УДК 514.75

Преобразование Беклунда-Бианки

Чешкова М.А.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
cma41@yandex.ru

Аннотация

Работа посвящена изучению преобразования Беклунда - Бианки для поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Получены дифференциальные уравнения, определяющие преобразование Беклунда - Бианки. В частности, построено преобразование Беклунда-Бианки для псевдосферы.

Ключевые слова: гауссова кривизна, преобразование Беклунда - Бианки, псевдосфера.

1. Введение

Изучение псевдосферических поверхностей имеет большое значение для интерпретаций планиметрии Лобачевского. Установлена связь геометрических характеристик псевдосферических поверхностей с нелинейными дифференциальными уравнениями и уравнениями sin-Гордона. Уравнение sin-Гордона играет важную роль в современной физике [1, 2]. Преобразования Беклунда - Бианки позволяют по данной псевдосферической поверхности получить новые псевдосферические поверхности.

Теория преобразования Бианки в трехмерном пространстве E^3 и теория n - мерных многообразий в E^{2n-1} излагается работе Аминова Ю.А. [3] и Tenenblat K. [4]. Преобразованию Беклунда-Бианки посвящены работы [5, 6]. В [7, гл.12, §59, п.3], [8, гл. Ф. Миндинг, п.3], [9, 10] описаны поверхности вращения постоянной гауссовой крвизны. Поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны – это волчок Миндинга, катушка Миндинга, псевдосфера. К поверхностям постоянной отрицательной гауссовой кривизны относятся также поверхность Куэна и поверхность Дини. В работе построено преобразование Беклунда - Бианки для псевдосферы.

2. Преобразование Беклунда - Бианки

Рассмотрим две гладкие поверхности M, $\bar{M}$ и диффеоморфизм $f : M \to \bar{M}$. Касательные плоскости в соответствующих точках $p \in M$, $f(p) \in \bar{M}$ пересекаются по прямой $(p, f(p))$, образуя постоянный двугранный угол θ, причем вектор $\overrightarrow{pf(p)} = \rho V_p$, где V_p — орт, $\rho = const$.

Теорема Беклунда утверждает, что если поверхность M имеет гауссову кривизну $K = -\frac{1}{\rho^2} sin^2(\theta)$, то и поверхность $\bar{M}$ имеет ту же кривизну. Если угол θ прямой, то преобразование Беклунда называется преобразованием Бианки.

Обозначим через n – орт нормали к поверхности M в точке $p \in M$, а через $\bar{n}$ – орт нормали к поверхности $\bar{M}$ в точке $f(p) \in \bar{M}$.

Имеем

$$\bar{n} = sin(\theta)[V, n] + cos(\theta)n, \tag{1}$$

где $[V, n]$ – векторное произведение векторов V, n.

Пусть поверхность M, заданая радиус-вектором $r = r(u^1, u^2)$, отнесена к линиям кривизны.

Обозначим через $R(u^1, u^2)$ – радиус-вектор точки поверхности $f(p) \in \bar{M}$ и рассмотрим отображение

$$R(u^1, u^2) = r(u^1, u^2) - \rho V(u^1, u^2), \quad \rho = const. \tag{2}$$

Имеем

$$R_i = r_i - \rho \partial_i V. \tag{3}$$

Рассмотрим разложение вектора R_i относительно ортобазиса $V, [V, n], n$.

$$R_i = \alpha_i V + \beta_i [V, n] + \gamma_i n. \tag{4}$$

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$\alpha_i = g_{is} V^s, \quad \gamma_i = -\rho b_{is} V^s, \quad \beta_i = \rho b_{is} V^s ctg(\theta), \tag{5}$$

где g_{ij}, b_{ij} – первая и вторая квадратичные формы поверхности M, соответственно.

Доказательство. Умножим (3) и (4) скалярно на V и сравним. Имеем

$$\alpha_i = (r_i, V) - \rho(\partial_i V, V).$$

Так как $(V, V) = 1$, $(\partial_i V, V) = 0$, получим $\alpha_i = g_{is} V^s$.

Умножим (3) и (4) скалярно n.

$$\gamma_i = (r_i, n) - \rho(\nabla_i V, n) - \rho b_{is} V^s = -\rho b_{is} V^s.$$

