УДК 519.67

Задача об охране картинной галереи на поверхности выпуклого многогранника[1]

Гринкевич А.В., Оскорбин Д.Н.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
alexander.grin97@gmail.com, oskorbin@yandex.ru

Аннотация

Данная работа посвящена изучению задачи об охране картинной галереи в случае, когда план галереи представляет собой выпуклый многогранник. Проводится обзор известных ранее результатов. Приведены результаты, которые стали основой для разработки алгоритма расстановки охранников, а также приведено описание применяемого алгоритма.

Ключевые слова: вычислительная геометрия, выпуклый многогранник, максимальное паросочетание, задача об охране картинной галереи, алгоритм расстановки охранников.

На сегодняшний день задача об охране картинной галереи является хорошо изученной задачей видимости в области вычислительной геометрии [1], которая возникает в реальном мире как задача охраны интерьера художественной галереи минимальным числом охранников, наблюдающих за всеми ее залами. В вычислительной геометрии план галереи представлен в виде простого многоугольника, а охранник – точкой внутри него.

Известно достаточно много модификаций данной задачи, одной из которых посвящена эта работа. В данной работе осуществляется переход к трехмерному аналогу исходной задачи, т.е. план картинной галереи представлен в виде выпуклого многогранника, а охранник (средство наблюдения), расположенный в его вершине – точкой, а также приводится доказательство теоремы, которая дает оценку минимального числа охранников для наблюдения за поверхностью. Область видимости охранника ограничена поверхностью трехмерного объекта наблюдения. Необходимо оценить, какое наименьшее количество охранников (средств наблюдения) иногда необходимо и всегда достаточно для того, чтобы вся поверхность многогранника находилась под присмотром.

Единственная нетривиальная теорема об охране картинной галереи, известная для трехмерного случая, касается случая внешней видимости для охранников, ограниченных поверхностью выпуклого многогранника. Эквивалентная задача в размерности 2 тривиальна: $\left[\frac{n}{2}\right]$ охранников всегда необходимо и достаточно для защиты внешней части выпуклого многоугольника.

Пусть дан выпуклый многогранник в R^3, V, E и F – количество его вершин, ребер и граней соответственно. Установим зависимость между F и минимальным числом охранников, которых нужно поставить в вершины многогранника так, чтобы они наблюдали всю поверхность.

Дальнейшие результаты получены с помощью паросочетаний в двойственном графе многогранника. Нам понадобится следующая теорема Нишизеки о размере максимального паросочетания в плоских графах.

[1]Исследование выполнено в рамках реализации программы поддержки научно-педагогических работников ФГБОУ ВО “Алтайский государственный университет”

Лемма 1 (Нишизеки [2]). *Если G – k-связный планарный ($k \geq 2$) граф на n вершинах, с минимальной степенью вершины $\delta \geq 3$ и $k \geq 2$, тогда для всех $n \geq 14$ количество ребер в максимальном паросочетании G больше или равно $\left[\frac{n+4}{3}\right]$, а для всех количество ребер равно $\left[\frac{n}{2}\right]$.*

Нишизеки получил много схожих результатов для различных значений δ и k, все из которых являются наилучшими (Нишизеки и Байбарс 1977; Нишизеки 1977 [3]). Далее, приведем доказательство теоремы о картинной галерее.

Теорема 1 (Грюнбаум и О'Рурк, 1983 [4]). $\left[\frac{2F-4}{3}\right]$ *вершинных охранников иногда необходимо и всегда достаточно, чтобы поверхность выпуклого многогранника из F граней ($F \geq 10$) находилась под присмотром.*

Доказательство. Необходимость. Пусть Q – любой простой многогранник из f граней, т.е. имеющий все вершины степени 3. Из формулы Эйлера $v - e + f = 2$ и $2e = 3v$ следует, что $v = 2f - 4$. Из Q построить многогранник P, "обрезав" все вершины Q, то есть заменив каждую вершину Q маленьким треугольником так, чтобы ни один из новых треугольников не имел общих точек. Эта процедура проиллюстрирована на рисунке 1, когда Q – куб. P имеет $F = f + v = 3f - 4$ грани. Для каждой из новых треугольных граней требуется собственная защита, поэтому общее необходимое количество должно быть не менее $v = 2f - 4$. Но $\left[\frac{2F-4}{3}\right] = \left[\frac{6f-12}{3}\right] = 2f - 4$. Это устанавливает необходимость, когда $F \equiv 2 \mod 3$, поскольку $3f - 4 \equiv 2 \mod 3$. Два других случая $\pmod 3$ можно показать следующим образом. Если одна из вершин Q не обрезана, то P имеет $F = 3f - 5$ граней и требует охранников. Если две вершины Q не обрезаны, то P имеет $F = 3f - 6$ граней и требует $2f - 6 = \left[\frac{[2(3f-6)-4]}{3}\right] = \left[\frac{2F-4}{3}\right]$ охранников. Таким образом, для всех значений F существуют многогранники, требующие $\left[\frac{2F-4}{3}\right]$ охранников.

