{iw}, \tag{8}$$

$$\phi(v_w - v_i) = -\frac{k(\phi)}{\mu(\theta)}\left(\frac{dp_w}{d\xi} + \rho_w g\right), \tag{9}$$

$$\frac{dv_i}{d\xi} = -\phi\left[\alpha p_e + \beta\left(-c\frac{dp_e}{d\xi} + v_i\frac{dp_e}{d\xi}\right)\right], \tag{10}$$

$$\frac{dp_{tot}}{d\xi} = \rho_{tot}g + 2\frac{d}{d\xi}\left((1-\phi)\eta\frac{dv_i}{d\xi}\right), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &-c\Big(\rho_w c_w\phi + \rho_i c_i(1-\phi)\Big)\tfrac{d\theta}{d\xi} + \Big(\rho_w c_w\phi v_w + \rho_i c_i(1-\phi)v_i\Big)\tfrac{d\theta}{d\xi} = \\ &= \tfrac{d}{d\xi}\Big(\lambda_c(\phi)\tfrac{d\theta}{d\xi} - \nu c\rho_i\tfrac{d(1-\phi)}{d\xi}\Big). \end{aligned} \tag{12}$$

Система (7) - (12) дополняется граничными условиями:

$$\begin{aligned} &p_{tot}\,|_{\xi=0} = p^0 = const, \quad p_w\,|_{\xi=0} = p_w^0, \quad \theta\,|_{\xi=0} = \theta^0, \quad \theta\,|_{\xi\to\infty} = \theta^+; \\ &v_i\,|_{\xi=0} = v_i^0, \quad v_i\,|_{\xi\to\infty} = u^+, \quad v_w\,|_{\xi=0} = v_w^0, \quad v_w\,|_{\xi\to\infty} = u^+. \end{aligned} \tag{13}$$

Складывая уравнения (7) и (8), получим: $\rho_i(1-\phi)(v_i-c)+\rho_w\phi(v_w-c) = A$, где $A = const$. Тем самым приходим к следующей системе уравнений для неизвестных постоянных A, c:

$$\rho_i(1-\phi^0)(v_i^0 - c) + \rho_w\phi^0(v_w^0 - c) = A,$$

$$\rho_i(1-\phi^+)(u^+ - c) + \rho_w\phi^+(u^+ - c) = A.$$

Решение последней даётся формулами:

$$A = \rho_i(1-\phi^0)v_i^0 + \rho_w\phi^0 v_w^0 - (\rho_i(1-\phi^0) + \rho_w\phi^0)c,$$

$$c = \frac{1}{(\phi^0 - \phi^+)(1 - \frac{\rho_w}{\rho_i})}\left[u^+(1-\phi^+) - v_i^0(1-\phi^0) - \frac{\rho_w}{\rho_i}(\phi^0 v_w^0 - \phi^+ u^+)\right].$$

Систему можно представить в виде:

$$v_i = \frac{1}{\phi((1-\frac{\rho_i}{\rho_w}) + \frac{\rho_i}{\rho_w})}\left[\frac{k(\phi)}{\mu(\theta)}\left(\frac{dp_w}{d\xi} + \rho_w g\right) + \frac{A}{\rho_w} + \phi c + (1-\phi)c\frac{\rho_i}{\rho_w}\right],$$

$$-c\frac{d}{d\xi}(\rho_w\phi) + \frac{d}{d\xi}(\rho_w\phi v_w) = I_{iw},$$

$$\frac{dv_i}{d\xi} = -\phi\left[\alpha p_e + \beta\frac{dp_e}{d\xi}(v_i - c)\right], \quad p_e = p_{tot} - p_w,$$

$$\frac{dp_{tot}}{d\xi} = -\rho_{tot}g + 2\frac{d}{d\xi}\left((1-\phi)\eta\frac{dv_i}{d\xi}\right),$$

$$\frac{d\theta}{d\xi}\left(\rho_w c_w \phi(v_w - c) + \rho_i c_i(1-\phi)(v_i - c)\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\lambda_c(\phi)\frac{d\theta}{d\xi}\right) + \nu c\rho_i\frac{d\phi}{d\xi},$$

$$\frac{d}{d\xi}((1-\phi)(v_i - c)) = \frac{I_{wi}}{\rho_i}.$$

4. Модельный случай

Рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть $g = \beta = \eta = 0, \mu(\theta) = const, k(\phi) = k\frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}$, ($[k] =$м^2). Тогда:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{\alpha\phi(1-\phi)(p_{tot} - p_w)}{v_i - c} - \frac{I_{wi}}{\rho_i(v_i - c)},$$

