УДК 514.75

Заметка о преобразовании Бианки поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны

Чешкова М.А.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
cma41@yandex.ru

Аннотация

Работа посвящена изучению преобразования Бианки для псевдосферы.

Ключевые слова: псевдосфера, гауссова кривизна, преобразования Бианки, поверхность Куэна.

1. Введение

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M, полученную вращением плоской кривой вокруг оси.

Обозначим через $k = (0,0,1)$ – орт оси, а через $e = (\cos v, \sin v, 0)$ – радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси.

Тогда поверхность вращения M можно задать в виде

$$r = ue(v) + f(u)k, \tag{1}$$

где $f = f(u)$ – дифференцируемая функция; u, v – параметры.

Обозначим через n – орт нормали к поверхности M. Тогда

$$n = \frac{f'(u)e(v) - k}{\sqrt{(f'(u))^2 + 1}}.$$

Главные кривизны k_1, k_2 поверхности M имеют вид

$$k_1 = -\frac{f''(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + 1}^3}, \quad k_2 = -\frac{f'(u)}{u\sqrt{(f'(u))^2 + 1}}. \tag{2}$$

Имеем дифференциальное уравнение поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны K

$$\frac{f(u)'f(u)''}{u(f(u)')^2 + 1)^2} = K.$$

Требуя $K = const$,получим решения

$$f(u) = \pm \int \sqrt{\frac{Ku^2 - (c-1)}{c - Ku^2}} du, \quad c = const.$$

Для определённости выбираем знак плюс. Итак,

$$f(u) = \int \sqrt{\frac{Ku^2 - (c-1)}{c - Ku^2}} du, \quad c = const. \tag{3}$$

Определим метрический тензор g_{ij} и символы Кристоффеля $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^s_{ij}(r_s, r_k)$.

Имеем

$$r_1 = r_u = e(v) + f(u)'k, r_2 = r_v = ue(v)',$$

$$r_{11} = r_{uu} = f(u)''k, \quad r_{12} = r_{uv} = e(v)', \quad r_{22} = r_{vv} = -ue(v),$$

$$g_{11} = (r_1, r_1) = \frac{1}{c - Ku^2}, \quad g_{22} = (r_2, r_2) = u^2, \quad g_{12} = (r_1, r_2) = 0, \tag{4}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{Ku}{c - Ku^2}, \quad \Gamma^1_{22} = (-c + Ku^2)u, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{u}. \tag{5}$$

Остальные Γ^k_{ij} равны нулю.

Поверхности вращения посоянной отрицательной гауссовой кривизны – это волчок Миндинга $0 < c < 1$, катушка Миндинга $c < 0$, псевдосфера $c = 0$ [1, с. 100], [2, с. 175].

2. Преобразование Бианки

Рассмотрим две гладкие поверхности M, $\bar{M}$ и диффеоморфизм $f : M \to \bar{M}$. Касательные плоскости в соответствующих точках $p \in M$, $f(p) \in \bar{M}$ пересекаются по прямой $(p, f(p))$, образуя прямой двугранный угол, причем вектор $\overrightarrow{pf(p)} = \rho V_p$, где V_p – орт, $\rho = const$. Обозначим через n – орт нормали к поверхности M в точке $p \in M$. Тогда касательная плоскость к поверхности $\bar{M}$ в точке $f(p) \in \bar{M}$ имеет вид $T_{f(p)}\bar{M} = \{f(p), n, V\}$.

Теорема Бианки утверждает, что если поверхность M имеет гауссову кривизну $K = -\frac{1}{\rho^2}$, то и поверхность $\bar{M}$ имеет ту же кривизну.

1. О полугеодезических координатах.

Пусть $M : r = r(u, v)$ поверхность, u, v полугеодезические координаты, в которых первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}dv^2. \tag{6}$$

В этих координатах принято преобразование Бианки [3–6] определять по формуле

$$\bar{M} : \bar{r} = r - r_u. \tag{7}$$

2. Псевдосфера.

Применим (7) для псевдосферы.

Будем строить преобразование Бианки псевдосферы.