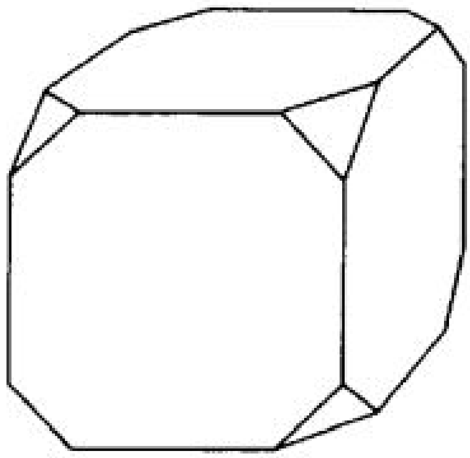

Рисунок 1. Результат усечения куба в каждой вершине

Достаточность. Пусть G – двойственный граф поверхности многогранника P; G имеет F вершин. G планарный граф, и его минимальная степень вершины равна трем, потому что каждая грань P должна иметь не менее трех ребер (двойственный граф многогранника – это граф, вершинами которого являются грани многогранника, и они соединены ребром, если соответствующие грани многогранника смежны). G 3-связен по теореме Мишеля Балинского [5], и G полиэдрален, потому что он является двойственным графом выпуклого многогранника. Следовательно, применима лемма Нишизеки, которая показывает, что для $F \geq 14$ существует паросочетание M в G, имеющее не менее $m = \left[\frac{F+4}{3}\right]$ ребер.

Теперь поместим охранника в один из концов ребра многогранника P, соответствующего каждому ребру в паросочетании. Это покрывает $2m$ граней. Назначим отдельного охранника для каждой из граней $F - 2m$ из P. Результатом будет полное покрытие с $m + F - 2m = F - \left[\frac{F+4}{3}\right]$ охранниками. Эта величина идентична $\left[\frac{2F-4}{3}\right]$. Для $F < 14$ существует соответствие $m = \left[\frac{F}{2}\right]$ ребер, которое в силу тех же рассуждений приводит к покрытию с помощью $\left[\frac{F}{2}\right]$ охранников. Для $F \geq 10$ $\left[\frac{F}{2}\right] \leq \left[\frac{2F-4}{3}\right]$. Таким образом, это доказывает теорему для всех $F \geq 10$. □

Необходимость сохраняется для всех $F \geq 5$, есть гипотеза, что достаточность также сохраняется в диапазоне $5 \leq F \leq 9$.

Доказательство теоремы показывает, что построение алгоритма для расстановки охранников для трехмерной картинной галереи сводится к нахождению максимального паросочетания в двойственном графе многогранника. Для решения данной задачи применим уже известные алгоритм.

Для достижения цели применим алгоритм Эдмондса, вычислительная сложность которого составляет $O(n^3)$. Прежде, чем описать основную идею используемого алгоритма ведем необходимые понятия.

Определение 1. *Пусть зафиксировано некоторое паросочетание M. Тогда простая цепь $P = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ называется чередующейся цепью, если в ней ребра по очереди принадлежат – не принадлежат паросочетанию M.*

Определение 2. *Чередующаяся цепь называется увеличивающей, если её первая и последняя вершины не принадлежат паросочетанию M.*

Идея данного алгоритма состоит в том, что каждый цикл нечетной длины (при наличии) в исходном графе G стягивается в псевдо-вершину. Данная процедура называется сжатием цветка (под цветком понимается цикл нечетной длины). Далее, в полученном псевдо-графе $\overline{G}$ ищется увеличивающаяся цепь, т.е. такая чередующаяся цепь, в которой первая и последняя вершины не принадлежат паросочетанию, с помощью обхода в ширину. После нахождения увеличивающейся цепи цветки в псевдо-графе разворачиваются. Таким образом осуществляется обратный переход к исходному графу и восстановление увеличивающейся цепи в нем. Подробное описание и анализ вычислительной сложности алгоритма содержится в работе [6].

Итак, схема вышеописанного алгоритма выглядит следующим образом.

```
edmonds_blossom_algorithm:
     количество паросочетаний равно 0
     for u in range(self.V):
             if текущая вершина не содержит смежную ей в паросочетании
             then строить путь
find_augmenting_path:
     обход в ширину:
             v = текущая_вершина
                    перебрать все рёбра из v
                          if обнаружили цикл нечётной длины
                          then сжимаем его
                          if пришли в свободную вершину,
                          if пришли в несвободную вершину,
                          then добавить в очередь смежную ей в паросочетании.
```

Замечание 1. *Неочевидно, что после сжатия цветка сохраняется структура графа, а именно, что если в графе G существует увеличивающаяся цепь, то она существует и в псевдо-графе $\overline{G}$ и наоборот. Отсюда вытекает следующая теорема.*

Теорема 2 (Эдмондса)**.** *В графе* $\overline{G}$ *существует увеличивающая цепь тогда и только тогда, когда существует увеличивающая цепь в* G*.*

Возможно, данный алгоритм недостаточно быстр. Дальнейшие исследования будут посвящены оптимизации алгоритма Эдмондса поиска максимального паросочетания в двойственном графе выпуклого многогранника.

Список литературы

1. O'Rourke J. Art Gallery Theorems and Algorithms. — UK : Oxford University Press, 1987.

2. Nishizeki T. Lower bounds on the cardinality of the maximum matchings of planar graphs // Carnegie-Mellon tech. report. — 1977.

3. Nishizeki T., Baybars I. Lower bounds on the cardinality of the maximum matchings of planar graphs // Carnegie-Mellon tech. report. — 1977.

4. O'Rourke J. Art Gallery Theorems and Algorithms. — UK : Oxford University Press, 1987.

5. Balinski M.L. On the graph structure of convex polyhedral in n-space // Pacific Journal of Mathematics. — 1961.

6. Алгоритм Эдмондса нахождения наибольшего паросочетания в произвольных графах // MAXimal.