Так как $(R_i, \bar{n}) = 0$, то

$$\beta_i = -ctg(\theta) \gamma_i = \rho b_{is} V^s ctg(\theta).$$

□

Учитывая, что $b_{12} = 0$, $g_{12} = 0$, докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Преобразование Беклунда определяется системой*

$$\begin{gathered}
\rho \nabla_1 V^1 = \rho(\partial_{u^1} V^1 + \Gamma^1_{1s} V^s) = 1 - g_{11}(V^1)^2 - \rho \operatorname{ctg}(\theta) b_{11} V^1 \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} V^2, \\
\rho \nabla_1 V^2 = \rho(\partial_{u^1} V^2 + \Gamma^2_{1s} V^s) = -g_{11} V^1 V^2 - \rho \operatorname{ctg}(\theta) b_{11} V^1 (-\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} V^1), \\
\rho \nabla_2 V^1 = \rho(\partial_{u^2} V^1 + \Gamma^1_{2s} V^s) = -g_{22} V^1 V^2 - \rho \operatorname{ctg}(\theta) b_{22} V^2 \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} V^2, \\
\rho \nabla_2 V^2 = \rho(\partial_{u^2} V^2 + \Gamma^2_{2s} V^s) = 1 - g_{22}(V^2)^2 - \rho \operatorname{ctg}(\theta) b_{22} V^2 (-\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} V^1), \\
g_{11}(V^1)^2 + g_{22}(V^2)^2 = 1.
\end{gathered} \tag{6}$$

Доказательство. Из (3) имеем

$$r_i - \rho \nabla_i V = \alpha_i V + \beta_i [V, n]. \tag{7}$$

Определим $[V, n]$.

$$n = \frac{[r_1, r_2]}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}, \ V = V^1 r_1 + V^2 r_2.$$

$$[V, n] = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} (V^1 [r_1, [r_1, r_2]] + V^2 [r_2, [r_1, r_2]]) = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} V^2 r_1 - \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} V^1 r_2. \tag{8}$$

Из (7), (8), (5) следует (6). □

В качестве примера рассмотрим преобразование Беклунда-Бианки псевдосферы.

3. Преобразование Беклунда псевдосферы

Будем строить преобразование Беклунда псевдосферы.
Имеем [7, с. 100], [8, с. 175]

$$r = ue(v) + f(u)k, \quad f(u) = \int \sqrt{\frac{-u^2+1}{u^2}}du, \tag{9}$$

$e(v) = (\cos(v), \sin(v), 0)$, $k = (0, 0, 1)$, $K = -1$.
Положим $u^1 = u$, $u^2 = v$. Определим g_{ij}, b_{ij} и символы Кристоффеля Γ^k_{ij}. Имеем

$$r_1 = r_u = e(v) + f'(u)k,\ r_2 = r_v = ue'(v),$$

$$r_{11} = r_{uu} = f''(u)k,\ r_{12} = r_{uv} = e'(v),\ r_{22} = r_{vv} = -ue(v).$$

$$g_{11} = (r_1, r_1) = \frac{1}{u^2},\ g_{12} = (r_1, r_2) = 0,\ g_{22} = u^2. \tag{10}$$

$$b_{11} = (r_{11}, n) = -\frac{1}{u\sqrt{-u^2+1}},\ b_{12} = (r_{12}, n) = 0,\ b_{22} = (r_{22}, n) = u\sqrt{-u^2+1}. \tag{11}$$

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{u},\ \Gamma^1_{22} = -u^3,\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{u}. \tag{12}$$

Остальные Γ^k_{ij} равны нулю.
Положим $\theta = \frac{\pi}{6}$. Из условия $K = -\frac{1}{\rho^2}sin(\theta)^2 = -1$ следует $\rho = \frac{1}{2}$. Система (6) примет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial_u V^1(u,v)}{2} - \frac{V^1(u,v)}{2u} = 1 - \frac{V^1(u,v)^2}{u^2} + \frac{uV^1(u,v)V^2(u,v)\sqrt{3}\sqrt{4}}{4\sqrt{-u^2+1}},\\
\frac{\partial_v V^1(u,v)}{2} - \frac{V^2(u,v)u^3}{2} = -u^2V^1(u,v)V^2(u,v) - \frac{u^3\sqrt{-u^2+1}V^2(u,v)^2\sqrt{3}\sqrt{4}}{4},\\
\frac{\partial_u V^2(u,v)}{2} + \frac{V^2(u,v)}{2u} = -\frac{V^1(u,v)V^2(u,v)}{u^2} - \frac{V^1(u,v)^2\sqrt{3}\sqrt{4}}{4u^3\sqrt{-u^2+1}},\\
\frac{\partial_v V^2(u,v)}{2} + \frac{V^1(u,v)}{2u} = 1 - u^2V^2(u,v)^2 + \frac{\sqrt{-u^2+1}V^1(u,v)V^2(u,v)\sqrt{3}\sqrt{4}}{4u},\\
\frac{(V^1(u,v))^2}{u^2} + u^2(V^2(u,v))^2 - 1 = 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

Используя математический пакет, убеждаемся, что

$$\begin{gathered}
V^1(u,v) = \frac{(4u^5 + 12u^3\sqrt{-u^2+1} - 9u^3 + 9u)}{(u^2+3)(2u^2+3\sqrt{-u^2+1})},\\
V^2(u,v) = -\frac{(u^2+2\sqrt{-u^2+1}-1)\sqrt{3}}{(u^2+3)\sqrt{-u^2+1}}
\end{gathered} \tag{14}$$

удовлетворяют (13).

