УДК 517

О прикладных аспектах преподавания математического анализа на инженерных и экономических направлениях

Плотникова Е.А., Саженкова Е.В.
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
Новосибирский государственный университет экономики и управления, г. Новосибирск
pselena@gmail.com, sazhenkovs@yandex.ru

Аннотация

В работе проводится обсуждение своевременного иллюстрирования теоретического курса приложениями к решению задач, являющихся математическими моделями реальных процессов. Приведён пример такого приложения, базирующийся на понятиях, как достаточно простых, изучаемых на младших курсах бакалавриата, так и весьма сложных, касающихся завершающих тем курса математического анализа.

Ключевые слова: прикладные задачи, от простого к сложному, иллюстрация реального процесса, математическая модель.

В процессе обучения студентов математическому анализу, как, впрочем, и любой другой математической дисциплине, важна заинтересованность слушателей в изучении предмета. Эта заинтересованность существенно зависит от видения перспектив использования, получаемых при изучении дисциплины знаний в последующей практической деятельности. Поскольку использование имеет отложенное во времени состояние, а интерес необходимо поддерживать здесь и сейчас, то необходимо приходится изыскивать возможность в самом курсе сопровождать изложение теоретического материала математических разделов демонстрацией посильных для понимания на достигнутом уровне изучения разделов теории приложениями в технической и социально-экономической сферах.

Прикладному иллюстрированию математического языка пределов, производных и интегралов, позволяющих единообразно описывать процессы, происходящие в различных естественнонаучных и гуманитарных сферах человеческой деятельности [1–3], уже было уделено определённое внимание в статье [4]. Сейчас остановимся на более сложном примере, касающемся ряда заключительных разделов курса математического анализа для инженерных направлений: интеграла, преобразований Фурье, свёртки функций и их свойств.

Пример.
Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$, удовлетворяющее условию $u(x,0) = u_0(x)$, где функции $u(x,t)$, $u_0(x)$, $u'_t(x,t)$, $u''_{xx}(x,t)$, $f(x,t)$ абсолютно интегрируемы по $\mathbb{R}$ при фиксированном t.

Здесь речь идёт о задаче распространения тепла в однородном бесконечном стержне при начальном распределении $u_0(x)$ и интенсивности источника тепла $f(x,t)$.

Решение.
Применим к уравнениям преобразование Фурье.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-i\lambda x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-i\lambda x}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)e^{-i\lambda x}dx,$$

то есть на основании дифференциальных свойств преобразования Фурье

$$\widehat{u}_t = (i\lambda)^2\,\widehat{u}\,(\lambda,t) + \widehat{f}\,(\lambda,t)\,,$$

где

$$\widehat{u}\left(\lambda,t\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u\left(x,t\right)e^{-i\lambda x}dx.$$

Имеем задачу для обыкновенного линейного уравнения первого порядка:

$$\widehat{u}_t=-\lambda^2\widehat{u}+\widehat{f},\quad \widehat{u}\left(\lambda,0\right)=\widehat{u}_0\left(\lambda\right).$$

Произведём умножение первого уравнения на $e^{\lambda^2 t}$ и перегруппируем слагаемые

$$\widehat{u}_t e^{\lambda^2 t}+\lambda^2 e^{\lambda^2 t}\widehat{u}=\widehat{f}\cdot e^{\lambda^2 t},$$

то есть

$$\left(\widehat{u}_t e^{\lambda^2 t}\right)'_t=\widehat{f}\cdot e^{\lambda^2 t}.$$

Проинтегрируем обе части равенства по t от 0 до t и получим

$$\widehat{u}\left(\lambda,t\right)e^{\lambda^2 t}-\widehat{u}_0\left(\lambda\right)=\int_0^t\widehat{f}\left(\lambda,\tau\right)\cdot e^{\lambda^2\tau}d\tau$$

или

$$\widehat{u}\left(\lambda,t\right)=\widehat{u}_0\left(\lambda\right)e^{-\lambda^2 t}+\int_0^t\widehat{f}\left(\lambda,\tau\right)\cdot e^{-\lambda^2(t-\tau)}d\tau.$$

Теперь применим обратное преобразование Фурье, учитывая, что

$$F^{-1}\left[\widehat{u}\right]=u,\quad F^{-1}\left[e^{-t\lambda^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

$$\widehat{u}\left(\lambda,t\right)=F[u_0]\cdot F\left[\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]+\int_0^t F\left[f\right]F\left[\overline{g}\right]d\tau,$$

где $\overline{g}$ – это функция

$$g(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

сдвинутая на τ.

Теперь обратное преобразование Фурье будем применять к уравнению

$$\widehat{u}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F\left[u_0*g\right]+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t F\left[f*\overline{g}\right]d\tau.$$

Откуда следует, что

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(u_0*g)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\left(f*\overline{g}\right)d\tau.$$

Расписывая свёртку, имеем ответ в явном виде:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2\left(t-\tau\right)}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}d\xi d\tau.$$

Список литературы

1. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах: учебник. — М. : Лань, 2008. — 400 с.

2. Плотникова Е.А. О формировании банка задач по курсу «Высшая математика» для гуманитарных направлений // Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК-2015. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2015.

3. Плотникова Е.А., Саженкова Е.В. О синтезе аналитических и информационно-технологических методов в обучении математике на гуманитарных специальностях // Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК-2016. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2016.

4. Плотникова Е.А., Саженкова Е.В. Об элементах математического моделирования в курсах высшей математики // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2019. — № 5. — С. 141–143.