Полагаем $c = 0$, $K = -1$, $\rho^2 = 1$. Из (3) получим

$$f(u) = \int \sqrt{\frac{-u^2 + 1}{u^2}} du. \tag{8}$$

Уравнение псевдосферы примет вид

$$M : r = ua(v) + f(u)k, \quad a(v) = (\cos v, \sin v, 0), \quad k = (0, 0, 1).$$

Имеем в силу (4)

$$g_{11} = (r_1, r_1) = \frac{1}{u^2}, \quad g_{12} = (r_1, r_2) = 0, \quad g_{22} = u^2. \tag{9}$$

$$ds^2 = \frac{du^2}{u^2} + u^2dv^2.$$

Сделаем замену переменной $u = e^{u^*}$. Имеем

$$ds^2 = (du^*)^2 + e^{2u^*}dv^2.$$

$$M : r = e^{u^*}a(v) + F(u^*)k, \quad F(u^*) = f(e^{u^*}).$$
$$\bar{M} : \bar{r} = r - r_{u^*} = (F(u^*) - (F'(u^*))k,$$

т.е.поверхность $\bar{M}$ вырождается.

С другой стороны, можно построить преобразование Бианки псевдосферы.

Рассмотрим

$$\bar{M} : R = r - V = r - V^i r_i.$$

Так как касательная плоскость к поверхности $\bar{M}$ в точке $f(p) \in \bar{M}$ имеет вид $T_{f(p)}\bar{M} = \{f(p), n, V\}$, то

Имеем

$$R_i = r_i - \partial_i V = \omega(r_i)V + \alpha(r_i)n.$$

Так как $< V, V >= 1$, $< \partial_i V, V >= 0$, то

$$\omega(r_i) =< r_i, V >, \quad \nabla_i V = r_i - \omega(r_i)V.$$

Имеем

$$\nabla_1 V^1 = 1 - g_{11}(V^1)^2, \quad \nabla_1 V^2 = -g_{11}V^1V^2,$$
$$\nabla_2 V^1 = -g_{22}V^1V^2, \quad \nabla_2 V^2 = 1 - g_{22}(V^2)^2,$$
$$g_{11}(V^1)^2 + g_{22}(V^2)^2 = 1,$$

или

$$\begin{gathered} \partial_1 V^1 + \Gamma^1_{1s}V^s = 1 - g_{11}(V^1)^2,\, \partial_1 V^2 + \Gamma^2_{1s}V^s = -g_{11}V^1V^2, \\ \partial_2 V^1 + \Gamma^1_{2s}V^s = -g_{22}V^1V^2,\, \partial_2 V^2 + \Gamma^2_{2s}V^s = 1 - g_{22}(V^2)^2, \\ g_{11}(V^1)^2 + g_{22}(V^2)^2 = 1. \end{gathered} \tag{10}$$

$$R_i =< r_i, V > V - b_{is}V^s n, \quad b_{12} = 0, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \bar{g}_{11} =< R_1, R_1 >= g_{11}^2(V^1)^2(1 + k_1^2),\, \bar{g}_{12} =< R_1, R_2 >= 0, \\ \bar{g}_{22} =< R_2, R_2 >= g_{22}^2(V^2)^2(1 + k_2^2),\, k_1 = b_{11}/g_{11},\, k_2 = b_{22}/g_{22}, \end{gathered} \tag{12}$$

где k_i – главные кривизны поверхности M; b_{ij} – коэффициенты второй квадратичной формы.

Для псевдосферы

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{u}, \quad \Gamma^1_{22} = -u^3,\, \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{u}. \tag{13}$$

Остальные Γ^k_{ij} равны нулю.

Формулы (10) примут вид

$$\begin{gathered} \partial_u V^1 - \frac{1}{u}V^1 = 1 - \frac{1}{u^2}(V^1)^2,\, \partial_v V^1 - u^3V^2 = -u^2V^1V^2, \\ \partial_u V^2 + \frac{1}{u}V^2 = -\frac{1}{u^2}V^1V^2, \partial_v V^2 + \frac{1}{u}V^1 = 1 - u^2(V^2)^2, \\ \frac{1}{u^2}(V^1)^2 + u^2(V^2)^2 = 1. \end{gathered} \tag{14}$$

Система имеет решение

$$V^1 = u\frac{u^2v^2 - 1}{u^2v^2 + 1}, \quad V^2 = \frac{2v}{u^2v^2 + 1}. \tag{15}$$

Таким образом, поверхность $\bar{M}$ имеет уравнение

$$\bar{M}: R(u,v) = ue(v) + f(u)\ k - V^1 r_1 - V^2 r_2,$$
$$r_1 = e(v) + \sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}\ k,\ r_2 = ue'(v), \tag{16}$$

или

$$R(u,v) = \frac{2u}{u^2v^2+1}(e(v) - ve'(v)) + (f(u) - V^1\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}\ )\ k. \tag{17}$$

Положим $u = \sin t$. Имеем $f(u) = \int \sqrt{\frac{-u^2+1}{u^2}}du$, $f(t) = \int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = \cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}$. Уравнения поверхности $\bar{M}$ примут вид

$$x = \frac{2\sin t}{v^2\sin^2 t + 1}(\cos v + v\sin v),$$

$$y = \frac{2\sin t}{v^2\sin^2 t + 1}(\sin v - v\cos v),$$

$$z = \frac{2\cos t}{v^2\sin^2 t + 1} + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

Построим эту поверхность для $t \in [\pi/18, \pi - \pi/18]$, $v \in [2\pi, 5\pi]$ (рисунок1).