$$\alpha\phi(p_w - p_{tot}) = \frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\phi(1-\frac{\rho_i}{\rho_w}) + \frac{\rho_i}{\rho_w}}\left(\frac{k(\phi)}{\mu}\frac{dp_w}{d\xi} + \frac{A}{\rho_w} + \phi c + (1-\phi)c\frac{\rho_i}{\rho_w}\right)\right]$$

$$\frac{dv_i}{d\xi} = \frac{v_i - c}{1-\phi}\frac{d\phi}{d\xi} + \frac{I_{wi}}{\rho_i(1-\phi)},$$

$$\phi\frac{dv_w}{d\xi} + (v_w - c)\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{I_{iw}}{\rho_w},$$

$$\frac{d\theta}{d\xi}\left(\rho_w c_w \phi(v_w - c) + \rho_i c_i(1-\phi)(v_i - c)\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\lambda_c(\phi)\frac{d\theta}{d\xi}\right) + \nu c\rho_i\frac{d\phi}{d\xi},$$

$$\frac{dp_{tot}}{d\xi} = 0.$$

Последнее уравнение интегрируется, и с учётом условий (13) получаем: $p_{tot} = p^0$. Перейдём в этой системе уравнений к безразмерным переменным:

$$x = x_1\tilde{x}, t = t_1\tilde{t}, \xi = \tilde{\xi} = x_1\left(\tilde{x} + \frac{ct_1}{x_1}\tilde{t}\right), v_i = v_1\tilde{v}_i, v_w = v_1\tilde{v}_w, p_w = p_1\tilde{p}_w, \theta = \theta_1\tilde{\theta}, I_{iw} = \gamma I_{iw},$$

$$\gamma = \begin{cases} \lambda_w\phi\theta_1, \theta < \theta^-, \\ 0, \theta^- \le \theta \le \theta^+, \\ \lambda_i, \theta^- > \theta^+. \end{cases}$$

Система уравнений принимает следующую форму (знак ~ опускается):

$$\phi(p_w - \frac{p_0}{p_1}) = \frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\phi(1-\frac{\rho_i}{\rho_w}) + \frac{\rho_i}{\rho_w}}\left(\frac{k}{x_1\alpha}\frac{\phi^3}{(1-\phi)^3} + \frac{dp_w}{d\xi} + \frac{A}{\rho_w\alpha p_1} + \frac{c}{\alpha p_1}\phi + (1-\phi)\frac{\rho_i c}{\alpha p_1}\right)\right]$$

$$\frac{dv_i}{d\xi} = \frac{v_i - \frac{c}{v_1}}{1-\phi}\frac{d\phi}{d\xi} - \frac{\gamma x_1}{\rho_i v_i}I_{iw},$$

$$\phi\frac{dv_w}{d\xi} = \left(\frac{c}{v_1} - v_w\right)\frac{d\phi}{d\xi} + \frac{\gamma x_1}{\rho_w v_i}I_{iw},$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{\alpha x_1 p_1}{v_i}\frac{\phi(1-\phi)(\frac{p^0}{p^1} - p_w)}{v_i - \frac{c}{v_1}} + \frac{\gamma x_1}{\rho_i v_i}\frac{I_{iw}}{(v_1 - \frac{c}{\rho_i})},$$

$$\frac{d\theta}{d\xi}\left[\left(v_w-\frac{c}{v_1}\right)\phi+\frac{\rho_i c_i}{\rho_w c_w}\left(v_i-\frac{c}{v_1}\right)(1-\phi)\right]=$$
$$=\frac{d}{d\xi}\left[\left(\frac{a_c}{x_1\rho_w c_w v_1}+\frac{b_c}{x_1 c_w v_1}(\phi+(1-\phi)\frac{\rho_i}{\rho_w})\right)\frac{d\theta}{d\xi}\right]+\frac{\nu c\rho_i}{\theta_1\rho_w c_w v_1}\frac{d\phi}{d\xi}.$$

Пусть $z=\frac{dp_w}{d\xi}, u=\frac{d\theta}{d\xi}$. Тогда получим систему:

$$\frac{d\theta}{d\xi}=u,\quad \frac{dp_w}{d\xi}=z \tag{14}$$

$$\frac{du}{d\xi}\left[\frac{a_c}{x_1\rho_w c_w v_1}+\frac{b_c}{x_1 c_w v_1}\left(\phi(1-\phi)+\frac{\rho_i}{\rho_w}\right)\right]=u\left(\frac{\rho_i}{\rho_w}-1\right)\frac{b_c}{x_1 c_w v_1}\frac{d\phi}{d\xi}-\frac{\nu c\rho_i}{\theta_1\rho_w c_w v_1}\frac{d\phi}{d\xi}+$$
$$\left[\left(v_w-\frac{c}{v_1}\right)\phi+\frac{\rho_i c_i}{\rho_w c_w}(v_i-\frac{c}{v_1})(1-\phi)\right]u, \tag{15}$$