4. Преобразование Бианки псевдосферы

Будем строить преобразование Бианки псевдосферы.

Для преобразования Бианки $\operatorname{ctg}(\theta) = 0, \rho = 1$ и (6) примут вид

$$\begin{gathered}\partial_u V^1 - \frac{1}{u}V^1 = 1 - \frac{1}{u^2}(V^1)^2, \partial_v V^1 - u^3 V^2 = -u^2 V^1 V^2,\\ \partial_u V^2 + \frac{1}{u}V^2 = -\frac{1}{u^2}V^1 V^2, \partial_v V^2 + \frac{1}{u}V^1 = 1 - u^2(V^2)^2,\\ \frac{(V^1(u,v))^2}{u^2} + u^2(V^2(u,v))^2 - 1 = 0.\end{gathered} \tag{15}$$

Система (15) имеет решение

$$V^1 = u\frac{u^2v^2 - 1}{u^2v^2 + 1}, \ V^2 = \frac{2v}{u^2v^2 + 1}. \tag{16}$$

Используем (9). Таким образом, поверхность $\bar{M}$ имеет уравнение

$$\begin{gathered}\bar{M} : R(u,v) = ue(v) + f(u)\ k - V^1 r_1 - V^2 r_2,\\ r_1 = e(v) + \sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}\ k,\ r_2 = ue'(v),\end{gathered} \tag{17}$$

или, в силу (16),

$$R(u,v) = \frac{2u}{u^2v^2+1}(e(v) - ve'(v)) + (f(u) - V^1\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}\ )\ k. \tag{18}$$

Положим $u = \sin(t)$. Имеем $f(u) = \int\sqrt{\frac{-u^2+1}{u^2}}du$, $f(t) = \int\frac{\cos(t)^2}{\sin(t)}dt = \cos(t) + \ln(\operatorname{tg}(\frac{t}{2}))$. Уравнения (18) поверхности $\bar{M}$ примут вид

$$\begin{gathered}x = \frac{2\sin(t)}{v^2\sin(t)^2+1}(\cos(v) + v\sin(v)),\\ y = \frac{2\sin(t)}{v^2\sin(t)^2+1}(\sin(v) - v\cos(v)),\\ z = \frac{2\cos(t)}{v^2\sin(t)^2+1} + \ln(\operatorname{tg}(\frac{t}{2})).\end{gathered}$$

Построим эту поверхность для $t \in \left[\frac{\pi}{18}, \pi - \frac{\pi}{18}\right]$, $v \in [2\pi, 5\pi]$ (рисунок 1).
Полученная поверхность есть поверхность Куэна [11, с. 345].

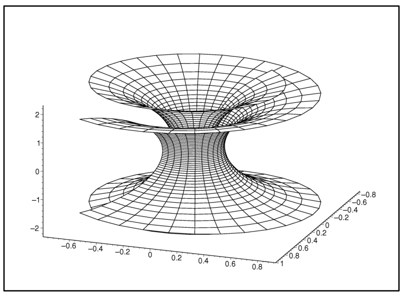

Рисунок 1. Поверхность Куэна

Утверждение. Поверхность Куэна есть преобразование Бианки псевдосферы.

Список литературы

1. Popov A.G. Psevdospherical surfaces and some problems of matemacal physics // Fundamentalnaya i prikladnaya mathematiks. — 2005. — Vol. 11, no. 1. — P. 227–239.

2. Поздняк Э.Г., Попов А.Г. Геометрия Лобачевского и уравнения математической физики // Докл. РАН. — 1993. — Т. 332, № 4. — С. 418–421.

3. Аминов Ю.А. Преобразование Бианки для области многомерного пространства Лобачевского // Украинский геометрический сборник. Харьков. — 1978. — Т. 21. — С. 3–5.

4. Tenenblat K. Transformations of manifolds and applications to differential equations // Psevdospherical surfaces and some problems of matemacal physics. — London : Logman, 1998. — Vol. II.

5. Горькавый В.А., Невмержицкая Е.Н. Аналог преобразования Бианки для двумерных поверхностей в пространстве $S^3 \times \mathbb{R}^1$ // Матем. заметки. — 2011. — Т. 89, № 6. — С. 833–845.

6. Масальцев Л.А. Бикасательное преобразование Бианки подмногообразия постоянной отрицательной кривизны H^n евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n}$ // Изв. вузов. Матем. — 2005. — Т. 7. — С. 43–48.

7. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. — М. : ГИНТЛ, 1947. — Т. II.

8. Норден А.П. Об основаниях геометрии. — М. : ГИНТЛ, 1956. — Т. II.

9. Чешкова М.А. Геодезические поверхностей вращения постоянной гауссовой кривизны // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. — 2018. — Т. 18, № 3. — С. 64–74.

10. Чешкова М.А. Преобразование Бианки n - поверхностей в E^{2n-1} // Изв. вузов. Матем. — 1997. — Т. 9. — С. 71–74.

11. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. — М. : Наука, 2006.