Полученная поверхность есть поверхность Куэна [7, с. 345].

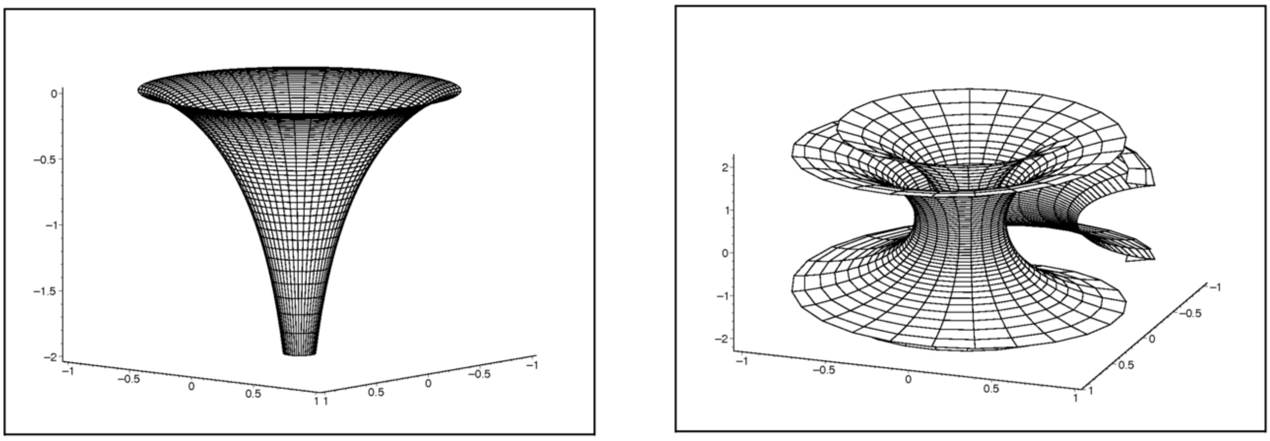

Рисунок 1. Псевдосфера, поверхность Куэна

Теорема 1. *Поверхность Куэна есть преобразование Бианки псевдосферы.*

Коэффициенты $\bar{g}_{ij}$ первой квадратичной формы поверхности $\bar{M}$ равны

$$\bar{g}_{11} = \frac{(u^2v^2-1)^2}{u^2(1-u^2)(u^2v^2+1)^2},\ \bar{g}_{12} = 0,\ \bar{g}_{22} = \frac{4u^2v^2}{(u^2v^2+1)^2}. \tag{18}$$

Используя формулу Бриоски-Фробениуса [8, с. 351] для ортогональной параметризации

$$\bar{K} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}(\partial_t\frac{G_t}{\sqrt{EG}} + \partial_v\frac{E_v}{\sqrt{EG}}),$$

где $E = \bar{g}_{11}$, $G = \bar{g}_{22}$, убеждаемся $\bar{K} = -1$.

Список литературы

1. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. — М. : ГИНТЛ, 1947. — Т. II.

2. Норден А.П. Об основаниях геометрии. — М. : ГИНТЛ, 1956.

3. Горькавый В.А., Невмержицкая Е.Н. Аналог преобразования Бианки для двумерных поверхностей в пространстве $S^3 \times R^1$ // Матем. заметки. — 2011. — Т. 89, № 6. — С. 833–845.

4. Горькавый В.А. Конгруенция Бианки двумерных поверхностей в E^4 // Матем. сборник. — 2005. — Т. 196, № 10. — С. 79–102.

5. Масальцев Л.А. Бикасательное преобразование Бианки подмногообразия постоянной отрицательной кривизны H^n евклидова пространства R^{2n} // Изв. вузов. Матем. — 2005. — Т. 7. — С. 43–48.

6. Масальцев Л.А. Псевдосферические конгруэнции Бианки в E^{2n+1} // Математическая физика, анализ, геометрия. — 1994. — Т. 1, № 3/4. — С. 509–512.

7. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. — М. : Наука, 2006.

8. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. — М. : ГИНТЛ, 1947. — Т. I.