$$\frac{dz}{d\xi}\left(\frac{k}{x_1\alpha}\frac{\phi^3}{(1-\phi)^2(\phi(1-\frac{\rho_i}{\rho_w})+\frac{\rho_i}{\rho_w})}\right)=$$
$$=-\frac{k}{x_1\alpha}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\phi^3}{(1-\phi)^2(\phi(1-\frac{\rho_i}{\rho_w})+\frac{\rho_i}{\rho_w})}\right)z+ \tag{16}$$
$$+\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\phi(1-\frac{\rho_i}{\rho_w})+\frac{\rho_i}{\rho_w}}\left(\frac{A}{\rho_w\alpha p_1}+\frac{c}{\alpha p_1}\phi+(1-\phi)\frac{\rho_i c}{\rho_w\alpha p_1}\right)\right].$$

$$\frac{dv_i}{d\xi}=\frac{v_i-\frac{c}{v_1}}{1-\phi}\frac{d\phi}{d\xi}-\frac{\gamma x_1}{\rho_i v_i}I_{iw}, \tag{17}$$

$$\phi\frac{dv_w}{d\xi}=\left(\frac{c}{v_1}-v_w\right)\frac{d\phi}{d\xi}+\frac{\gamma x_1}{\rho_w v_i}I_{iw}, \tag{18}$$

$$\frac{d\phi}{d\xi}=-\frac{\alpha x_1 p_1}{v_i}\frac{\phi(1-\phi)(\frac{p^0}{p^1}-p_w)}{v_i-\frac{c}{v_1}}+\frac{\gamma x_1}{\rho_i v_i}\frac{I_{iw}}{(v_1-\frac{c}{\rho_i})}. \tag{19}$$

Система уравнений (14)–(19) может быть решена численно. Для численной реализации используется метод Рунге - Кутты четвертого порядка точности [10]. Для удобства записи положим $p_w(\xi_i)=p_i, v_i(\xi_i)=v_i, v_w(\xi_i)=w_i$. Алгоритм счета следующий: из уравнения (19), используя ϕ_0, p_0, v_0 находим ϕ_1. Далее, используя найденное ϕ_1, из уравнений (17) или (18) находим v_1 или w_1, соответственно. Следующим шагом будет нахождение θ_1 и p_1 из уравнений (14), используя u_0, θ_0, z_0, p_0. Далее из (15) и (16) уравнений системы находим значения u и z на следующем шаге (u_1, z_1). Повторяем алгоритм для следующих шагов.

5. Заключение

В работе рассматривается математическая модель фильтрации воды в тающем льду. Предложен алгоритм численного решения автомодельной задачи.

Список литературы

1. Токарева М.А., Папин А.А. Математические модели механики неоднородных сред. Часть 2: пороупругие среды, вопросы разрешимости. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2021. — 190 с.

2. Папин А.А., Сибин А.Н., Шишмарев К.А. Математические модели тающего снежно-ледового покрова и протаивающих грунтов: учебное пособие. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2016. — 93 с.

3. Sibin A.N., Papin A.A. Heat and Mass Transfer in Melting Snow // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2021. — Vol. 62, no. 1. — P. 96–104.

4. Kuchment L.S. et al. Use of satellite-derived data for characterization of snow cover and simulation of snowmelt runoff through a distributed physically based model of runoff generation // Hydrology and Earth System Sciences. — 2010. — Vol. 14, no. 2. — P. 339–350.

5. Sellers S. Theory of water transport in melting snow with a moving surface // Cold Regions Science and Technology. — 2000. — Vol. 31, no. 1. — P. 47–57.

6. Sturm M., Holmgren J., Liston G.E. A seasonal snow cover classification system for local to global applications // Journal of Climate. — 1995. — Vol. 8, no. 5. — P. 1261–1283.

7. Colbeck S.C. A theory of water percolation in snow // Journal of glaciology. — 1972. — Vol. 11, no. 63. — P. 369–385.

8. Papin A.A., Tokareva M.A. Mathematical Model of Fluids Motion in Poroelastic Snow-ice Cover // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2021. — Vol. 14, no. 1. — P. 47–56.

9. Токарева М.А., Папин А.А. Краевые задачи для уравнений фильтрации в пороупругих средах: монография. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2020. — 141 с.

10. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М. : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978. — 512 с.